LİSE 3 ÖĞRENCİLERİNİN ÇEKİRDEK FONKSİYON KAVRAMINI ANLAMALARI

Hatice AKKOÇ

Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi O.Ö.F.M.A. E. Bölümü, İSTANBUL

ÖZET: Bu çalışma matematiğin en önemli kavramlarından biri olan fonksiyon kavramının öğrenciler tarafından anlaşılmasını inceler. Literatürde fonksiyon kavramının anlaşılmasını çeşitli teorik çatılar altında inceleyen birçok araştırma vardır (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Dubinsky, 1991; Sfard, 1992; Confrey, 1994; Leinhardt ve diğerleri, 1990). Bu çalışma ise öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarını çekirdek fonksiyon kavramı çerçevesinde inceler. Araştırma temel olarak nitelikseldir ve temel veriler yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. 114 lise 3 öğrencisine dağıtılan anketlerden elde edilen verilerin analizi sonucu *teorik örnekleme* (Mason, 1996) yoluyla 9 öğrenci mülakat için seçilmiştir. Verilerin analizi bir ızgara yardımıyla ifade edilmiştir. Bu analizlerin sonucu göstermiştir ki çok az öğrenci çekirdek fonksiyon kavramına hakimdir.

1 GİRİŞ

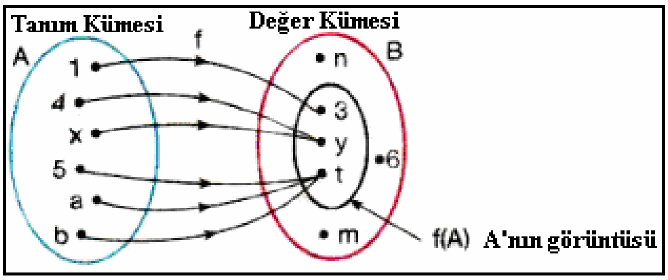
Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Matematiğin her seviyesinde birçok konuya temel teşkil eder. Lise seviyesinde, reel ve tek değişkenli fonksiyonlar işlenir. Üniversite seviyesinde, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar analizin merkezi kavramıdır (Vinner, 1992). Analizden öte, ileri matematikte, fonksiyonlar soyut matematiksel yapıları karşılaştırmak için kullanılır (örneğin iki kümenin kardinalitesinin aynı olduğunu göstermek, bir grubun diğerinin homomorfik görüntüsü olduğunu göstermek gibi).

Yeni matematik akımının etkisiyle, ülkemizde fonksiyon konusuna küme teorik olarak giriş yapılır. Kartezyen çarpım, sıralı ikili, bağıntı konularından sonra, fonksiyon kavramı özel bir bağıntı olarak aşağıdaki tanımla verilir:

Tanım: *A* ve *B* boş olmayan iki küme olmak üzere; *A*'nın her elemanını, *B*'nin yalnız bir elemanına eşleyen; *A*'dan *B*'ye bir *f* bağıntısına, *A*'dan *B*'ye fonksiyon denir. *A*'dan *B*'ye tanımlı bir *f* fonksiyonu: 1. *A*'nın tüm elemanlarını, *B*'nin elemanlarına eşler. 2. *A*'nın her elemanını, *B*'nin yalnız bir elemanına eşler. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere; *A*'dan *B*'ye bir *f* fonksiyonu, *x*'i *y*'ye eşliyorsa; $f: A \to B,\quad x \to y=f(x)$ biçiminde gösterilir.

Tablo 1. Fonksiyon kavramının tanımı (Demiralp ve diğerleri, 2000, s. 3)

Bu tanım matematiksel niceleyicileri ve sembolleri kullanmadığından "sözel tanım" olarak da adlandırılabilir. Bu tanım, görsel olarak küme eşlemesi diyagramı üzerinde aşağıdaki şekilde açıklanır.



Şekil 1. Fonksiyon tanımının görsel açıklaması (Demiralp ve Diğerleri, 2000, s.3)

Tanımın bu şekilde verilmesinden sonra kavramın dört değişik temsili (küme eşlemesi diyagramı, sıralı ikililer kümesi, denklemler ve grafikler) ile fonksiyon örnekleri verilir.

2 LİTERATÜR TARAMASI

Literatürde fonksiyon kavramının anlaşılması üzerine birçok araştırma vardır. Tall & Vinner (1981) ve Vinner (1983) öğrencilerin her zaman kavramın tanımından yola çıkarak muhakeme yapamadıklarını gözlemlemiş ve bu durumu açıklamak için *kavram tanımı* ve *kavram görüntüsü* arasındaki farka dikkat çekmiştir. Kavram tanımı, kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olup matematikçiler tarafından kabül gören matematiksel ifadelerdir. Kavram görüntüsü, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlardır. Öğrenciler fonksiyon kavramıyla ilgili olarak zihinlerinde çeşitli kavram görüntüleri oluştururlar. Literatürde bundan sonraki araştırmalar iki yönde gelişmiştir. Araştırmalar bir taraftan, fonksiyon kavramının bir *süreç* ve *zihinsel nesne* olarak kavramsallaştırılmasını ayırt ederken (Dubinsky, 1991; Sfard, 1992); diğer taraftan fonksiyonların çoğul temsillerine yoğunlaşmıştır (Confrey, 1994; Leinhardt ve Diğerleri, 1990).

Çoğul temsillerle ilgili çalışmalar, özellikle bilgisayar ortamının aynı anda birçok temsile hızlı ve etkin şekilde ulaşma imkanı verdiğinden, temsiller arasındaki geçişlerle temsiller arası bağların kuvvetlendiğini ve dolayısıyla fonksiyonların kavramsal olarak öğrenilmesine katkıda bulunduğunu vurgular. Thompson (1994), bu çalışmalara eleştirel olarak bakar ve üzerinde dikkatle düşünülmesi gereken konunun "temsil" olgusu olduğunu söyler. Fonksiyon kavramının anlaşılmasını açıklamaya çalışan bu araştırmalar aslında fonksiyon kavramının özel bir durumunu incelemektedir, örneğin $y = ax + c$ sembolik temsili ve doğrusal fonksiyon grafikleri arasındaki bağların incelenmesi gibi. Thompson'a (1994) göre hiçbir temsil fonksiyon kavramını birebir temsil edemez ve çekirdek fonksiyon kavramı bütün temsillerden öte kavramın en genel soyut halidir. Thompson öğrencilerin bir temsilden diğerine geçerken sabit kalan birşeyin farkına varmadıklarını, aksine her temsili öğrenilecek bağımsız bir konu olarak gördüklerini iddia eder.

3 TEORİK ÇATI

Bu çalışmanın teorik çatısının çıkış noktası Thompson'un çekirdek fonksiyon kavramıdır. Başka bir değişle, bu çalışma öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarını çekirdek fonksiyon kavramı çerçevesinde inceler. Öğrencilerin değişik temsiller için tanımsal özellikleri kullanmadaki tutarlılıkları çekirdek fonksiyon kavramına sahip olmalarının bir göstergesi olarak ele alınacaktır. Bu bağlamda aşağıdaki araştırma soruları incelenecektir:

S1. Öğrenciler fonksiyonu tanımak için fonksiyon tanımını kullanıyorlar mı?

S2. Öğrenciler tanımsal özellikleri herbir temsil için nasıl kullanıyorlar?

S3. Öğrencilerin bütün temsiller için verdikleri cevaplar, bir temsilden diğer temsile geçerken temsiller arası farklardan nasıl etkileniyor?

S4. Bu üç araştırma sorusu, çekirdek fonksiyonun anlaşılması açısından bize neler söyler? (Öğrencilerin bütün temsiller için verdikleri cevaplar tanımı kullanma açısından ne kadar tutarlıdır?).

4 YÖNTEM VE VERİ TOPLAMA

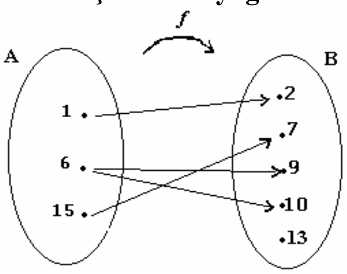
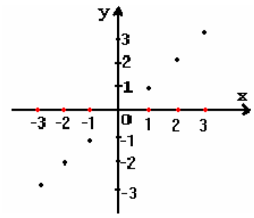
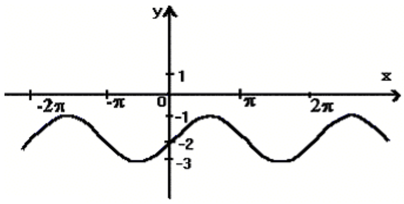
Araştırma temel olarak nitelikseldir. Bunun sebebleri şu şekildedir. Öncelikle, bu araştırma, bir kavramın anlaşılmasını incelemektedir. Salt nicel veri toplama yöntemleri kavramsal anlamanın zenginliğini ortaya çıkaramaz. İkinci olarak, araştırma sorularından da anlaşılacağı gibi, ürüne değil sürece yoğunlaşmak gerekir. Bu süreç, öğrencilerin fonksiyonları tanırkenki muhakemeleridir. Bu da ancak sürece yoğunlaşan niteliksel bir yöntem ile ortaya çıkarılabilir. Üçüncü olarak da, araştırmada daha önceden kesin olarak belirlenmiş değişkenler olmamasıdır (Denzin ve Lincoln, 1994).

4.1 Örneklem

Araştırmanın populasyonunu, Adana'daki bir özel ve bir devlet okulundaki Matematik (40), Türkçe - Matematik (32) ve Sosyal (42) grubundaki 114 lise 3 öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğrencilere dağıtılan anketlerden elde edilen verilerin çözümlenmesi sonucu teorik örnekleme (Mason, 1996) yoluyla 9 öğrenci mülakat için seçilmiştir. Teorik örnekleme, Mason'ın da ifade ettiği gibi, araştırma sorularını temel alarak ve bir teoriyi test edip açıklamaya yardım edecek özellik ve ölçüleri geliştirmeye yönelik örneklem seçmektir. Anketlerde öğrencilerin farklı temsillere verdikleri cevaplar karşılaştırıldığında, öğrencilerin küme eşlemesi ve sıralı ikililer için tanımsal özelliklere göre karar vermede grafik ve denklemlere kıyasla daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu nedenle, mülakat için öğrenci seçilirken bu sonucu destekleyen öğrenciler yanında bu sonucu desteklemeyen üç aykırı durum da seçilerek sonuçların tekrar edip etmediği test edilmiştir.

4.2 Veri toplama teknikleri

Temel veriler yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Mülakatlarda öğrencilere iki tip soru sorulmuştur. İlk olarak küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafik ve denklem şeklinde örnekler gösterilip bunların fonksiyon olup olmadığı sorulmuştur (Akkoç, 2003). Bu yazıda, mülakatlarda öğrencilere sunulan temsillerden birkaçına yoğunlaşılacaktır. Bu örnekler aşağıda verilmiştir:

Küme eşlemesi diyagramı:	**Grafikler:**	**Denklemler:**
 **Sıralı ikili kümesi:** $A=\{1,2,3,4\}$ $f: A \to R$, $f=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,3)\}$	$f:\{-3,-2,-1,1,2,3\} \to R$  $f: R \to R$  	• $f: R \to R$ $f(x)=\begin{cases} 1, & x^2-2x+1\rangle 0 \quad ise \\ 0, & x^2-2x+1=0 \quad ise \\ -1, & x^2-2x+1\langle 0 \quad ise \end{cases}$ • $f: R \to R$ $f(x)=\sin x-2$

Tablo 2. Mülakat soruları

İkinci olarak öğrencilere denklem formunda bir sabit fonksiyon verilip ($f(x)=5$), bu fonksiyonu diğer temsillere dönüştürmeleri, yani grafik, küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikili kümesi olarak ifade etmeleri istenmiştir. Dönüşüm sorusu olarak sabit bir fonksiyonun seçilmesinin nedeni, öğrencilerin sabit fonksiyon ile uğraşırken zorluk çekmeleridir (Akkoç & Tall, 2002).

5 VERİ ÇÖZÜMLEMESİ

Veri çözümlemesinin amacı, araştırma sorularını cevaplamaya yönelik olarak herbir öğrencinin herbir temsil için tanımsal özellikleri kullanıp kullanmadığına bakmak, kullanmıyor ise bir temsilin fonksiyon olup olmadığını anlamak için nasıl karar verdiğini ortaya çıkarmaktır. Verilerin çözümlenmesi için mülakat transkriptleri tanımlayıcı özetler haline getirilmiştir. Bu özetler kullanılarak öğrencilerin herbir temsil için muhakeme biçimleri aşağıda belirtilen şekilde kodlanmıştır:

Sözel tanım (ST): Sözel tanımın kullanılması.	**Sözel tanımın yanlış kullanımı (STY)**: Sözel tanımın yanlış olarak hatırlanması ya da tanımın yanlış uygulanması.
Örneklem-temelli cevaplar (ÖTC): Daha önce deneyim edilmiş belirli örneklere dayanarak verilen cevaplar (Grafiğin sinüs grafiğine benzetilmesi gibi).	**Dikey çizgi testi (DÇT)**: Dikey çizgi testinin uygulanması (Grafiğin üzerine dikey çizgiler çizerek ve çizgilerin grafiği bir kere kestiğine bakılarak fonksiyon olduğuna karar verilmesi gibi).
Küme eşlemesi diyagramı (KED): Verilen fonksiyonun küme eşlemesi diyagramının çizilmesi.	**Grafik (GR)**: Verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.
Yanlış grafik (YGR): Verilen fonksiyonun grafiğinin yanlış olarak çizilmesi.	**Tanım kümesi-değer kümesi karmaşası (TDK)**: Tanım ve değer kümelerinin birbirine karıştırılması.
Diğer (DĞ): Diğer cevaplar.	Yanıt yok (---).

Tablo 3. Öğrencilerin mülakattaki cevaplarının kodlanması

Öğrencilerin cevapları bu kodlar yardımıyla bir ızgarada tablo 4'deki şekilde ifade edilmiştir. Öğrencilerin başarısını karşılaştırmak için kodlamalarda renklendirmeler yapılmıştır. Geçerli bir cevap şekli olan sözel tanımın kullanımı (ST) koyu gri, sözel tanımın kullanımı ile birlikte faydalanılan diğer yöntemler bir ton açık gri (örneğin ST-DÇT) ve sözel tanımın yanlış kullanılması en açık gri tonda (STY) renklendirilmiştir. Koyu hücreler daha başarılı cevapları göstermektedir. Örneklem-temelli cevaplar kavramın özelliklerinden ziyade belirli örneklerin hatırlanmasına dayandığı için istenmeyen bir durumdur. Bu tür cevaplar da çizgili şekilde belirtilmiştir.

		Ali	Ahmet	Aysel[1]	Arif[1]	Belma[1]	Belgin	Cem	Deniz	Demet
KÜME EŞLEMESİ DİYAGRAMI		ST	ST	ST	ST	ST	ST	STY	ÖTC	ÖTC
SIRALI İKİLİ KÜMESİ		STY ST	ST KED	ST	ST KED	ST	---	STY	ÖTC	DĞ
GRAFİK	Doğrusal Noktalar	ST	ST	ST DÇT	ST	ÖTC	STY	DĞ	ÖTC	ÖTC
GRAFİK	$f: R \to R$ $f(x) = \sin x - 2$	ST	ST DÇT KED	ST	DĞ	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC
DENKLEM	İşaret fonksiyonu	ÖTC GR KED	ÖTC GR DÇT	ÖTC YGR	ÖTC	ÖTC	TDK	ÖTC	DĞ	DĞ
DENKLEM	$f: R \to R$ $f(x) = \sin x - 2$	ST	ÖTC ST	ST	DĞ	---	ÖTC	---	ÖTC	YGR
$f(x) = 5$ → grafik		✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$f(x) = 5$ → küme eşlemesi		✓	✓	✓	✓	---	✗	✗	✗	✗
$f(x) = 5$ → sıralı ikili kümesi		✓	✓	✓	✗	✗	---	✗	✗	---

Tablo 4. Öğrenci cevaplarının ızgarası. Kısaltmalar: ST: Sözel Tanım; STY: Sözel Tanımın Yanlış Kullanılması; ÖTC: Örneklem Temelli Cevaplar; KED: Küme Eşlemesi Diyagramı; DÇT: Dikey Çizgi Testi; GR: Grafik; YGR: Yanlış Grafik; DĞ: Diğer; ✓: Doğru Dönüşüm; ✗: Yanlış dönüşüm; ---: Cevap Yok

6 BULGULAR

Tablo 4'te verilen ızgara, öğrencilerin çeşitli fonksiyon temsillerinde tanımsal özellikleri ne derece kullanabildiklerini ortaya çıkarmak açısından faydalı olmuştur. Birinci ve ikinci araştırma sorusuna yanıt olarak, öğrencilerin sözel tanımı, özellikle küme eşlemesi diyagramları ve sıralı ikili kümeleri için daha başarılı şekilde kullandıkları gözlemlenmiştir. Tabloda görüldüğü gibi altı öğrenci sözel tanımı küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikili kümeleri için kullanırken, sadece üç öğrenci (Ali, Ahmet ve Aysel) bütün temsiller için sözel tanımı kullanmıştır. Hatta bu üç öğrenci bile tanımı küme eşlemesi ve sıralı ikililer için daha başarılı bir şekilde kullanmıştır. Yani, öğrenciler grafik ve denklem temsilleri için tanımı kullanmakta daha fazla zorlanmışlardır. Bu sonuç, anketlerde bu durumun tersini sergileyen aykırı durumlar (Aysel, Arif ve Belma) için de geçerli olmuştur.

Üçüncü araştırma sorusuna cevap aramak için, her öğrenciye ait sütuna dikey olarak bakıldığında öğrencilerin cevaplarının bir temsilden diğerine geçerken nasıl değiştiği görülebilir. Çoğu öğrenci tanımı ilk iki temsil için kullanırken, grafik ve denklemlere geçince daha karmaşık cevaplar vermişlerdir. En başarılı öğrenciler (Ali, Ahmet, Aysel, Arif) bile grafik ve denklemlere geçince tanımı doğrudan kullanmamışlardır. Örneğin Ahmet, işaret fonksiyonunun denklem temsilini önce özel bir fonksiyon olarak algılamıştır. Diğer bir deyişle örneklem-temelli bir cevap vermiştir. Daha sonra bu fonksiyonun grafiğini çizerek grafiğe dikey çizgi testini uygulamıştır. Dikey çizgilerin grafiği bir kere kestiğini belirterek, doğru bir şekilde, fonksiyon olarak algılamıştır. Bu en başarılı üç öğrenci bile grafik ve denklemler için zaman zaman tanımı kullanmayarak sadece örneklem-temelli cevaplar vermişlerdir.

Dördüncü araştırma sorusuna yanıt bulmak için herbir öğrencinin cevaplarında tanımı kullanmaktaki tutarlılıklarına bakılmıştır. Ali, Ahmet, Aysel ve Arif grafik ve denklemlerde daha çok zorlanmalarına karşılık bütün temsiller için sözel tanımı kullanmışlardır . Bu öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamaları çekirdek fonksiyon kavramına yakındır. Bununla birlikte Belma, Belgin ve Cem grafik ve denklemler için sözel tanımı kullanamamışlardır. Deniz ve Demet ise tanımı hiçbir temsil için kullanamamışlardır. Başka bir deyişle, çekirdek fonksiyon kavramını anlamaktan uzaktırlar.

Öğrencilerin sabit fonksiyon denklemini diğer temsillere dönüştürdükleri sorulara cevapları incelendiğinde ise, diğer sorulara en tutarlı cevap veren üç öğrencinin (Ali, Ahmet, Aysel) bu

[1] Aysel, Arif ve Belma anket sonuçlarına dayanılarak aykırı durum olarak seçilen öğrencilerdir.

dönüşümleri de doğru olarak yaptıkları görülür. Tanımı kullanmakta zorlanan diğer öğrencilerin ise bu dönüşüm sorularına cevap veremedikleri tespit edilmiştir.

7 SINIRLAMALAR

Bu çalışmanın kuramsal çatısı, öğrencilerin farklı temsiller hakkında muhakeme yaparken tanımsal özellikleri kullanmadaki tutarlılıklarını çekirdek fonksiyonu anlamalarının bir göstergesi olarak kabul eder. Bu kabulün bazı sınırlamaları vardır. Çalışmanın örneklemini oluşturan lise 3 düzeyindeki öğrenciler sadece reel ve tek değişkenli fonksiyonları işlemiş olup, örneğin henüz iki değişkenli fonksiyonları ya da bir fonksiyon olan türevi işlememişlerdir. Yani öğrencilerin fonksiyonun en genel ve soyut hali olan çekirdek fonksiyon kavramını anlamalarını, sadece reel ve tek değişkenli fonksiyonları değerlendirerek ölçmüş bulunmaktayız.

8 SONUÇ

Fonksiyon kavramı müfredatta her ne kadar tanım ile verilse de çok az öğrenci fonksiyonlar hakkında düşünürken tanımsal özellikleri dikkate alıyor. Bunun sebebi, tanımın konunun başında ifade edilmesinden öte öğrencilere tanımsal özellikleri düşündürecek örneklere yer verilmemesidir. Öğrencilere tanımsal özellikleri düşündürmek için aykırı örnekler sunulmalı ve öğrencilerin kavram görüntüleri zenginleştirilmelidir. Diğer önemli bir husus da fonksiyonların çoğul temsilleri arasındaki bağların kuvvetlendirilmesi gereğiyle ilgilidir. Lise müfredatında fonksiyon grafiklerinin çizimi üzerinde durularak grafik ve denklem temsilleri arasındaki bağ gözönüne alınmaktadır. Fakat, tahta ve defter üzerinde çizilen temsiller bu konuda yeterli olmayabilir. Çünkü bu tür çizimler temsiller arası bağlardan ziyade belli algoritmalarla öğretilen grafik çizme sürecine yoğunlaşmaktadır. Oysa ki grafik çizen bilgisayar yazılımlarının hızlı ve etkin temsil dönüşümü yapabilme kapasitesi kullanılarak, öğrencilerin zihinlerinde temsiller arasında daha kuvvetli bağlar oluşturulabilir (Confrey, 1994).

Kaynakça

Akkoç, H. & Tall, D.O. (2002). The Simplicity, Complexity and Complications of the Function Concept. In *Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, UK, Vol. 2, pp. 25-32.

Akkoç, H. (2003). Students' Understanding of the Core Concept of Function. *Yayınlanmamış Doktora Tezi,* Warwick Üniversitesi, İNGİLTERE.

Confrey, J. (1994). 'Six Approaches to Transformation of Function Using Multi-Representational Software', *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon, Portugal, Vol. 2, pp. 217-224.

Demiralp, A., Gürkan, M. & Pelit, T. (2000). *Matematik Lise 1 – Ders Kitabı*. Ankara: Başarı Yayınları.

Denzin, N.K. & Lincoln, Y.S. (1994). 'Strategies of Inquiry' in N.K. Denzin and Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage, pp. 199-208.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). 'The nature of the process conception of function', in G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA, pp. 85-106.

Leinhardt, G., Stein, M.K., & Zaslavsky, O. (1990). 'Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching', *Review of Educational Research*, Vol. 60, No. 1, pp. 1-64.

Mason, J. (1996). *Qualitative Researching*. London: Sage.

Sfard, A. (1992). 'Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function ', in G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA, pp. 59-84.

Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). 'Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, pp. 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, pp. 21–44.

Vinner, S. (1983). 'Concept Definition Concept Image and the Notion of Function', *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 14, No. 3, pp. 293-305.

Vinner, S. (1992). 'The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning', in G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA, pp. 195-213.