FONKSİYON KAVRAMININ ANLAŞILMASI:

TANIMSAL ÖZELLİKLER VE ÇOĞUL TEMSİLLER

Dr. Hatice Akkoç

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İSTANBUL, TÜRKİYE

Adres: Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi

OrtaÖğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Bölümü

81040 Kadıköy İSTANBUL

Tel: +90(216)3459090 Dahili:151

e-posta: hakkoc@marmara.edu.tr

Özet

Bu çalışma matematiğin önemli kavramlarından fonksiyon kavramının lise 3 öğrencileri tarafından anlaşılmasını inceler. Bunu yaparken, kuramsal çatı fonksiyonların çoğul temsilleri ile fonksiyon tanımının kullanımı arasındaki ilişkiyi temel alır. Amaç öğrencilerin küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafikler ve denklemler gibi çoğul temsiller hakkında yorum yaparken tanımsal özellikleri kullanabilme becerilerini ortaya çıkarmaktır. Çalışmanın örneklemini 9 lise 3 öğrencisi oluşturmaktadır. Bu 9 öğrenci, Matematik, Türkçe – Matematik ve Sosyal gruplarından olmak üzere 114 lise 3 öğrencisine dağıtılan anketlerin sonuçlarına göre teorik örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Temel olarak niteliksel olan bu çalışmanın verileri bu 9 lise 3 öğrencisi ile yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Mülakatlarda öğrencilerden çeşitli temsillerin fonksiyon olup olmadığı hakkında yüksek sesle düşünmeleri ve verilen sabit bir fonksiyonu diğer temsillere dönüştürmeleri istenmiştir. Mülakatların çözümlenmesi göstermiştir ki öğrencilerin farklı temsiller için tanımsal özellikleri kullanımları da farklılık göstermektedir. Dahası, tanımsal özellikleri bütün temsiller için kullanan öğrenciler temsiller arası dönüşümleri de daha başarılı bir şekilde yapmışlardır.

ANAHTAR KELİMELER: Fonksiyon kavramı; çoğul temsiller; kavram tanımı.

Abstract

This study investigates grade 11 students' understanding of the function concept. To do that, the theoretical framework is based on the relationship between multiple representations and the use of the definition of function. The aim is to reveal students' ability to use the definition as they comment on the multiple representations of functions such as set correspondence diagrams, sets of ordered pairs, graphs and expressions. The sample of the study is 9 students in grade 11 in two schools in Adana, Turkey. These 9 students were selected among 114 grade 11 students in three different subjects groups (Mathematics, Turkish and Mathematics and Social subjects) on the basis of the results from the questionnaires. This study is mainly qualitative and the main data is obtained from the semi-structured interviews with the 9 students. In these interviews, students were asked to decide whether the given representations are functions or not and they were also asked to transform a constant function to its other representations. The analysis of the interviews indicates that students' responses differ in the use of the definitional properties for various representations. Furthermore, students who can use the definitional properties for all representations can do transformations from one representation to the other more successfully.

KEY WORDS: Function concept; multiple representation; concept definition.

Fonksiyon kavramının anlaşılması: Tanımsal özellikler ve çoğul temsiller

Giriş

Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Matematiğin her seviyesinde birçok konuya temel teşkil eder. Lise seviyesinde, reel ve tek değişkenli fonksiyonlar işlenir. Üniversite seviyesinde, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar analizin merkezi kavramıdır (Vinner, 1992). Analizden öte, ileri matematikte, fonksiyonlar soyut matematiksel yapıları karşılaştırmak için kullanılır (örneğin iki kümenin kardinalitesinin aynı olduğunu göstermek, bir grubun diğerinin homomorfik görüntüsü olduğunu göstermek gibi).

Fonksiyon kavramının öğretilmesine değişik yaklaşımlar olmuştur. 19. yüzyılın ortalarından 20. yüzyılın başlarına kadar olan ders kitaplarında fonksiyon iki değişken (sadece sayılar) arasındaki bağıntı veya eşleme olarak tanımlanır. Bourbaki'nin sıralı ikili tanımı 1960'lardaki yeni matematik akımının etkisiyle müfredatlara alınmıştır. Fakat kavrama küme teorik tanımla geçiş yapılması birçok öğrenci için soyut kalmaktadır (Malik, 1980; Bruckheimer *ve diğerleri.*, 1986; Bakar & Tall, 1992). Yeni matematik akımının sonrasında fonksiyonlar cebirin öğretilmesinde kullanılmıştır (Kieran, 1994; Brenner *ve diğerleri.*, 1997; O'Callaghan, 1998; DeMarois & Tall, 1999).

Çalışmanın alt yapısı

Yeni matematik akımının etkisiyle, ülkemizde fonksiyon konusuna küme teorik olarak giriş yapılır. Kartezyen çarpım, sıralı ikili, bağıntı konularından sonra, fonksiyon kavramı özel bir bağıntı olarak aşağıdaki tanımla verilir:

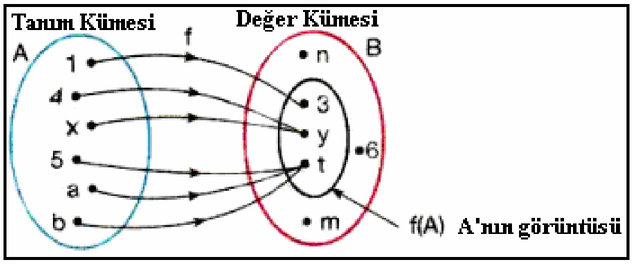
Tanım: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; A'nın her elemanını, B'nin yalnız bir elemanına eşleyen; A'dan B'ye bir f bağıntısına, A'dan B'ye fonksiyon denir.
A'dan B'ye tanımlı bir f fonksiyonu:

1. A'nın tüm elemanlarını, B'nin elemanlarına eşler.
2. A'nın her elemanını, B'nin yalnız bir elemanına eşler.

$x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere; A'dan B'ye bir f fonksiyonu, x'i y'ye eşliyorsa;
$f: A \rightarrow B$, $x \rightarrow y=f(x)$ biçiminde gösterilir.

Tablo 1 – Fonksiyon kavramının tanımı (Demiralp ve diğerleri, 2000).

Bu tanım matematiksel niceleyicileri ve sembolleri kullanmadığından "sözel tanım" olarak da adlandırılabilir. Bu tanım, görsel olarak küme eşlemesi diyagramı üzerinde aşağıdaki şekilde açıklanır.



Şekil 1. Fonksiyon tanımının görsel açıklaması (Demiralp ve diğerleri, 2000).

Tanımın bu şekilde verilmesinden sonra kavramın dört değişik temsili ile (küme eşlemesi diagramı, sıralı ikililer kümesi, denklemler ve grafikler ile) fonksiyon örnekleri verilir.

Literatür taraması

Fonksiyon kavramı matematik eğitiminde üzerine çok durulan bir konu olmuştur. Değişik araştırmacılar fonksiyon kavramına değişik kuramsal çatılar açısından yaklaşmışlardır. Bu kuramsal çatılardan ilki, Tall & Vinner (1981) ve Vinner (1983) tarafından ortaya atılan *kavram tanımı* (concept definition) ve *kavram görüntüsü* (concept image) ayrımıdır. Vinner (1983) kavram tanımını o kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan ve matematik camiası tarafından kabül gören ifadeler olarak açıklar. Öğrenciler her zaman tanımdan yola çıkarak muhakeme yapmazlar. Bu durumu açıklamak için Tall and Vinner (1981) *kavram görüntüsü* terimini kullanırlar. Kavram görüntüsü, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlardır. Vinner (1983) öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kavram görüntülerini incelemiştir ve öğrencilerin tek formülle verilen, düzgün bir grafiğe sahip fonksiyon görüntülerine sahip olduğunu bulmuştur. Öğrenciler, özel olarak öğretilmediği takdirde, parçalı fonksiyonları tek bir fonksiyon olarak kabul etmemişlerdir.

Kavram tanımı ve kavram görüntüsü ayrımını ortaya koyan bu kuramsal çatıdan sonra literatür iki yönde gelişmiştir. Bir taraftan, fonksiyon kavramının bir süreç ve zihinsel nesne olarak kavramsallaştırılması (Dubinsky, 1991; Breidenbach *ve diğerleri*, 1992; Sfard, 1992); diğer taraftan fonksiyonların çoğul temsilleri araştırılmıştır (Confrey, 1994; Kaput, 1992; Keller & Hirsch, 1998; Leinhardt *ve diğerleri*., 1990).

Çoğul temsillerle ilgili çalışmalar, özellikle bilgisayar ortamının aynı anda birçok temsile hızlı ve etkin şekilde ulaşma imkanı verdiğinden, temsiller arasındaki geçişlerle temsiller arası bağların kuvvetlendiğini ve dolayısıyla fonksiyonların kavramsal olarak öğrenilmesine katkıda bulunduğunu vurgular. Thompson (1994), bu çalışmalara eleştirel olarak bakar ve üzerinde dikkatle düşünülmesi gereken konunun "temsil" olgusu olduğunu söyler. Fonksiyon kavramının anlaşılmasını açıklamaya çalışan bu araştırmalar aslında fonksiyon kavramının özel bir durumunu incelemektedir, örneğin $y = ax + c$ sembolik temsili ve doğrusal fonksiyon grafikleri arasındaki bağların incelenmesi gibi. Thompson'a (1994) göre hiçbir temsil fonksiyon kavramını birebir temsil edemez ve çekirdek fonksiyon kavramı bütün temsillerden öte kavramın en genel soyut halidir. Thompson (1994) öğrencilerin bir temsilden diğerine geçerken sabit kalan birşeyin farkına varmadıklarını, aksine her temsili öğrenilecek bağımsız bir konu olarak gördüklerini iddia eder.

Kuramsal çatı

Bu çalışmanın kuramsal çatısının çıkış noktası Thompson'ın (1994) çekirdek fonksiyon kavramıdır. Thompson'ın çekirdek fonksiyon kavramı üzerine amprik bir araştırma yapılmamıştır. Bu nedenle bu çalışmada öğrencilerin fonksiyon konusunu anlamaları çekirdek fonksiyon kavramı ışığında ele alınacaktır. Çekirdek fonksiyon kavramının anlaşılması, bir temsilden diğer temsile geçildiğinde, sadece tanımsal özelliklere göre karar vermek olarak ifade edilebilir.

Yukarıda da belirtildiği gibi, müfredatta fonksiyon kavramının tanımı küme eşlemesi diyagramı üzerinde açıklanır. İddia şudur ki küme eşlemesi diyagramı fonksiyonun tanımsal özelliklerini en iyi şekilde temsil eden bir prototip olarak düşünülür. Diğer yandan, grafikler ve denklemler değişik zaman dilimlerinde ayrı alt başlıklar altında bağımsız konular olarak öğretilir. Örneğin lineer fonksiyon grafikleri, trigonometrik fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar, özel tanımlı fonksiyonlar ayrı konular olarak işlenir. Diğer bir deyişle, zihinde ayrı bölgelere bağımsız olarak depolanır ve bu yüzden soyutlama düzeyi düşük olacaktır. Yani öğrenciler grafik ve denklemlerde daha çok zorlanacaklardır. Buradan yola çıkarak, bu çalışmanın kuramsal çatısı, öğrencilerin farklı temsiller hakkında muhakeme yaparken tanımsal özellikleri kullanmadaki tutarlılıklarını çekirdek fonksiyonu anlamalarının bir göstergesi olarak kabul eder.

Araştırma soruları

Yukarıda açıklanan kuramsal çatı çerçevesinde aşağıda belirtilen araştırma soruları ortaya konmuştur:

1. Öğrenciler fonksiyonu tanımak için fonksiyon tanımını kullanıyorlar mı?
2. Öğrenciler tanımsal özellikleri herbir temsil için nasıl kullanıyorlar?
3. Öğrencilerin bütün temsiller için verdikleri cevaplar, bir temsilden diğer temsile geçerken temsiller arası farklardan nasıl etkileniyor?
4. Bu üç araştırma sorusu, çekirdek fonksiyonun anlaşılması açısından bize neler söyler? (Öğrencilerin bütün temsiller için verdikleri cevaplar tanımı kullanma açısından ne kadar tutarlıdır?).

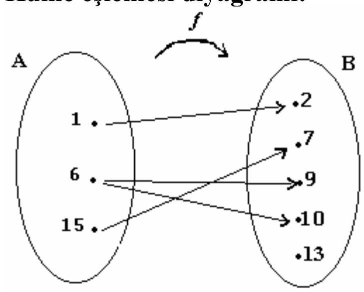
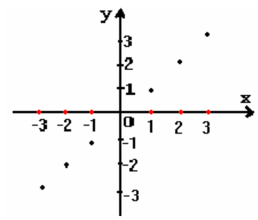
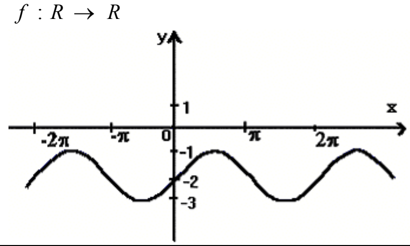
Yöntem ve veri toplama

Araştırma temel olarak nitelikseldir. Bunun sebebleri şu şekildedir. Öncelikle, bu araştırma, bir kavramın anlaşılmasını incelemektedir. Salt nicel veri toplama yöntemleri kavramsal anlamanın zenginliğini ortaya çıkaramaz. İkinci olarak, araştırma sorularından da anlaşılacağı gibi, ürüne değil sürece yoğunlaşmak gerekir. Bu süreç, öğrencilerin fonksiyonları tanırkenki muhakemeleridir. Bu da ancak sürece yoğunlaşan niteliksel bir yöntem ile ortaya çıkarılabilir. Üçüncü olarak da, araştırmada daha önceden kesin olarak belirlenmiş değişkenler olmamasıdır (Denzin ve Lincoln, 1994).

Örneklem: Araştırmanın populasyonunu, Adana'daki bir özel ve bir devlet okulundaki Matematik (40), Türkçe – Matematik (32) ve Sosyal (42) grubundaki 114 lise 3 öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğrencilere dağıtılan anketlerden elde edilen verilerin çözümlenmesi sonucu *teorik örnekleme* (Mason, 1996) yoluyla 9 öğrenci mülakat için seçilmiştir. Teorik örnekleme, Mason'ın da ifade ettiği gibi, araştırma sorularını temel alarak ve bir teoriyi test edip açıklamaya yardım edecek özellik ve ölçüleri geliştirmeye yönelik örneklem seçmektir. Anketlerde öğrencilerin farklı temsillere verdikleri cevaplar karşılaştırıldığında, öğrencilerin küme eşlemesi ve sıralı ikililer için tanımsal özelliklere göre karar vermede grafik ve denklemlere kıyasla daha başarılı oldukları görülmüştür. Bu nedenle, mülakat için öğrenci seçilirken bu sonucu destekleyen öğrenciler yanında bu sonucu desteklemeyen üç aykırı durum da seçilerek sonuçların tekrar edip etmediği test edilmiştir.

Veri toplama teknikleri: Temel veriler yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Niteliksel yöntemlerin yanısıra niceliksel veri toplama yöntemleri de kullanılmıştır. Bunun birinci sebebi, mülakatlar için öğrenci şeçmektir. Bunun için kapalı ve açık uçlu sorular içeren anketler kullanılmıştır. Niceliksel veri toplama tekniği kullanmanın ikinci sebeb ise, üçgenselleştirme için ikinci bir veri kaynağı elde etmektir. Anketlerde öğrencilere dört değişik temsilde örnekler (küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafikler ve denklemler) verilip bunların fonksiyon olup olmadığı ve nedenleri sorulmuştur.Ayrıca öğrencilerden fonksiyon kavramını tanımlamaları istenmiştir.

Mülakatlar yarı-yapılandırılmış olup öğrencilere iki tip soru sorulmuştur. İlk olarak küme eşlemesi diyagramları, sıralı ikili kümeleri, grafik ve denklem şeklinde örnekler gösterilip bunların fonksiyon olup olmadığı sorulmuştur (Akkoç, 2003). Bu yazıda, mülakatlarda öğrencilere sunulan temsillerden birkaçına yoğunlaşılacaktır. Bu örnekler aşağıda verilmiştir:

Küme eşlemesi diyagramı:	**Grafikler:**	**Denklemler:**
 **Sıralı ikili kümesi:** $A=\{1,2,3,4\}$ $f:A\rightarrow R$, $f=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,3)\}$	$f:\{-3,-2,-1,1,2,3\}\rightarrow R$  $f:R\rightarrow R$ 	• $f:R\rightarrow R$ $f(x)=\begin{cases}1, \text{ if } x^2-2x+1>0\\ 0, \text{ if } x^2-2x+1=0\\ -1, \text{ if } x^2-2x+1<0\end{cases}$ • $f:R\rightarrow R$ $f(x)=\sin x-2$

Tablo 2 – Mülakat soruları

İkinci olarak öğrencilere denklem formunda bir sabit fonksiyon verilip ($f(x)=5$), bu fonksiyonu diğer temsillere dönüştürmeleri, yani grafik, küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikili kümesi olarak ifade etmeleri istenmiştir. Dönüşüm sorusu olarak sabit bir fonksiyonun seçilmesinin nedeni, öğrencilerin sabit fonksiyon ile uğraşırken zorluk çekmeleridir (Akkoç & Tall, 2002).

Bu sorular bütün öğrencilere sorulmuş olup bu soruları takiben öğrencilerin düşünme süreçlerini anlamaya yönelik çeşitli sorular sorulmuştur. Mülakatlarda, klinik mülakat tekniğinin bazı özellikleri kullanılmıştır (Ginsburg, 2000). İlk olarak amaç, öğrencilerin düşünme sürecini anlamaya çalışmaktır. Bu yüzden “Bunu nasıl yaptın?”, “Nasıl düşündün?” ve “Neden?” gibi sorular sorulmuştur. İkinci olarak, sorular öğrenci merkezli bir açıdan sorulmuştur. Örneğin, “Bir grafiğin fonksiyon olup olmadığına *sen* nasıl karar verirsin?” gibi. Bu sebeble öğrencilerden, soruları cevaplarken yüksek sesle düşünmeleri ve cevaplarının nedenlerini açıklamaları istenmiştir.

Veri çözümlemesi

Veri çözümlemesinin amacı, araştırma sorularını cevaplamaya yönelik olarak herbir öğrencinin herbir temsil için tanımsal özellikleri kullanıp kullanmadığına bakmak, kullanmıyor ise bir temsilin fonksiyon olup olmadığını anlamak için nasıl karar verdiğini ortaya çıkarmaktır. Verilerin çözümlenmesi için mülakat transkriptleri tanımlayıcı özetler haline getirilmiştir. Bu özetler kullanılarak öğrencilerin herbir temsil için muhakeme biçimleri aşağıda belirtilen şekilde kodlanmıştır.

Sözel tanım (ST): Sözel tanımın kullanılması.	**Sözel tanımın yanlış kullanımı (STY)**: Sözel tanımın yanlış olarak hatırlanması ya da tanımın yanlış uygulanması.
Örneklem-temelli cevaplar (ÖTC): Daha önce deneyim edilmiş belirli örneklere dayanarak verilen cevaplar (Grafiğin sinüs grafiğine benzetilmesi gibi).	**Dikey çizgi testi (DÇT)**: Dikey çizgi testinin uygulanması (Grafiğin üzerine dikey çizgiler çizerek ve çizgilerin grafiği bir kere kestiğine bakılarak fonksiyon olduğuna karar verilmesi gibi).
Küme eşlemesi diyagramı (KED): Verilen fonksiyonun küme eşlemesi diyagramının çizilmesi.	**Grafik (GR)**: Verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.
Yanlış grafik (YGR): Verilen fonksiyonun grafiğinin yanlış olarak çizilmesi.	**Tanım kümesi-değer kümesi karmaşası (TDK)**: Tanım ve değer kümelerinin birbirine karıştırılması.
Diğer (DĞ): Diğer cevaplar.	Yanıt yok (---).

Tablo 3 – Öğrencilerin mülakattaki cevaplarının kodlanması

Öğrencilerin cevapları bu kodlar yardımıyla bir ızgarada tablo 4'deki şekilde ifade edilmiştir. Öğrencilerin başarısını karşılaştırmak için kodlamalarda renklendirmeler yapılmıştır. Geçerli bir cevap şekli olan sözel tanımın kullanımı (ST) koyu gri, sözel tanımın kullanımı ile birlikte faydalanılan diğer yöntemler bir ton açık gri (örneğin ST-DÇT) ve sözel tanımın yanlış kullanılması en açık gri tonda (STY) renklendirilmiştir. Koyu hücreler daha başarılı cevapları göstermektedir. Örneklem-temelli cevaplar kavramın özelliklerinden ziyade belirli örneklerin hatırlanmasına dayandığı için istenmeyen bir durumdur. Bu tür cevaplar da çizgili şekilde belirtilmiştir.

		Ali	Ahmet	Aysel[*]	Arif*	Belma[*]	Belgin	Cem	Deniz	Demet
KÜME EŞLEMESİ DİYAGRAMI		ST	ST	ST	ST	ST	ST	STY	ÖTC	ÖTC
SIRALI İKİLİ KÜMESİ		STY ST	ST KED	ST	ST KED	ST	---	STY	ÖTC	DĞ
GRAFİK	Doğrusal Noktalar	ST	ST	ST DÇT	ST	ÖTC	STY	DĞ	ÖTC	ÖTC
GRAFİK	$f: R \to R$ $f(x) = \sin x - 2$	ST	ST DÇT KED	ST	DĞ	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC	ÖTC
DENKLEM	İşaret fonksiyonu	ÖTC GR KED	ÖTC GR DÇT	ÖTC YGR	ÖTC	ÖTC	TDK	ÖTC	DĞ	DĞ
DENKLEM	$f: R \to R$ $f(x) = \sin x - 2$	ST	ÖTC ST	ST	DĞ	---	ÖTC	---	ÖTC	YGR
$f(x) = 5$ 'grafiğe dönüştürme		✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×
$f(x) = 5$ 'i küme eşlemesine dönüştürme		✓	✓	✓	✓	---	×	×	×	×
$f(x) = 5$ 'i sıralı ikili kümesine dönüştürme		✓	✓	✓	×	×	---	×	×	---

Tablo 4 Öğrenci cevaplarının ızgarası. Kısaltmalar: ST: Sözel Tanım; STY: Sözel Tanımın Yanlış Kullanılması; ÖTC: Örneklem Temelli Cevaplar; KED: Küme Eşlemesi Diyagramı; DÇT: Dikey Çizgi Testi; GR: Grafik; YGR: Yanlış Grafik; DĞ: Diğer; √: Doğru Dönüşüm; ×: Yanlış dönüşüm; ---: Cevap Yok

[*] Aysel, Arif ve Belma anket sonuçlarına dayanılarak aykırı durum olarak seçilen öğrencilerdir.

Bulgular

Tablo 4'te verilen ızgara, öğrencilerin çeşitli fonksiyon temsillerinde tanımsal özellikleri ne derece kullanabildiklerini ortaya çıkarmak açısından faydalı olmuştur. Birinci ve ikinci araştırma sorusuna yanıt olarak, öğrencilerin sözel tanımı, özellikle küme eşlemesi diyagramları ve sıralı ikili kümeleri için daha başarılı şekilde kullandıkları gözlemlenmiştir. Tabloda görüldüğü gibi altı öğrenci sözel tanımı küme eşlemesi diyagramı ve sıralı ikili kümeleri için kullanırken, sadece üç öğrenci (Ali, Ahmet ve Aysel) bütün temsiller için sözel tanımı kullanmıştır. Hatta bu üç öğrenci bile tanımı küme eşlemesi ve sıralı ikililer için daha başarılı bir şekilde kullanmıştır. Izgarada görüldüğü gibi Belma ve Belgin tanımı bu iki temsil için kullanırken diğer temsiller için kullanamamıştır. Yani, öğrenciler grafik ve denklem temsilleri için tanımı kullanmakta daha fazla zorlanmışlardır. Bu sonuç, anketlerde bu durumun tersini sergileyen aykırı durumlar (Aysel, Arif ve Belma) için de geçerli olmuştur.

Üçüncü araştırma sorusuna cevap aramak için, her öğrenciye ait sütuna dikey olarak bakıldığında öğrencilerin cevaplarının bir temsilden diğerine geçerken nasıl değiştiği görülebilir. Çoğu öğrenci tanımı ilk iki temsil için kullanırken, grafik ve denklemlere geçince daha karmaşık cevaplar vermişlerdir. En başarılı öğrenciler (Ali, Ahmet, Aysel, Arif) bile grafik ve denklemlere geçince tanımı direk kullanmamışlardır. Örneğin Ahmet, işaret fonksiyonunun denklem temsilini önce özel bir fonksiyon olarak algılamıştır. Diğer bir deyişle örneklem-temelli bir cevap vermiştir. Daha sonra bu fonksiyonun grafiğini çizerek grafiğe dikey çizgi testini uygulamıştır. Dikey çizgilerin grafiği bir kere kestiğini belirterek, doğru bir şekilde, fonksiyon olarak algılamıştır. Bu en başarılı üç öğrenci bile grafik ve denklemler için zaman zaman tanımı kullanmayarak sadece örneklem-temelli cevaplar vermişlerdir.

Dördüncü araştırma sorusuna yanıt bulmak için herbir öğrencinin cevaplarında tanımı kullanmaktaki tutarlılıklarına bakılmıştır. Ali, Ahmet, Aysel ve Arif grafik ve denklemlerde daha çok zorlanmalarına karşılık bütün temsiller için sözel tanımı kullanmışlardır[†]. Bu öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamaları çekirdek fonksiyon kavramına yakındır. Bununla birlikte Belma, Belgin ve Cem grafik ve denklemler için sözel tanımı kullanamamışlardır. Deniz ve Demet ise tanımı hiçbir temsil için kullanamamışlardır. Başka bir deyişle, çekirdek fonksiyon kavramını anlamaktan uzaktırlar.

Öğrencilerin sabit fonksiyon denklemini diğer temsillere dönüştürdükleri sorulara cevapları incelendiğinde ise, diğer sorulara en tutarlı cevap veren üç öğrencinin (Ali, Ahmet, Aysel) bu

[†]Esas çalışmada Arif denklemlerin birkaçı için de sözel tanımı kullanabilmiştir (Akkoç, 2003).

dönüşümleri de doğru olarak yaptıkları görülür. Tanımı kullanmakta zorlanan diğer öğrencilerin ise bu dönüşüm sorularına cevap veremedikleri tespit edilmiştir.

Sınırlamalar

Bu çalışmanın kuramsal çatısı, öğrencilerin farklı temsiller hakkında muhakeme yaparken tanımsal özellikleri kullanmadaki tutarlılıklarını çekirdek fonksiyonu anlamalarının bir göstergesi olarak kabul eder. Bu kabulün bazı sınırlamaları vardır. Çalışmanın örneklemini oluşturan lise 3 düzeyindeki öğrenciler sadece reel ve tek değişkenli fonksiyonları işlemiş olup, örneğin henüz iki değişkenli fonksiyonları ya da bir fonksiyon olan türevi işlememişlerdir. Yani öğrencilerin fonksiyonun en genel ve soyut hali olan çekirdek fonksiyon kavramını anlamalarını, sadece reel ve tek değişkenli fonksiyonları değerlendirerek ölçmüş bulunmaktayız.

Sonuç

Fonksiyon kavramı müfredatta her ne kadar tanım ile verilse de çok az öğrenci fonksiyonlar hakkında düşünürken tanımsal özellikleri dikkate alıyor. Bunun sebebi, tanımın konunun başında ifade edilmesinden öte öğrencilere tanımsal özellikleri düşündürecek örneklere yer verilmemesidir. Öğrencilere tanımsal özellikleri düşündürmek için aykırı örnekler sunulmalı ve öğrencilerin kavram görüntüleri zenginleştirilmelidir. Diğer önemli bir husus da fonksiyonların çoğul temsilleri arasındaki bağların kuvvetlendirilmesi gereğiyle ilgilidir. Lise müfredatında fonksiyon grafiklerinin çizimi üzerinde durularak grafik ve denklem temsilleri arasındaki bağ gözönüne alınmaktadır. Fakat, tahta ve defter üzerinde çizilen temsiller bu konuda yeterli olmayabilir. Çünkü bu tür çizimler temsiller arası bağlardan ziyade belli algoritmalarla öğretilen grafik çizme sürecine yoğunlaşmaktadır. Oysa ki grafik çizen bilgisayar yazılımlarının hızlı ve etkin temsil dönüşümü yapabilme kapasitesi kullanılarak, öğrencilerin zihinlerinde temsiller arasında daha kuvvetli bağlar oluşturulabilir (Confrey, 1994; Kaput, 1992).

Kaynakça

Akkoç, H. & Tall, D.O. (2002). The Simplicity, Complexity and Complications of the Function Concept. In *Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, UK, Vol. 2, pp. 25-32.

Akkoç, H. (2003). The Students' Understanding of the Core Concept of Function. *Unpublished EdD Thesis*, University of Warwick, UK.

Bakar, M. N. & Tall, D. O. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 23, No. 1, pp. 39-50.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.23, No.3, pp. 247-285.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra, *American Educational Research Journal*, Vol. 34, No. 4, pp. 663-689.

Bruckheimer, M., Eylon, B., & Markovits, Z. (1986). Functions Today and Yesterday, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 6, No. 2, pp. 18-24.

Confrey, J. (1994). Six Approaches to Transformation of Function Using Multi-Representational Software. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon, Portugal, Vol. 2, pp. 217-224.

DeMarois, P. & Tall, D.O. (1999). Function: Organizing Principle or Cognitive Root?. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa, Israel, Vol.2, pp. 257-264.

Demiralp, A., Gürkan, M. & Pelit, T. (2000). *Matematik Lise 1 – Ders Kitabı*. Ankara: Başarı Yayınları.

Denzin, N.K. & Lincoln, Y.S. (1994). Strategies of Inquiry. In N.K. Denzin and Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage, pp. 199-208.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

Ginsburg, P. H. (1997). *Entering the Child's Mind: The Clinical Interview in Psychological Research and Practice*, Cambridge University Press.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. A. Grouws (Ed) *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 515-556.

Keller, B.A. & Hirsch, C. R. (1998). Student Preferences for Representations of Functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* Vol. 29, No.1, pp. 1-17.

Kieran, C. (1994). A Functional Approach to the Introduction of Algebra – Some Pros and Cons. In *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 157-175.

Leinhardt, G., Stein, M.K., & Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, Vol. 60, No. 1, pp. 1-64.

Malik, M A. (1980). Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, Vol. 11, No. 4, pp. 489-92.

Mason, J. (1996). *Qualitative Researching*. London: Sage.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 1, pp. 21-40.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA, pp. 59-84.

Tall, D.O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, pp. 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, pp. 21–44.

Vinner, S. (1983). Concept Definition Concept Image and the Notion of Function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 14, No. 3, pp. 293-305.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. In G. Harel, & E. Dubinsky, (Eds) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA, pp. 195-213.

Understanding of the Function Concept: Definitional Properties and Multiple Representations

Summary

This study investigates grade 11 students' understanding of the function concept which is one of the most important concepts in mathematics. In the Turkish context, the topic of function is introduced with a colloquial definition in grade 11 (17 year-old students). To investigate grade 11 students' understanding of the function concept, the theoretical framework is based on the relationship between multiple representations and the use of the definition of function. Research indicates that students rarely use the definition when they think about a concept (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983). Research on multiple representations of functions assumed that if students could link various representations (especially with the help of computers and graphical calculators) they would have a better understanding of the function concept (Confrey, 1994; Kaput, 1992; Keller & Hirsch, 1998; Leinhardt *ve diğerleri*., 1990).

Thompson (1994) makes a distinction between multiple representations of functions and the core concept of function. The core concept of function is the most general and abstract form of the concept and cannot be represented by any specific representation. He claims that students see each representation as a topic to be learnt in isolation. Therefore, in this study, the coherency in recognizing different representations of functions correctly with a strong focus on the definitional properties is considered as an indication of an understanding the core concept of function.

This study is mainly qualitative and the main data is obtained from the semi-structured interviews with 9 students in grade 11 in two high schools in Adana, Turkey. These 9 students were selected among 114 grade 11 students in three different subjects groups (40 students from Mathematics, 32 students from Turkish and Mathematics and 42 from Social subject groups) based on the theoretical sampling. As Mason (1996) asserts theoretical sampling means that selecting a sample on the basis of their relevance to the research problem and theoretical positions to be able to build on certain characteristics which help to develop and test the theory. Questionnaires were administered to 114 students and they were asked to reason about various representations. The results revealed that the students were more successful with certain representations, set correspondence diagrams and sets of ordered pairs, compared to graphs and expressions. Therefore,

when selecting students for the interviews, three deviant cases which do not support the questionnaire results were also included in the sample to be be able to test the theory.

In the interviews, students were asked to decide whether the given representations are functions or not and they were also asked to transform a constant function to its other representations. A grid is prepared to analyze how each student reason about each representation and to compare students' success in using the definition for various representations of functions.

The analysis of the interviews indicates that students' responses differ in the use of the definitional properties for various representations. Students were more successful in using the properties of the definition for set correspondence diagrams and sets of ordered pairs compared to the graphs and expressions. Furthermore, students who can use the definitional properties for all representations can do transformations from one representation to the other more successfully. Three students coherently used the definitional properties for all representations. In other words, reponses from these students were closer to an understanding of the core concept function.