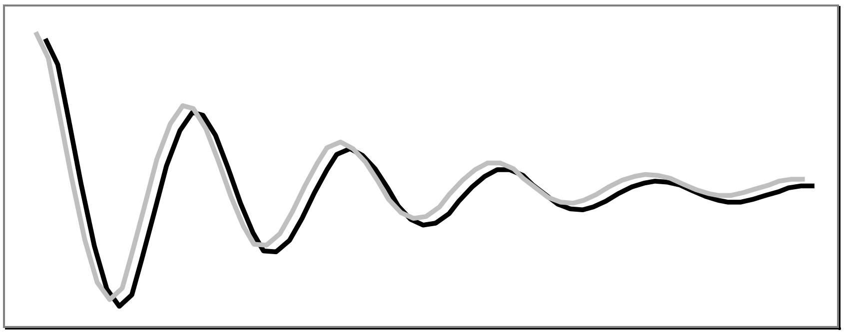
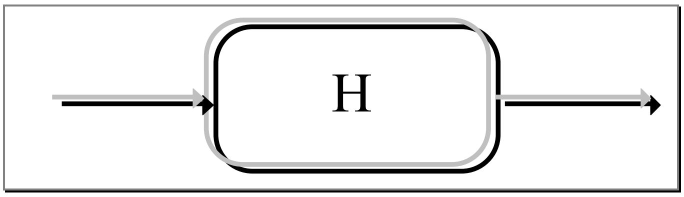


İşaretler ve Sistemler



Murat Doğruel

Bu kitap taslağı Hava Harp Okulunda 1996 yılında yazılmaya başlanılmış fakat tamamlanamamıştır.

İ Ç İ N D E K İ L E R

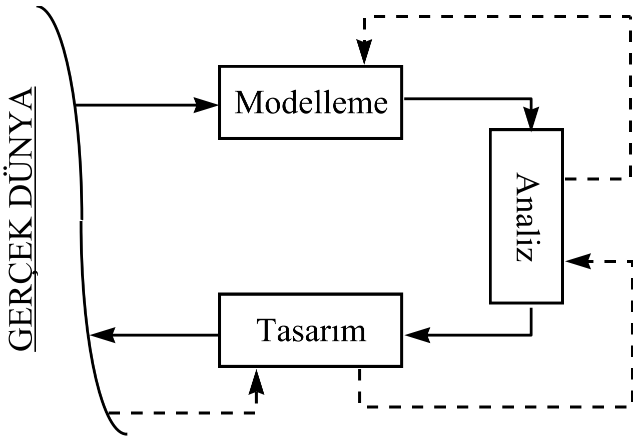
1. İŞARETLER VE SİSTEMLERE GİRİŞ

1

İşaretler ve sistemler teorisi özellikle mühendislikte çok kullanılmakta fakat diğer birçok bilim dallarında da karşımıza çıkmaktadır. Örneğin bir ekonomik sistemdeki olaylar ve parametreler çeşitli işaretlerle ifade edilebilir ve ekonomik sistemin trendlerine göre gelecek ekonomik durum hakkında bilimsel tahminler yapılabilir. Fiziksel olay ve sistemlere de sistem teorisi bakış açısı ile baktığımızda bir genelleme ve ortak özellik bulma yoluna girmiş oluruz. Zaten bilimin bir amacı da doğadaki olaylarda ortak bir yön bulma ve bunları yaklaşımlar yaparak formüllendirme yani matematiksel dile dökmektir. Bu da modern anlamda sistem teorisi ile mümkün olmaktadır. Sistemler birleşerek yeni bir sistem oluşturuyor ise bu yeni sisteme de tek bir sistem gözüyle bakabiliriz. Böylece birbirleri ile çeşitli şekilde ilişkilenmiş olan sistem topluluklarını da tek bir sistemmiş gibi görüp, oluşturduğumuz teoriyi bunlar için de kullanabiliriz. Ayrıca fiziksel özellikleri değişik olan bir sistem topluluğu da bir kere matematiksel dile tercüme edildiğinde bir sistemin aynı özellikteki bloklarıymış gibi düşünülebilir. Örneğin motorlar, elektrik devreleri, pompalar içeren bir fiziksel sistem blok diagramlar halinde gösterilebilir. Bu blokların matematiksel dilde ne iş gördükleri bulunabilir. Daha sonra bu blokların bağlantı şeması ortaya çıkarılabilir. Sistem teorisindeki analiz yöntemleri kullanılarak sistemin davranışı bulunabilir. Sistemin istenilen şekilde davranması için kontrol edici bir sistemin sentezi yapılabilir. Böylece fiziksel dünya da istenilen gerçekleştirilmiş olur.

Bu bölümde işaret ve sistemlere genel bir giriş yapıp bunların çeşitlerini ve özelliklerini tanıyacağız. Fiziksel sistemlerin matematiksel modellemeleri hakkında bilgi vereceğiz.

Yaşadığımız dünya veya daha geniş kapsamda evren içerisinde tam olarak bilemediğimiz çeşitli ve baş döndürücü yapılar bulunmaktadır. Bilim bu muammalar ile dolu uzayda bir yol bulmaya ve evreni modelleyerek formülize etmeye çalışmaktadır. Böylece evrende çalışan sistemlerin nasıl çalıştığı anlaşılıp ona göre insanın istediği yönlerde kullanılması mümkün olabilir. Mühendisliğin de asıl amacı budur. Mühendislik çalışma metodu aşağıdaki şekildeki gibi verilebilir.



Şekil 1.1 Mühendislik metodolojisi.

Gerçek (ya da fiziksel) dünya da çeşitli sistemler mevcuttur. Bizim amacımız ilgilendiğimiz sistemin istediğimiz şekilde davranış göstermesidir. Bu amaçla mühendislikte ilk önce yapılan iş, gerçek dünyanın ilgilendiğimiz bir bölümünün çeşitli gözlem ve deneylerle matematiksel dünyaya taşınması yani modellemedir (modelling). Burada şimdiye kadar tanımladığımız matematiksel araçlardan yararlanılır. Örneğin bir motor mekanik ve elektrik devre elemanlarının bir bütünü olarak tanımlanabilir. Buradaki devre elemanlarının matematiksel özellikleri yaklaşımlar yapılarak ortaya çıkarılır. Böylece gerçek dünya daki olgular sistemler bir tür matematiksel dünyaya yansıtılmış olur. Ayrıca gerçek dünya daki amaçlarımız da matematiksel dile dökülür. Bu, mesela bir motorun hızının belli bir seviyede tutulması, atılan bir füzenin hedefini vurması ya da bir noktadan diğerine en optimal şekilde gidilmesi olabilir.

Daha sonra bilinen analiz yöntemleri kullanılarak sistemin ne şekilde davranış gösterebileceği hesaplanabilir (analysis). Burada elde edilen sonuçlar bir yaklaşımdan ibarettir çünkü gerçek dünyanın tam bir matematiksel modeli elde edilmemiştir ve edildiğinden de emin olunamaz. Mesela yere atılan bir cismin sabit ivme ile düşeceği varsayımı bir matematiksel modeldir. Burada analiz yöntemleri kullanılarak cismin düşüş uzaklığının zamanın karesi ile doğru orantılı olarak değişeceği bulunur. Fakat kullanılan varsayımın hiçbir garantisi yoktur. Mesela havanın direnci de hesaba katıldığında ilgili sonucun yanlış olacağı görülür. Bundan daha da ilginci zamanla fiziksel dünya değişebilir ve eskisine uymayabilir. Bundan dolayı modelleme bir yaklaşımdan ve varsayımdan ibarettir. Bu yüzden de analiz yöntemlerinin sonuçlarına kesin gözü ile bakılmamalıdır çünkü bütün bu sonuçlar bir varsayım tabanı üzerinde durmaktadırlar. Fakat gözlenmektedir ki fazla karmaşık olmayan yaklaşık modeller kullanılarak fiziksel dünya daki birçok sistem yeterince iyi temsil edilebilmektedir. Böylece analiz yöntemlerinin sonuçlarına da çoğu kez güvenilebilir.

Gerekli analiz yöntemleri geliştirilip uygulandıktan sonra istenilen işi gerçekleştirecek sistemin kurulması ya da geliştirilmesi tasarım aşamasında yapılır (design). Burada yine fiziksel dünya da geliştirilen çeşitli eleman ya da sistemlerden yararlanılır. İstenilen amacın gerçekleşip gerçekleşmediği test edilir. Eğer amaç tam istendiği şekilde gerçekleşmemiş ise önce tasarımın geliştirilmesi yoluna gidilir. Bu Şekil 1.1'de kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Bu yeterli olmuyorsa analiz yöntemi geliştirilerek daha üstün bir tasarıma ulaşabilmek için taban hazırlanır. Bu da yeterli değilse gerçek dünyaya daha fazla uyum sağlamak amacı ile modellemenin daha ayrıntılı hale getirilmesi gerekebilir. Örneğin elektrik motorundaki sarımların direnci ihmal edilerek bir modelleme yapılmış fakat istenilen sonuç alınmamışsa buradaki direnç de modellenerek daha iyi bir sonuç alınabilir. Ya da bir sistemin daha yüksek frekanslar için davranışı modellemeye katılarak daha hassas bir modelleme ve buna bağlı olarak daha iyi bir çıkış elde edilebilir.

1.1 İşaretler ve Özellikleri

Özellikle elektronik, haberleşme ve kontrol mühendisliklerinde işaret (signal) denilince, ele alınan zamanın bir fonksiyonu akla gelir. Burada fonksiyonun aldığı değer çeşitli bir birimde olabilir. Örneğin bir devredeki kapasitenin akımı, bir motor milinin hızı veya bir ekonomik sistemdeki enflasyon oranı zamanın bir fonksiyonudur. Bunun gibi sistemlerdeki çeşitli büyüklüklerin zamana göre değişimlerine *işaret* denir. Matematiksel olarak, ele alınan işaretin biriminden ziyade büyüklük olarak değerinin önemi vardır. Fiziksel dünya da ise ele alınan birim sistemi veya işaret değerinin birimi, o işaretin hangi referans büyüklüklerle karşılaştırılarak elde edildiğini gösterir.

1.1.1 İşaret tanımları ve çeşitleri

Bilindiği gibi *bağıntı* (relation) iki kümenin *kartezyen çarpımı*nın (cartesian product) bir alt kümesi olarak ifade edilebilir. Burada kümeler istendiği şekilde ve büyüklükte olabilir. Matematiksel ifade ile

$$A \times B = \{ \ (x,y) \ | \ x \in A, \ y \in B \ \}, \qquad R \subset A \times B \, .$$

$A \times B$, A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı ve R bunun bir alt kümesi olan bir bağıntıdır. Bağıntılar A ve B küme elemanları arasındaki ilişkileri gösterir. Örneğin A ve B kümeleri gerçel sayılar kümesi olarak seçilirse ($A = B = \mathbb{R}$)

$$R_1 = \{ \ (x,y) \ | \ x - y^2 = 0 \ \}$$

bir bağıntıyı gösterir. Fonksiyon tanımında ise bir tanım (domain) bir de değer (range) bölgesi vardır. Fonksiyon bu tanım ve değer kümelerinin kartezyen çarpımının özel bir alt kümesidir yani özel bir bağıntıdır. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanım kümesindeki her elemanın bağıntıda kullanılmış olması ve tanım kümesindeki her bir elemanın değer kümesinde sadece bir eleman ile ilişkilendirilmiş olması gerekir. Yani fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlayan bir bağıntıdır:

a) $\forall \ a \in A \ \exists \ b \in B \ \ni \ (a,b) \in R,$
b) $\forall \ a \in A, b_1 , b_2 \in B, \ (a,b_1) \in R \ \Lambda \ (a,b_2) \in R \ \Rightarrow \ b_1 = b_2 \, .$

Buna göre yukarıda tanımlanan R_1 bir fonksiyon değildir çünkü tanım kümesindeki x=1 elemanı değer kümesinde y =1 ve y=-1 ile ilişkilendirilmiş ve yukarıdaki (b) maddesine aykırı düşülmüştür. Burada tanım ve değer kümeleri yer değiştirilerek tanımlansa R_1 bir fonksiyon olacaktır. Görüldüğü gibi fonksiyonda tanım kümesindeki birçok eleman değer kümesinde aynı bir eleman ile ilişkilendirilebilir fakat bunun tersi fonksiyon olabilmesi açısından mümkün değildir.

İşaretler çoğunlukla zamanın fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Yani işaretlerde tanım kümesi genelde zamandır. Bu şekilde, bir sistemdeki büyüklüğün zamana göre değişimi gösterilebilir. Tanım ve değer kümesinin özelliğine göre işaretler sınıflandırılabilir. Bilindiği gibi sayılabilir (countable) ve sayılamaz (uncountable) diye iki küme çeşidi vardır. Sayılabilir kümeye örnek olarak tam sayılar veya onun alt kümeleri verilebilir. Burada küme eleman sayısı sonlu veya sonsuz olabilir. Bu tip kümelere elemanları birbirinden ayrık olduğundan ayrık değer alan küme diyebiliriz. Sayılamaz kümelere örnek olarak da gerçel sayıları verebiliriz. Bunlara da sürekli değer alan kümeler denebilir. Böylece tanım ve değer kümelerinin ayrık ya da sürekli oluşuna göre dört sınıf işaret ortaya çıkar. Zamanın sürekli (continuous) ya da ayrık (discrete) olması ve işaret değerinin ayrık (kuantalanmış) ya da sürekli (analog) olmasına göre: sürekli zaman analog, sürekli zaman kuantalanmış, ayrık zaman analog ve ayrık zaman kuantalanmış işaret çeşitleri ortaya çıkar. Sürekli zamanlı işaretler s(t), ayrık zamanlı işaretler ise s[n] şeklinde gösterilecektir. Burada s[n] bir sayılar dizisi (discrete time sequence) olarak da anılabilir.

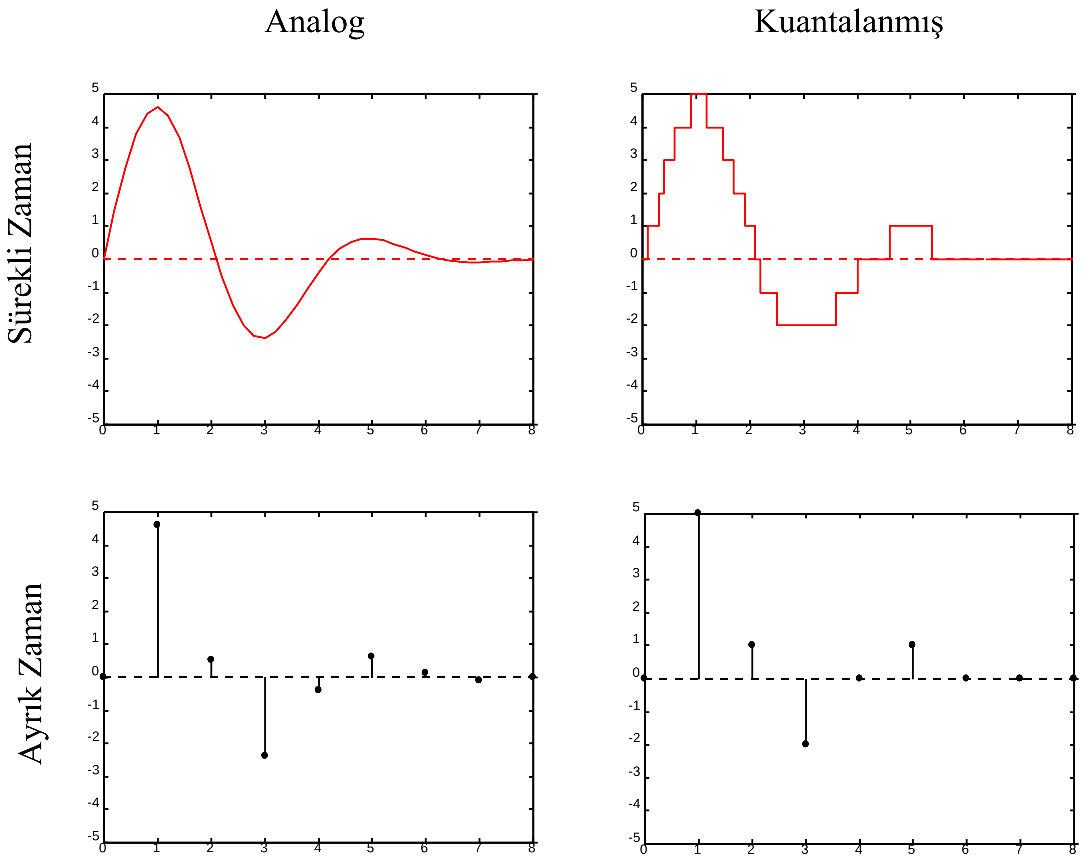
Aslında fiziksel dünya da bilebildiğimiz kadarıyla işaretler sürekli zamanda ve analogdur. Fakat biz işaretimizin yanlızca bazı periyodik anlardaki değerleriyle ilgileniyorsak ve bu anlarda sisteme müdahele ediyorsak, sistemimizi ve işaretleri sanki ayrık zamanda çalışıyormuş gibi görebiliriz. Örneğin bir bilgisayar yardımıyla işaret işleme yapıldığında çalışma frekansına bağlı olarak ancak ayrık zamanlarda işaret değiştirilebilir. Aradaki zamanlar o işareti işlemek ve bir sonraki değeri elde etmek için harcanır. Böylece işaretimiz önceden belirlenen ayrık bir zamanda tanımlıymış gibi düşünülebilir. Aksi halde o zaman aralıklarında işaretin nasıl değiştiğini hesaplamak hem güç olabilir hem de bizim için o kadar gerekli olmayabilir. Ayrık zamanda tanımlanan işaretler bu şekilde düşünülerek ortaya atılmıştır.

İşaret değerinin ayrık ya da sürekli olması da işaretin herhangi bir sürekli değeri alması ya da yanlızca önceden tanımlanan bazı değerleri alabilmesine göre değişir. Değer kümesi sürekli ise analog, ayrık ise kuantalanmış işaret denilir. Bir elektrik devresindeki kapasitenin gerilimi sürekli değer alabilir. Yani buradaki gerilim işareti (sürekli zaman) analogdur. Bir bilgisayar ya da lojik devredeki işaretler ise aslında sürekli değer aldığı halde yanlızca 0 ve 1 seviyelerindeymiş gibi kuantalanmış olarak düşünülebilir. Bu da istenilen basitliği sağlamış olur. Kuantalanmış işaretler sürekli değer alan analog işaretlerin belli kuanta seviyelerine karşılık düşürülmesi ile de elde edilebilir.

Tanım (A) ve değer (B) kümesinin çeşitli şekillerde olabileceğini söylemiştik. Gerçel sayılar ($\mathbb{R}$) ve tam sayılar (Z) kümeleri ele alındığında aşağıdaki durumlara göre işaret ilgili sınıfta bulunacaktır:

$A = \mathbb{R} \Rightarrow$ Sürekli Zaman İşareti, $\quad A = \mathrm{Z} \Rightarrow$ Ayrık Zaman İşareti,
$B = \mathbb{R} \Rightarrow$ Analog İşaret, $\quad B = \mathrm{Z} \Rightarrow$ Kuantalanmış İşaret.

Sözü edilen dört sınıf işaret türüne örnekler Şekil 1.2'de verilmiştir.



Şekil 1.2 Dört ana işaret sınıfından birer örnek.

İşaretler ayrıca *belirli* (deterministic) ve *rastgele* (random) olarak da sınıflandırılabilirler. Belirli bir işaret yukarıda bahsedildiği gibi zamanın belirli bir fonksiyonudur. Örneğin $s(t)=ke^{-t}$ (k belirli) işareti belirli bir işarettir. Burada k sayısı rasgele bir değişken ise işaret de rasgele olur. Böylece rasgele işaretler bir belirli işaretler kümesi olarak düşünülebilir. Uygulamada gerçekleşen bunlardan birisidir fakat önceden hangisinin gerçekleşeceğini bilemeyiz. Bu tür rasgele işaretler sistemlerdeki gürültünün modellenmesinde ya da sistemin belirli bir kısmının modellenmesinin güç olduğu durumlarda kullanılabilir.

Bilindiği gibi bir sinyal s(t) verildiğinde, s(-t) o sinyalin dikey eksen etrafında ters çevirilmişidir. Bu ve aşağıda verilen diğer tanımlar ayrık zamanlı işaretler için de geçerlidir. s(kt), eğer k 1'den büyük ise, s(t) işaretinin dikey eksene doğru k oranında sıkıştırılmışı; eğer k 1'den küçük ise, dikey eksenden itibaren k oranında açılmışı olur. Buna örnek şöyle verilebilir: s(2t) işaretinin t=1'de aldığı değer s(t) işaretinin t=2'de aldığı değer ile aynıdır.Bu yüzden s(2t) s(t)'nin sıkıştırılmış hali olacaktır. Ayrık zamanda ise s[kn] yanlızca k'nın tam sayı olması ile mümkündür aksi halde işaret tanımlı olmaz. Örneğin s[2n] s[n]'in sıkıştırılmışıdır ve yanlızca n'in çift sayılı değerlerinin alınması ile oluşturulmuştur, tek sayılı değerleri ise s[2n] işaretinde mevcut değildir (yani o bilgi artık kaybolmuştur).

s(t-k) işareti, eğer k pozitif bir sayı ise, s(t) işaretinin k kadar sağa ötelenmişi; eğer negatif ise, o miktarda sola ötelenmişidir. s(t-1) işareti s(t)'nin 1 birim sağa ötelenmişidir çünkü örneğin s(t)'nin t=0'da aldığı değeri s(t-1) t=1'de almaktadır.

s(at+b) işaretini önce s(a(t+b/a)) olarak düşünürsek, bu işaret s(t) işaretinin a kat sıkıştırılmışı (ya da a 1 den küçük ise açılmışı) ve daha sonra orijin noktasının -b/a noktasına kaydırılmışıdır.

Bir işaret eğer s(t)=s(-t) özelliğini bütün tanımlı t değerleri için sağlıyorsa bu tür işaretlere (veya fonksiyonlara) *çift işaret (fonksiyon)* denir. Böyle bir işaret dikey eksene göre simetrik olacaktır. Eğer işaret s(-t)=-s(t) özelliğini sağlıyor ise *tek işaret (fonksiyon)* denir. Bir tek işaret orijin noktasına göre simetrik olur çünkü işaretin t noktasında aldığı değerin negatifini -t noktasında da alacaktır. Aynı zamanda tek bir işaret t=0 noktasında s(0)=0 olmalıdır aksi halde s(-0)=-s(0) olmaz. Örnek olarak s(t)=Acos(ωt) çift, s(t)=Asin(ωt) tek bir fonksiyondur. Herhangi bir işaret bir tek bir de çift işaretin toplamı olarak yazılabilir. Bunun için işaretin tek ve çift kısımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathit{Çift}\{s(t)\} = (s(t) + s(-t))/2, \quad \mathit{Tek}\{s(t)\} = (s(t) - s(-t))/2 .$$

Görüldüğü gibi *Çift*{s(t)}= *Çift*{s(-t)} yani gerçekten çift, *Tek*{s(t)}=- *Tek*{s(-t)} yani gerçekten tek işarettir. Ayrıca s(t) = *Çift*{s(t)} + *Tek*{s(t)} olduğundan işaret tek ve çift birer işaretin toplamı olarak yazılmıştır. Çift bir işaretin çift kısmı kendisi, tek kısmı 0'dır; tek bir işaretin de tek kısmı kendisi, çift kısmı 0'dır. Ayrıca, herhangi iki çift fonksiyonunun toplamları ya da çarpımları da çifttir. İki tek fonksiyonun toplamları tek, çarpımları çifttir (neden?).

İşaret zaman içerisinde sürekli tekrarlanıyor ise buna *periyodik* (periodic) işaret adı verilir. Bir s(t) işaretinin periyodik olabilmesi için şart belirli bir T sayısı ve bütün tanımlı t değerleri için s(t+T)=s(t) olmasıdır. Böylece T anı sonrasında işaret yine aynı değeri alacaktır ve bu böyle tekrarlanarak gidecektir. Burada T'ye periyod denir. s(t+2T) = s(t+T) = s(t) olduğundan 2T (ve T'nin katları) da aynı işaret için periyod olmuş olur. *Temel periyod* ise en küçük pozitif periyod değerine denir. s(t) = 1 gibi sabit işaretlerde temel periyod tanımlanmamıştır. Periyod denilince önce anlaşılması gereken genellikle temel periyoddur. Örneğin s(t)=A cos(2πf t) işaretinin temel periyodu T=1/f dir. Burada T'nin tersi olan f'e *frekans*, w=2πf'e *açısal frekans* denir.

Bir işaretin *ani gücü* (*P*) ve belli bir zaman aralığındaki *enerjisi* (*E*) aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

Sürekli Zamanda : $P = |s(t)|^2$, $E = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 \, dt$

Ayrık Zamanda : $P = |s[n]|^2$, $E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |s[n]|^2$

Burada kare alma işleminden önce mutlak değer almanın sebebi işaretin kompleks değerli olabileceğinden dolayıdır. Bir işaretin gücü ya da enerjisi her zaman pozitif bir sayı değeridir. Eğer işaretin toplam enerjisi ((-∞,∞) aralığında) sonlu ise bu tür işaretlere *enerji işareti* denir. Örneğin s(t)=sin(t)/t işareti enerji işareti fakat s(t)=sin(t) işareti enerji işareti değildir (neden?).

Bir işaretin bir zaman aralığındaki *ortalama gücü* o aralıktaki enerjisinin ilgili zaman aralığı miktarına bölünmesiyle bulunabilir:

$$P_{ort} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\, dt, \qquad P_{ort} = \frac{1}{n_2 - n_1}\sum_{n=n_1}^{n_2} |s[\mathrm{n}]|^2 .$$

Bir işaretin *güç işareti* olarak tanımlanması için (-∞,∞) aralığındaki ortalama gücünün sonlu olması lazımdır. Bunu hesap etmek için aşağıdaki limit kullanılabilir:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt < \infty, \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} |s[n]|^2 < \infty .$$

Örneğin s(t)=sin(t) işareti bir güç işareti fakat s(t)=e^{-t}sin(t) işareti bir güç işareti değildir. Periyodik işaretlerde, bir periyodunda sonlu enerji olan işaretler güç işaretidir. Bir periyodunda sıfırdan farklı enerji taşıyan t∈(-∞,∞) aralığında tanımlı işaretler enerji işareti değildir (neden?).

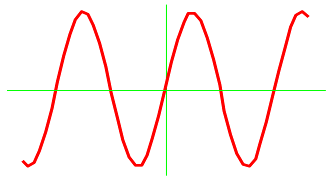
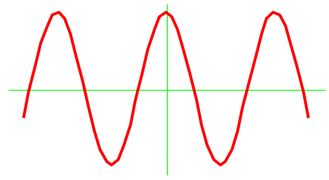
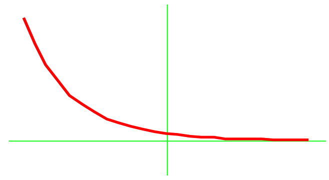
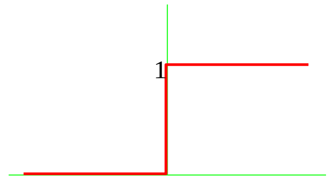
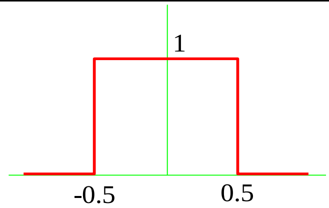
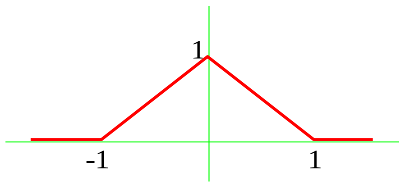
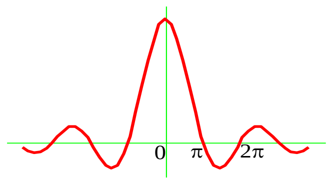
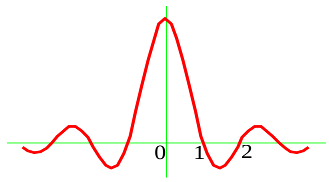
1.2 Bazı temel işaretler

Fiziksel dünya da karşımıza çıkan işaretler aslında belli bir dönemde ortaya çıkan işaretlerdir. Biz teorik olarak olaya baktığımızda bunları t∈(-∞,∞) aralığında tanımlı gibi düşünebiliriz. Bu da bize teorik hesaplamalarda kolaylık sağlar. Genelde bir sistemin çıkış işaretini hesaplayabilmek için o sisteme şimdiye kadar verilen bütün işaret geçmişini bilmeye ihtiyaç vardır. Fakat pratikte sistem belli bir noktada ‘doğduğundan’ bütün geçmişi değilde bize istenilen sonucu yeterince yakın verebilecek kadarki geçmişi yeterli olur. Kolaylık açısından ve teorik anlamda biz işaretimizi negatif sonsuzdan itibaren ‘varmış’ ve ‘var olacakmış’ gibi düşünebiliriz. Orijin noktası olan t=0 ise yeri (yani zamanı) kesin belli, birileri tarafından karar verilmiş bir nokta değildir. Bizim isteğimiz doğrultusunda düşündüğümüz zamanda bir referans noktasıdır.

Fiziksel dünya da ortaya çıkan işaretleri de kesin olarak tam ifade etmemiz hesaplama açısından zor olabilir. Bunun yerine kullandığımızda hemen hemen aynı sonucu verecek fakat hesaplamalarımızı oldukça kolaylaştıracak olan işaret türlerini seçebiliriz. Örneğin aslında doğada fiziksel büyüklükler ani olarak sıçrama şeklinde değişmezler. Fakat o sıçrama anı yeterince küçükse biz onu bir süreksiz fonksiyonmuş gibi modelleyebiliriz. Bu da bizi o sıçrama anının nasıl değiştiğini bulmaktan kurtarır ve hesaplamalarımızda kolaylık sağlar.

Aşağıdaki tabloda çok kullanılan temel işaretetler verilmiştir:

Tablo 1.1 Bazı temel işaretler

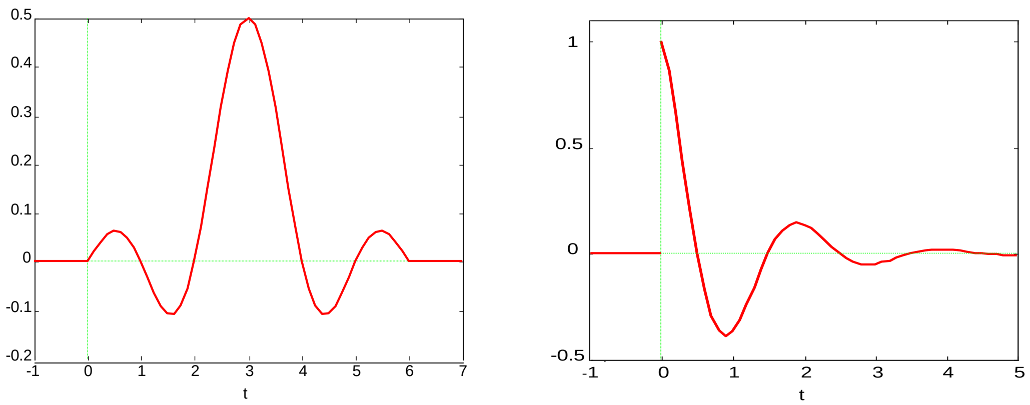
İşaret Tanımı		
Sürekli Zaman s(t)	Ayrık Zaman s[n]	Sürekli Zaman Grafiği
<u>Sinüs:</u> $A \sin(\omega t)$	$A \sin(\Omega n)$	
<u>Kosinüs:</u> $A \cos(\omega t)$	$A \cos(\Omega n)$	
<u>Üstel:</u> $A\, e^{-at}$	$A\, e^{-an}$	
<u>Birim Basamak:</u> $\upsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\upsilon[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	
<u>Dikdörtgen:</u> $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$		
<u>Üçgen:</u> $\Lambda(t) = \begin{cases} 1-\lvert t \rvert, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$		
<u>Sa:</u> $Sa(t) = \sin(t)/t$	$Sa(n) = \sin(n)/n$	
<u>Sinc:</u> $\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$	$\mathrm{sinc}(n) = \sin(\pi n)/(\pi n)$	

Yukarıda tabloda tanımlanan birim basamak (unit step) fonksiyonu $\upsilon(t)$ bir çok yerde karşımıza çıkmaktadır. Böyle bir fonksiyon mesela bir motorun hızını sıfırdan belli bir seviyeye çıkarmak ve orada tutmak istediğimizde istenilen çıkış fonksiyonu olarak kullanılabilir. Birim basamak fonksiyonu u(t) olarak da gösterilebilir fakat biz bunun ileride kullanacağımız genel sistem giriş işareti değişkeni u(t) ile karışmaması için $\upsilon(t)$ olarak göstereceğiz.

Dikdörtgen işareti ise birim enerjili bir işarettir. Örneğin bu işaret ötelenerek ve başka bir işaretle çarpılarak o işaretin yanlızca ilgilendiğimiz kısmını elde etmekte kullanılabilir. Dikkat edilirse dikdörtgen işareti, birim basamak işareti cinsinden aşağıdaki şekilde de yazılabilir (neden?):

$$\mathrm{rect}(t) = \upsilon(t+0.5)\cdot \upsilon(-t+0.5).$$

Sinc ve Sa fonksiyonları aslında birbirine benzer işaretlerdir. Sinc(t)=Sa(πt) dir. Çeşitli yayınlarda bunlardan yanlızca birinin kullanılması tercih edilmiştir. Biz kolaylık açısından ikisini de kullanacağız. Sinc ve Sa fonksiyonlarının t=0'da limiti hesaplanacak olursa bunun 1 olduğu görülür. Bu da bize Sinc(0)=Sa(0)=1 kabulünü yapmamızı sağlar. Yukarıda tanımlanan fonksiyonların değişik kombinasyonları kullanılarak birçok yeni işaret üretilebilir. Bazı örnekler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

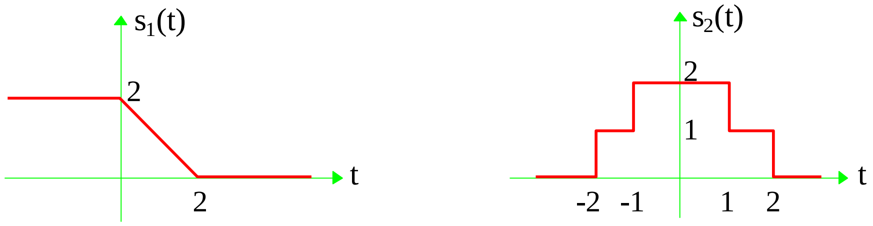


a) $s(t)=0.5\mathrm{sinc}(t-3)\mathrm{rect}((t-3)/6)$ b) $s(t)=e^{-t}\cos(\pi t)\,\upsilon(t)$

Şekil 1.3 Bazı örnek işaretler.

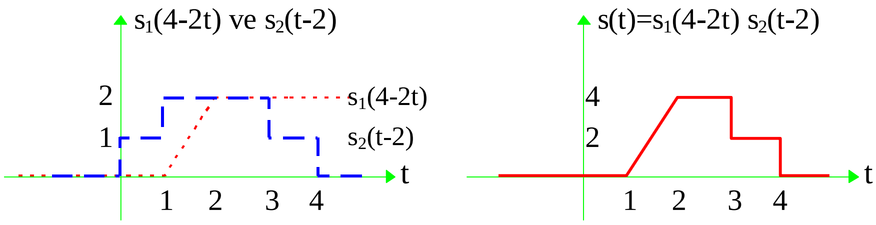
Örnek 1.1 $s_1(t)=(2-t)\,\upsilon(2-t) + t\,\upsilon(-t)$ ve $s_2(t)= \mathrm{rect}(t/2)+\mathrm{rect}(t/4)$ olsun.

$s(t)=s_1(4-2t)s_2(t-2)$ işaretinin nasıl elde edilebileceğini araştıralım. Önce s_1 ve s_2 aşağıdaki şekilde elde edilsin.



Şekil 1.4 $s_1(t)$ ve $s_2(t)$ işaretleri.

Daha sonra $s_1(4\text{-}2t)$, $s_2(t\text{-}2)$ ve bunların çarpımı olan s(t) işareti aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Görüldüğü gibi $s_1(4-2t)=s_1(-2(t-2))$, $s_1(t)$ işaretinin 2 katsayısı ile zaman ekseninde sıkıştırılıp, dikey eksen etrafında döndürülüp daha sonra 2 birim sağa ötelenmişidir. $s_2(t\text{-}2)$ ise $s_2(t)$ işaretinin 2 birim sağa ötelenmişidir.



Şekil 1.5 $s(t)=s_1(4-2t)s_2(t-2)$ işaretinin elde edilmesi.

❑

1.2.1 Birim Dürtü İşareti

Teorik hesaplamalarda karşımıza çıkan ve çok kullandığımız bir başka işaret de dürtü (impulse) fonksiyonudur. Öyle bir işaretimiz olsun ki mümkün olduğunca t>0 ve t<0 için değeri sıfır olsun. Yani dürtü olduğu an hariç işaret değeri sıfır olsun. Dürtü olduğu anda ($t\cong0$) yeterince büyük bir değeri olsun. Bu tür bir işaret fiziksel dünya da çok kısa sürebilecek fakat etkili bir dürtüyü sembolize edebilir. Yanlız sürekli zamanda dürtünün yeterince etkili olabilmesi için dürtü fonksiyonunun sıfır anında sonlu değer alması yetmez. Yoksa sonlu bir işaret ile dürtü fonksiyonunun çarpımının integrali (ki bunun niçin gerektiği ileride anlaşılacaktır) sıfır çıkar ve bizim işimize yaramaz. Bizim istediğimiz bütün $T>0$ değerleri için aşağıdaki özelliği sağlayabilecek bir birim dürtü (unit impulse) fonksiyonu $\delta(t)$ bulmaktır:

$$\int_{-T}^{T} s(t)\delta(t)dt = s(0)\,.$$

Görüldüğü gibi verilen özelliği sağlayabilmek için t>0 ve t<0 için $\delta(t)=0$, $t\cong0$ için $\delta(t)$ sonsuz (tanımsız) olmalıdır. Bu yüzden de dürtü fonksiyonuna tekil (singular) fonksiyon denir. Gerçekte çok iyi tanımlanamayan ve fiziksel dünya da bulunmayan bu fonksiyon hesaplamalarda oldukça işimizi kolaylaştırdığı için sıkça kullanılmaktadır. Dürtü fonksiyonu bir fonksiyonlar kümesinin limit hali olarak verilebilir. Öncelikle yukarıdaki integralde görüldüğü gibi birim dürtü δ(t) fonksiyonunun [-T,T] aralığındaki (bütün pozitif T değerleri için) integrali 1 olmalıdır (bunu görmek için s(t)=1 seçiniz). Adına da zaten bundan dolayı birim dürtü denmektedir. Şimdi çeşitli K değerleri için s(t)=Krect(Kt) işaret kümesini düşünelim. Bu normal dikdörtgen işaretimizin dikey eksene doğru K oranında sıkıştırılmış ve K ile çarpılmış halidir. Bu yüzden de bütün pozitif K değerleri için toplam integral değeri değişmeyecek ve 1 olarak kalacaktır. Ayrıca işaretimiz t<-1/(2K) ve t>1/(2K) için sıfır değeri verecektir. Böylece K değerini yeterince büyük aldığımızda birim dürtü fonksiyonuna yeterince yaklaşmış olacağız. Öyleyse birim dürtü fonksiyonu aşağıdaki limit şeklinde yazılabilir:

$$\delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot rect(Kt) .$$

Diğer fonksiyon kümeleri kullanılarak da birim dürtü fonksiyonu verilebilir, bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

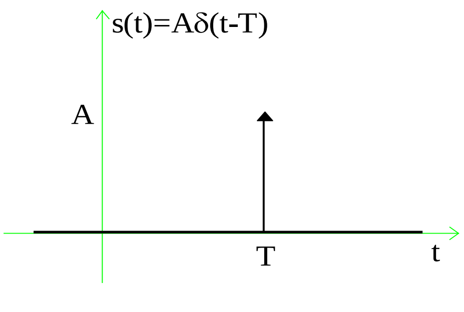
$$\delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot sinc(Kt) , \qquad \delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot sinc^2(Kt) ,$$

$$\delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot e^{-K|2t|} , \qquad \delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot e^{-\pi K^2 t^2} ,$$

$$\delta(t) = \lim_{K\to\infty} K \cdot \Lambda(Kt) , \qquad \delta(t) = \lim_{K\to\infty} 1.5K \cdot \Lambda^2(Kt) .$$

Alıştırma : Yukarıdaki fonksiyonların toplam integrallerinin bütün pozitif K değerleri için 1 değerini verdiğini ve şekillerini çizerek gittikçe birim dürtü fonksiyonuna yaklaştıklarını gösteriniz.

Dürtü fonksiyonunun zamanda ötelenmesi ve sabit bir sayı ile çarpılması diğer fonksiyonlarda olduğu gibi yapılır. Örneğin Aδ(t-T) işareti birim dürtü fonksiyonunun T kadar ötelenmişi (yani dürtünün t=T anında gerçeklenmişi) ve A ile çarpılmışı (A kat kuvvetlendirilmişi) dir. Bu işaret A ile çarpıldığından toplam integral değeri A olacaktır. Burada A değerine dürtünün şiddeti ya da değeri denir. Dürtü fonksiyonu özel bir fonksiyon olduğundan grafiklerde çizilmesi de özel olmalıdır. Bunun için genelde aşağıdaki biçim kullanılır:



Şekil 1.6 Dürtü fonksiyonunun grafikle gösterilişi.

Bazen dürtü okunun yanına parantez içinde dürtü şiddeti değeri yazılabilir. Aslında T noktasında dürtünün aldığı değer sonsuz olduğu halde grafikte sadece şiddeti kadarmış gibi gösterilir. Bunun T noktasında A değeri alan bir fonksiyonla karıştırılmaması için ok işareti kullanılmıştır. Eğer dürtü şiddeti negatif ise ok aşağı doğru olacaktır.

Eğer $s(t)=f(t)\delta(t-T)$ şeklinde bir işaretimiz varsa bunu $s(t)=f(T)\delta(t-T)$ şeklinde yazmamız da mümkündür yani bu iki işaret birbirine eşit olacaktır. Bunun sebebi $\delta(t-T)$ işaretinin $t\neq T$ için zaten sıfır olmasından dolayıdır. Yani f(t)'nin burada işareti etkileyebileceği yegane nokta t=T noktasıdır. Bu yüzden de f(t)'yi sanki f(T) değerinde bütün t'ler için sabit bir fonksiyonmuş (ya da katsayıymış) gibi düşünebiliriz. Dürtü fonksiyonunun bu çok önemli özelliği birçok yerde işimize yarayacaktır.

Birim dürtü fonksiyonu ile birim basamak fonksiyonu arasında sıkı bir ilişki vardır. Çünkü eğer dürtü işaretinin integralini alırsak birim basamak fonksiyonunu buluruz:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \upsilon(t)\,.$$

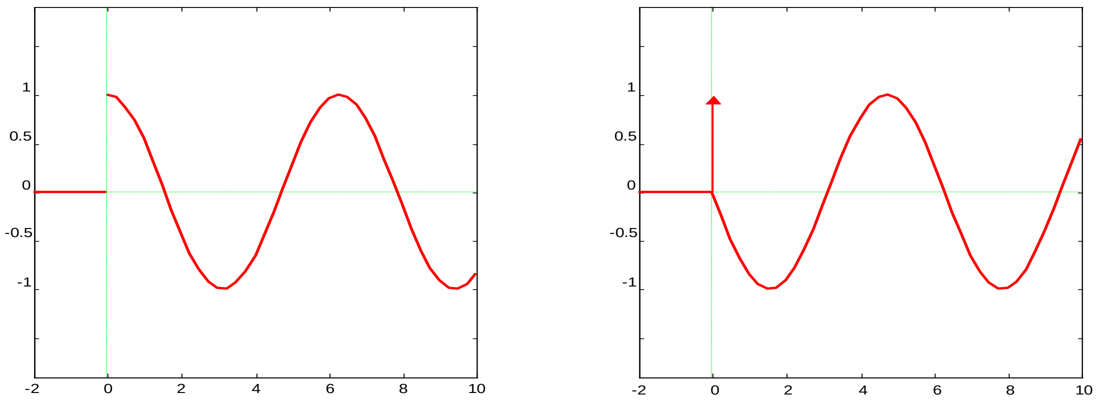
Bunun sebebi açıktır çünkü birim dürtü fonksiyonunun $(-\infty,t)$ aralığındaki integrali $t<0$ için işaret değeri hep sıfır olduğundan sıfır verecektir. $t>0$ için ise integralde toplamı etkileyecek sadece t=0 anındaki dürtü işareti vardır ve bu kısmın integrali dürtü şiddeti kadar yani 1 dir. Öyleyse birim dürtü işaretinin integral işareti t=0 anına kadar 0, $t>0$ için 1 vermelidir. Bu da birim basamak fonksiyonudur. Birim basamak fonksiyonu kullanılarak süreksiz fonksiyonlar ifade edilebilir. Bu yüzden süreksiz fonksiyonların türevleri alındığında karşımıza dürtü fonksiyonu çıkar. Dürtü fonksiyonunun da önemi ve kullanım alanının genişliği buradan gelmektedir. Teorik hesaplamalarda ve analiz yöntemlerinde sık sık karşımıza çıkar.

Örnek 1.2

$s(t)=\cos(t)\upsilon(t)$ işaretinin zamanda türevi, çarpım fonksiyonlarının türev kuralı uygulanarak

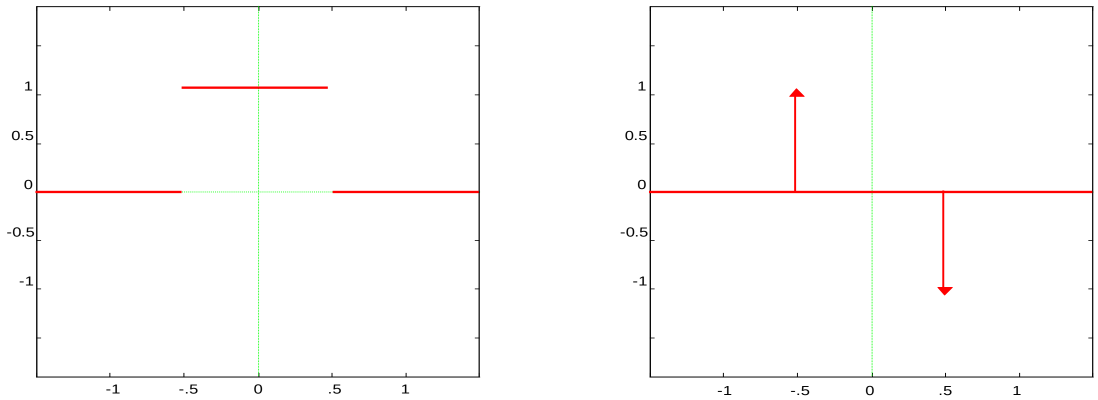
$$s'(t) = -\sin(t)\upsilon(t)+\cos(t)\delta(t) = -\sin(t)\upsilon(t)+\delta(t),$$

olarak bulunabilir.



Şekil 1.7 $s(t)= \cos(t)\upsilon(t)$ ve türevi $s'(t)=-\sin(t)\upsilon(t)+\delta(t)$

Buna benzer olarak rect(t) işaretinin türevi δ(t+0.5)-δ(t-0.5) olacaktır. Aşağıdaki şekilde bu işaretler gösterilmiştir.



Şekil 1.8 s(t)= rect(t) ve türevi s′(t)= δ(t+0.5)-δ(t-0.5)

❑

Dürtü fonksiyonunun çok önemli başka bir özelliği de aşağıda verilmiştir:

$$\underline{\underline{\int_{T_1}^{T_2} f(t)\delta(t-T)dt}} = \int_{T_1}^{T_2} f(T)\delta(t-T)dt = f(T)\int_{T_1}^{T_2} \delta(t-T)dt = \underline{\underline{\begin{cases} f(T), & T_1 < T < T_2, \\ 0, & \text{dışında.} \end{cases}}}$$

Burada $T_2 > T_1$ olduğu düşünülmüştür (aksi halde integralin sınırları yer değiştirilerek, başına eksi işareti getirilir ve sonra sonuç yukarıdaki eşitlikten bulunabilir). Görüldüğü gibi, herhangi bir fonksiyon ile dürtü işaretinin çarpımının integrali yukarıda verildiği gibi kolayca hesaplanabilir. Bunun için o fonksiyonun dürtü anındaki değerini vermek yeterli olmaktadır.

δ(Kt) ifadesnin sabit bir K değeri için sanki dürtü fonksiyonunun sıkıştırılmışı (ya da açılmışı) olması gerekir. Fakat dürtü işareti bütün sıfırdan farklı zamanlarda sıfır verdiğinden bu tür bir işaretin sıkıştırılmışının nasıl olacağı kolayca anlaşılmaz. δ(Kt)'nin neyi ifade ettiğini anlamak için toplam integralini alıp şiddetine bakalım. Önce K>0 olsun, p=Kt dönüşümünü kullanarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Kt)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p)\frac{1}{K}dp = \frac{1}{K},$$

K negatif ise dönüşümden dolayı integral sınırları değişeceğinden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Kt)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(p)\frac{1}{K}dp = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p)\frac{1}{K}dp = -\frac{1}{K},$$

bulunur. Bu sonuçlar bize göstermektedir ki K pozitif de olsa negatif de olsa şiddet hep pozitif çıkmaktadır. Bu da beklenebilir çünkü K'nın negatif olması işareti dikey eksen etrafında döndürecektir, fakat bu işlem toplam integrali etkilemeyecektir. Bir de örneğin K 1'den büyük ise yeni işaret, birim dürtü fonksiyonun K oranında sıkıştırılmışı olacağından toplam integral K kat azalacaktır. Bu yüzden 1/K sabitinin de gelmesi normaldir. Bunlardan çıkan sonuç olarak δ(Kt) işaretini δ(t)'nin bir sayı ile çarpılmışı gibi düşünebiliriz. Aslında doğru olmayan bu varsayım integral alırken ve bazı diğer işlemlerde doğru sonuç vereceğinden dolayı işimizi kolaylaştıracaktır. Yukarıdaki sonuçları birleştirirsek şu sonucu yazabiliriz:

$$\delta(Kt) \approx \frac{1}{|K|}\delta(t).$$

Örneğin integralde δ(Kt-T)= δ(K(t-T/K)) şeklinde bir ifade varsa bunu (1/|K|)δ(t-T/K) ifadesi ile yer değiştirip sonra bildiğimiz kuralları uygulayabiliriz. Yukarıda K=-1 seçersek δ(-t)≈δ(t) buluruz. Burada dürtü fonksiyonu simetrik bir fonksiyondan türetilmiş ise bu zaten eşit olacaktır.

Örnek 1.3

Yukarıda elde edilen bilgiler kullanılarak aşağıdaki integraller kolayca hesaplanabilir:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(Kt-T)dt = \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{t} \delta(t-\frac{T}{K})dt = \frac{1}{|K|}u(t-\frac{T}{K}),$$

$$\int_{0}^{3} (\mathrm{rect}(t/4)+\delta(4-2t))(t+2)dt = \int_{0}^{2}(t+2)dt + \int_{0}^{3}\frac{1}{2}\delta(t-2)(t+2)dt = 4+2=6.$$

❑

Ayrık zamanda birim dürtü fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Görüldüğü gibi bu iyi tanımlanmış bir fonksiyondur ve sürekli zamandaki dürtü fonksiyonunun tanımında karşılaştığımız güçlükler bunda yoktur. Burada zaman ayrık olduğundan işaretin sıfır noktasında sonsuz değer almasına gerek yoktur çünkü bu haliyle toplam enerjisi 1 olduğundan ayrık zamandaki bir dürtü için yeterli enerjiye sahiptir. Bu yüzden de grafikte özel bir gösterilime gerek yoktur.

Ayrık zaman birim dürtü fonksiyonunun da benzer özellikleri vardır:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \upsilon[n],$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=N_1}^{N_2} f[n]\delta[n-N]}} = f[N]\sum_{n=N_1}^{N_2}\delta[n-N] = \underline{\underline{\begin{cases} f[N], & N \in [N_1 : N_2], \\ 0, & N \notin [N_1 : N_2]. \end{cases}}}$$

Ayrıca δ[n]=δ[-n] özelliği kolayca görülebilir.

1.2.2 Üstel İşaretler

Üstel işaretler matematiksel analizde birçok yerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin Ae^{st} işareti s pozitif bir sayı iken zaman içinde gittikçe üstel olarak artan bir fonksiyonu ifade eder. Eğer s negatif bir sayı ise işaret zamanda üstel olarak sönümlenecektir. s=0 durumunda işaret sabit A değerinde kalacaktır. Burada bir de s'in komplex değer alması söz konusudur. Böyle bir durumda işaret değeri sanal olacağından, bu tip bir işaretin fiziksel dünya da karşılığı olması beklenmez. Fakat bu tür bir kullanım analizde işimizi kolaylaştıracaktır.

Üstel komplex ifadeler için Euler formülü hatırlanırsa:

$$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt).$$

Yukarıdaki formülü kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$Ae^{st} = Ae^{\sigma t}(\cos(wt) + j\sin(wt)), \quad s=\sigma+jw,$$

$$Re\{e^{j(wt+\theta)}\} = \cos(wt+\theta),$$

$$Im\{e^{j(wt+\theta)}\} = \sin(wt+\theta).$$

Burada *Re{}* ve *Im{}* operatörleri sırasıyla ilgili büyüklüğün sadece gerçel ve sanal kısımlarını elde etmekte kullanılırlar.

Komplex işaret $e^{j(wt+\theta)}$ temel periyodu $T=2\pi/w = 1/f$ olan $(w=2\pi f)$ periodik bir işarettir. Çünkü $e^{j(w(t+T)+\theta)} = e^{jwT}\ e^{j(wt+\theta)} = e^{j2\pi}\ e^{j(wt+\theta)} = e^{j(wt+\theta)}$ elde edilir ($e^{j2\pi} = 1$ olduğunu görünüz). Bir de e^{jkwt} işaretini farklı k tamsayıları için düşünürsek farklı açısal frekekanslı işaretler kümesi elde ederiz. Bunlara ileride *harmonik* adını vereceğiz.

Ayrık zamandaki üstel işaretlerde biraz farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Şöyle ki $e^{j\Omega n}$ işaretinin periyodik olabilmesi için $e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega N}\ e^{j\Omega n}$ olduğundan $e^{j\Omega N} = 1$ olmalıdır. Bunun sağlanmasının yegane yolu ise belli bir K tamsayısı için $\Omega N=2\pi K$ olmasıdır. Bu durumda $\Omega/(2\pi)=K/N$ sayısı rasyonel bir sayı olmak zorundadır. Öyleyse $e^{j\Omega n}$ işareti ancak $\Omega/(2\pi)$ sayısı rasyonel ise ($N=2\pi K/\Omega$ periyodu ile) periyodik olur. Burada K ve N'in ortak bir böleni yok ise N temel periyod Ω/K temel açısal frekansdır. $\Omega/(2\pi)$ sayısı rasyonel bir sayı değil ise $e^{j\Omega n}$ ayrık zaman işareti periyodik olmaz. Bu üstel sürekli zamanlı işaretlerden farklı olan bir noktadır çünkü e^{jwt} sürekli zaman işareti bütün w değerleri için periyodiktir.

Diğer bir özellik ise $e^{j\Omega n}$ ve $e^{j(\Omega+2\pi K)n}$ işaretlerinin bütün K tam sayı değerleri için tamamen aynı işaret olmalarıdır. Bunun sebebi $e^{j2\pi Kn} = 1$ olmasındandır çünkü K ve n tamsayıdır. Öyleyse açısal frekansları 2π'nin bir katı kadar fark eden ayrık zamanlı işaretler aynıdır. Bu da sürekli zaman işaretlerinden farklı olan bir noktadır. Sürekli zaman işaretlerinde farklı açısal frekanslar için farklı işaretler elde edilir. Yukarıda verilen özellikler $\cos(\Omega n)$ ve $\sin(\Omega n)$ için de aynen geçerlidir.

Alıştırma: $\cos(n/2)$ ve $\cos(\pi n/2)$ ayrık zaman işaretlerini $n=0,1,\ldots,10$ değerleri için tablo halinde hesaplayınız ve grafiklerini çiziniz. Periyodik olup olmadıklarını belirleyiniz. Ayrıca cos(5πn/2) işareti için de aynı işlemleri yapınız ve cos(πn/2) = cos(5πn/2) olduğunu görünüz.

1.3 Sistemler ve Modelleme

Sistem denilince genelde işaret girişi ve çıkışı olan ve giriş işaretini bir şekilde işleyerek çıkış işaretini üreten bir yapı aklımıza gelir. Bu şekilde bir yapı fiziksel dünya daki bir çok olguyu, yapıyı veya işlevi temsil edebilir. Değişik özellikte ve biçimde olan yapılar aynı çatı altında belli bir formasyonda değerlendirilebilirler.

Genellikle sistem girişi u(t) (ya da ayrık zamanda u[n]) sistem çıkışı y(t) (ya da y[n]) olarak gösterilebilir. Burada (zamanın fonksiyonu olan) bu değişkenler vektörel büyüklük de olabilir. Bunun anlamı sistemin çok girişli ve çok çıkışlı olmasıdır (MIMO: Multiple Input Multiple Output). Örneğin üç boyutlu uzayda bir cismin hareketini modellediğimizde, buna etkiyen kuvvetler referans sistemine göre belirli yönlerdeki üç vektörün bileşkesi olarak yazılabilirler. Böylece bu cisme etkiyen bileşke kuvvet üç rakam kullanılarak ifade edilmiş olur. Bu sistemimizin girişidir. Çıkış olarak ise hızı alırsak bu da yine üç boyutlu uzayda üç tane sayı ile ifade edilebilir. Böylece bu tür bir sistem üç girişi üç çıkışı olan bir sistem olur. Bir elektrik devresinin birkaç girişi birkaç çıkışı olabileceğinden bu da çok girişli çok çıkışlı sistemlere örnek olarak verilebilir. Sonuç olarak sistemimizin giriş ve çıkış değişkenleri vektör şeklinde de olabilir. Eğer tek giriş ve tek çıkış varsa buna tek girişli tek çıkışlı sistem diyebililiriz (SISO: Single Input Single Output).

Sistemler blok diyagramı ile gösterildiğinde bizi ilgilendiren kısım sadece sistemimizin girişi ve çıkışıdır. Sistemin içerisinde olanlar giriş çıkış analizini etkilemez. Fakat sistemimizin içerisini inceliyorsak ve sistemimiz için bir matematiksel model vermek istiyorsak yeni değişkenler tanımlamaya ihtiyacımız olabilir. Örneğin sistemimiz belli bir bellek içeriyorsa çıkış değişkeninin ani değeri sadece giriş değişkeninin o anki değeri kullanılarak bulunmayabilir. Bu durumda çıkışı elde etmek için girişin o ana kadarki bütün değerlerinin bilinmesi gerekebilir. Bu şekilde sistemimizin girişleri ile ani olarak bulunamayacak, sistemimizin içerisindeki olaylarla ilgili ve çıkışı belirlememizde kullanabileceğimiz diğer değişkenlere *durum değişkenleri* denir. Bunlara bir tür sistemimizin durumunu ifade ettiğinden bu isim verilmiştir. Bu değişkenler genellikle x(t) (ayrık zamanda x[n]) olarak gösterilirler. Böylece durum değişkenleri sistemimizde geçmişle alakalı tüm bilgiyi taşımış olurlar.

Sistem çıkışı sistem girişleri ve bunların tüm geçmiş (ve bazen gelecek) değerleri kullanılarak belirlenebilir. Böylece *sistem*, giriş işaretini tek belirli bir çıkış işaretine dönüştüren bir kural olarak da tanımlanabilir. Burada sistem bir matematiksel operatör ya da süreç olarak işlev görmüş olur ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$y = T[u] ,$$

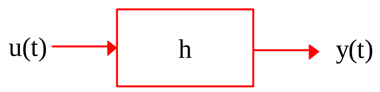
burada u sistem giriş işaretini, y çıkış işaretini ve T ise bu iki işareti ilişkilendiren bir operatörü göstermektedir.

Eğer sistem çıkışı sistem giriş işareti kullanılarak belirlenemiyorsa bu durumda sistemin modellenmemiş bazı girişleri var demektir. Çıkış işareti bu girişlerden etkilendiğinde sistemin çıkışı yanlızca modellenen giriş işaretleri yardımıyla bulunamayacaktır. Modellenmemiş girişler de sistem modeline katılarak sistem belirli hale getirilebilir ya da bu zor ise sistem davranışı rastgele değişkenler kullanılarak tahmin edilebilir.

Bir sistem çıkışını etkileyebilecek bir girişin tam özellikleri bilinmiyorsa veya modellenmesi çok güç ise bunu gürültü işareti gibi rastgele değişkenler ve süreçler olarak tanımlayabiliriz. Örneğin bir devre modellenirken atmosferdeki manyetik dalgaların devreye etkisi ya ihmal edilir ya da gürültü olarak modellenebilir. Aksi halde bu tür işaretleri belirlememiz mümkün değildir. Aslında fiziksel dünya da hemen hemen herşey birbirini az çok etkilemektedir. Bu yüzden belirli bir sistemi soyutlayarak bu sistem yanlızca bu girişlerden etkilenir demek genelde doğru olmaz. Fakat analiz aşamasında güçlük çekmemek için sistemimizi mümkün olduğunca basit modellememiz ve böylece bazı etkileri ihmal etmemiz gerekmektedir.

1.3.1 Blok Diyagramları

Sistem dışarıdan bakıldığında sadece girişi değiştirilebilen ve çıkışı gözlenebilen bir yapıdır yani içerisine müdahele edilmez. Böyle bir yapı aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir.



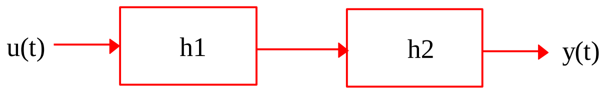
Şekil 1.9 Genel bir sistem gösterilimi.

Fiziksel olarak böyle bir yapıya kara kutu da denmektedir. Böyle bir yapıyla örneğin bir arabayı modellersek arabanın içerisindeki sistemlerin nasıl çalıştığından çok arabanın gaz pedalına ne şekilde basarsak arabanın hızı nasıl değişir sorusuna cevap ararız. Bir kere böyle bir modellemeyi gerçekleştirirsek artık arabayı sadece bir sistem bloğu gibi görebiliriz ve içerisindeki karmaşık yapılarla uğraşmak yerine bizim ihtiyacımız olan kısmını özet olarak alabiliriz. Böylece analizde oldukça kolaylık sağlamış oluruz. Bu tür blok olarak sistemleri düşünme fikri fiziksel dünya da hemen hemen bütün sistemlere uygulanabilir.

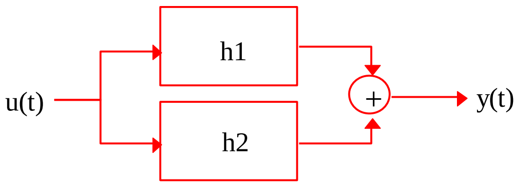
Sistemleri bazı elamanların bir araya gelmiş şekli olarak da düşünebiliriz. Fakat burada eleman da sistem, sistem de eleman olabilir. Örneğin bir elektrik devresini bir sistem ve devredeki bir direnci eleman olarak anabiliriz. Fakat bu devre de başka bir sistemin elamanı gibi iş görebilir ya da buradaki direnç de giriş çıkış büyüklükleri akım, gerilim ve sıcaklık olarak alınırsa bir sistem gibi davranır. Bu yüzden eleman ve sistem birbirleri cinsinden tanımlanabilirler.

Fiziksel olgulara sistem bakış açısı ile bakmanın yararlarından birisi birbirleriyle çeşitli şekillerde bağlanmış sistem gurubunu da tek bir sistem gözüyle görebilmektir. Elde ettiğimiz analiz ve tasarım metodlarını böylece bütün sistem yapılarına uygulayabiliriz.

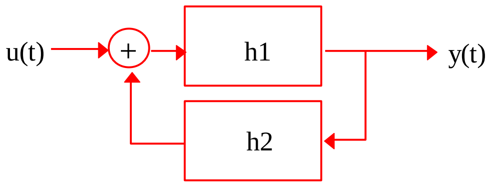
Sistemler blok diyagramları olarak gösterilirse aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi birbirleri ile bağlanabilirler.



a) Ardışık (seri) (cascade) bağlantı.



b) Paralel bağlantı.



c) Geri besleme (Feedback).

Şekil 1.10 Bazı sistem bağlantı çeşitleri.

Yukarıdaki bağlantı şekilleri ard arda (ve iç içe) kullanılarak karmaşık bağlantı şekilleri elde etmek mümkündür.

Blok diyagramının içinde genelde sabit bir sayı değişkeni varsa, bu çıkışın girişin o sayı kadar katı olduğunu gösterir. Eğer çıkış girişin belli bir fonksiyonu ise o fonksiyon giriş değişkeni ile birlikte blok içerisine yazılır. Çıkış girişin integrali ya da türevi ise blok içerisinde integral veya türev işareti kullanılır. Sistem blok diyagramı örnekleri aşağıdaki konuda ele alınacaktır.

1.3.2 Sistem Modellemesi

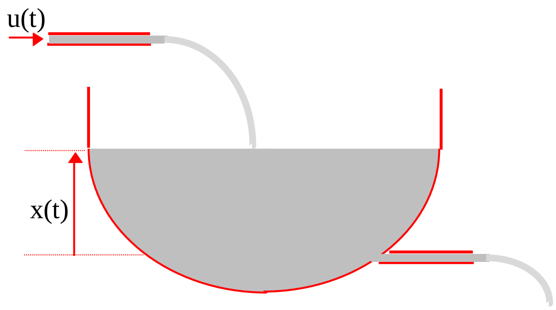
Sistemlerin matematiksel olarak ifade edilmesi için çeşitli yollar kullanılabilir. Bunlar arasında diferansiyel ve fark denklemlerini kullanmak en yaygın olmakla birlikte uygun olan diğer matematiksel araçlardan da yararlanılabilir. Burada karşımıza modelleme problemi çıkmaktadır. Fiziksel dünya daki sistemin matematiksel dünyaya taşınması dikkatli bir şekilde yapılmalıdır çünkü modelleme o kadar özenli yapılmazsa yani kaba bir modelleme yapılırsa analiz kolay olabilir fakat tasarımdan sonra sistemden istenilen performans alınmayabilir. Bunun sebebi sistemin gerektiği kadar detaylı modellenmemiş olması ve bu yüzden modellenmeyen kısmın sonradan sorun çıkararak beklenen sonucun alınamamasıdır. Örneğin bir uçak tasarımında motorların doğrusal bir sistem olarak modellenmesi fakat bir ani yükleme durumunda hesaplamalarda beklenmeyen durumların ortaya çıkması olasıdır. Bu durumda daha ayrıntılı bir modelleme yapılmalıdır.

Modellemenin haddinden fazla ayrıntılı yapılması da sakıncalıdır. Bunun sebebi analiz ve tasarım aşamasında güçlük doğmasındandır. Çok karmaşık bir modelde analiz ve tasarım yöntemlerinin uygulanması çok güçleşebilir ve hatta imkansız hale gelebilir. Bu durumda modelin zorunlu olarak basitleştirilmesi yoluna gidilir.

Aşağıda bazı örnek sistemler ve modelleri verilmiştir.

Örnek 1.4 Sıvı Seviyesi Kontrolü

Aşağıdaki şekilde verilen sıvı kabını ele alalım.



Şekil 1.11 Bir kaptaki sıvı seviyesi kontrolü.

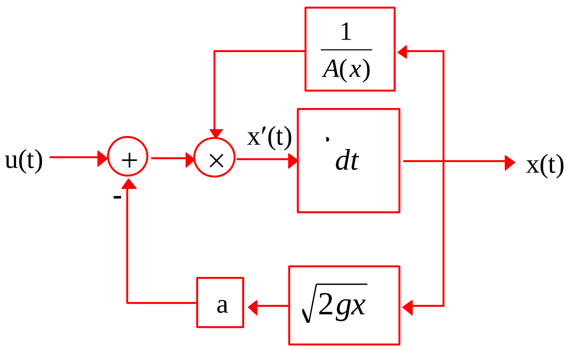
Burada u(t) giriş debisini ve x(t) su seviyesi yüksekliğini göstermektedir. x seviyesindeki su kabının yatay alanını A(x), çıkış boru alanını a ve yerçekimi ivmesini g ile gösterirsek sistemimizin matematiksel modelini aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\frac{d}{dt}[\int_0^x A(x)dx] = u(t) - a\sqrt{2gx} \;,$$

ya da

$$A(x)\dot{x} = u - a\sqrt{2gx}\,.$$

Bu tür bir sistem aşağıdaki şekilde blok diyagramlar yardımıyla verilebilir.

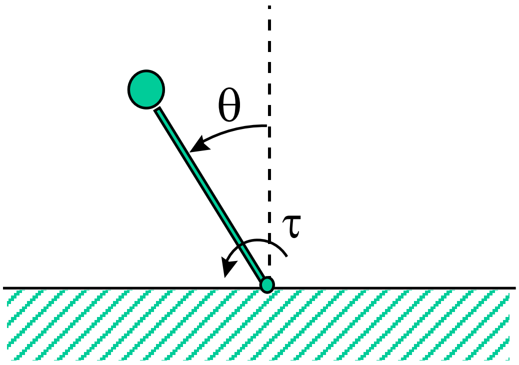


Şekil 1.12 Sıvı kabı sisteminin blok diyagramı.

❑

Örnek 1.5 Dikey Sarkaç

Aşağıdaki gibi bir dikey sarkacı (inverted pendulum) göz önüne alalım.

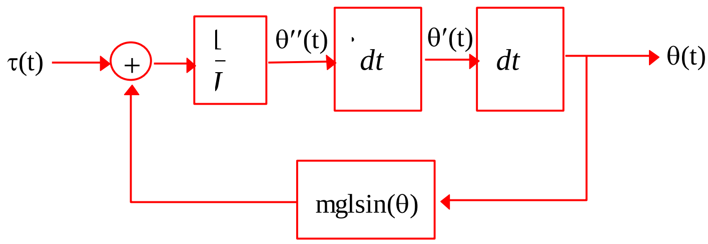


Şekil 1.13 Dikey sarkaç.

Burada sarkacın döndürme noktasında bir motor bulunduğunu ve bu noktadan istediğimiz döndürme torkunu uygulayabildiğimizi düşünelim. θ şekilde gösterildiği gibi sarkacın dönme açısı, τ uygulanan tork, m sarkacın ucundaki kütle, g yerçekimi ivmesi, J atalet momenti ve l sarkacın uzunluğu olarak alınırsa ve çubuk ağırlığı ihmal edilirse aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$J\,\theta'' = mglsin(\theta) + \tau\ .$$

Böyle bir sistem aşağıdaki blok diyagramla gösterilebilir.

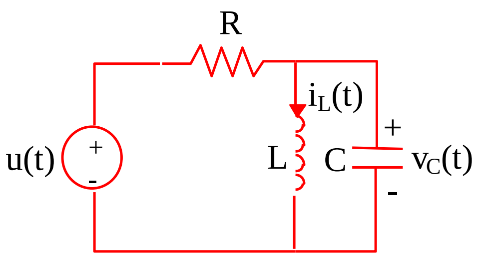


Şekil 1.14 Dikey sarkaç blok diyagramı.

❑

Örnek 1.6 Bir RLC Elektrik Devresi

Aşağıda gösterilen elektrik devresini ele alalım.

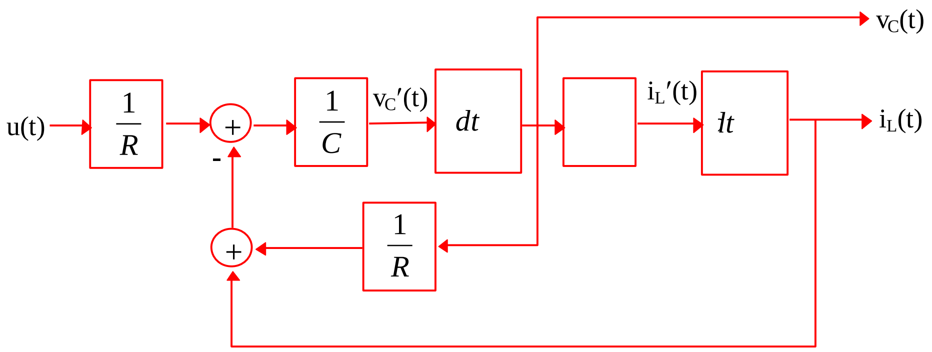


Şekil 1.15 Bir elektrik devresi.

Devre denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{RC}v_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{RC}u \\
\frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v_C
\end{aligned}
$$

Böylece devre aşağıdaki blok diyagramla gösterilebilir.



Şekil 1.16 RLC devresinin blok diyagramı.

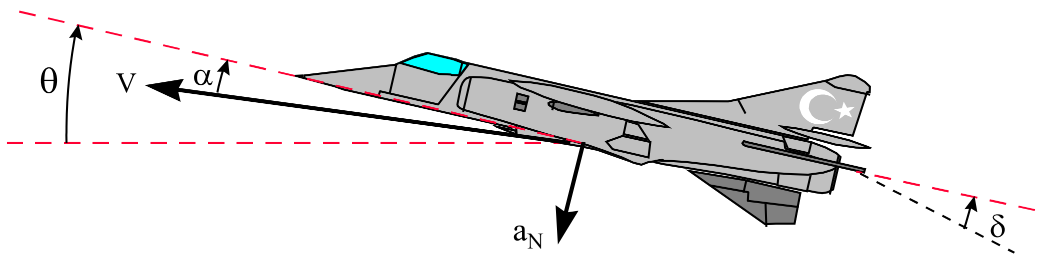
Bu örnekte görüldüğü gibi sistem tek girişli ve iki çıkışlıdır.

❑

Örnek 1.7 F4-E Kısa Süre Uçak Dinamiği

(Bu örnek ‘Ackermann, J., 1983, *Abtastregelung Band II: Entwurf robuster Systeme* Berlin, F.R.G.: Springer-Verlag’ ve ‘□ström, K. J., Wittenmark, B., 1989, *Adaptive Control*, Addison-Wesley’ kitaplarından yararlanılarak adapte edilmiştir.)

Uçak dikey hareket dinamiği değişkenleri aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Şekil 1.17 F4-E uçağındaki değişkenlerin tanımlanması.

Uçağın sabit hızda, sabit yükseklikte bulunduğu ve hücum açısı (angle of attack) α'nın küçük olduğu varsayılırsa kısa süreli doğrusallaştırılmış yaklaşık dinamik denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a_N(t) \\ q(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_N(t) \\ q(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} u(t)\,. \tag{1.1}$$

Burada a_N normal ivme (normal acceleration), $q=\theta'$ yunuslama oranı (pitch rate), θ yunuslama açısı (pitch angle), δ sapma açısı (control surface deflection), u(t) de sapma açısı kontrolüdür. Görüldüğü gibi sistem dinamiğini temsil eden diferansiyel denklem takımı matris formunda verilmiştir. Sistem girişi u çıkışları a_N, q, θ ve δ olarak alınabilir.

Matrislerde yer alan sabitler uçağın uçuş durumuna (dinamik basınç ve Mach sayısına) göre değişik değerler alır. Mach sayısı uçak doğrusal hızının ses hızına bölümüdür. a değişkeni kanatçık sapma açısının servo ile kontrolündeki parametredir ve burada a=14 olarak alınabilir. Diğer parametreler tablo halinde aşağıda verilmiştir:

Tablo 1.2 Çeşitli uçuş durumları için F4-E Uçak parametreleri.

	UD 1	UD 2	UD 3	UD 4
Mach Sayısı	0.5	0.85	0.9	1.5
Yükseklik (ft)	5000	5000	35000	35000
a_{11}	-0.9896	-1.702	-0.667	-0.5162
a_{12}	17.41	50.72	18.11	26.96
a_{13}	96.15	263.5	84.34	178.9
a_{21}	0.2648	0.2201	0.08201	-0.6896
a_{22}	-0.8512	-1.418	-0.6587	-1.225
a_{23}	-11.39	-31.99	-10.81	-30.38
b_1	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6

❑

1.4 Sistem Özellikleri

Sistemler özelliklerine göre çeşitli sınıflara ayırılabilirler. Bu özellikler belirlenirken sistemin yanlızca giriş-çıkış davranışı göz önüne alınacaktır. Sistemlerde çok önemli bir özellik olan doğrusallık özelliği ayrı bir bölümde ele alınmıştır. Aşağıdaki sistem özelliklerinin tanımları ayrık zamanlı sistemler için de aynen geçerlidir.

1.4.1 Belleksiz Sistemler

Sistem çıkış değeri y(t) yanlızca girişinin o anki değeri u(t) ve zaman değeri t kullanılarak bulunabiliyorsa bu tür sistemlere *belleksiz (memoryless) sistem* denir. Böyle bir sistem her giriş ani değerini çıkış ani değerine dönüştüren bir fonksiyon yardımıyla tanımlanabilir. Yani bütün tanimlı t değerleri için $y(t) = f(t,u(t))$ yazılabilir.

Bu tür bir dönüşümü genel bir sistem yapısından ayırmak gerekir. Aradaki fark şudur: Genel sistem yapısını tanımlayan dönüşüm giriş işaretinin bütün zaman aralığındaki değerlerine karşılık çıkış işaretinin zaman içerisindeki tüm değerlerini bulmaya yöneliktir. Yani genel bir sistem yapısında çıkış işaretinin bulunabilmesi için giriş işaretinin tüm zamanlardaki değerinin baştan verilmesi gerekir. Böyle bir dönüşümde tanım ve değer kümesi tanımlı giriş ve çıkış işaret kümesidir. Belleksiz sistemlerde ise belli bir andaki çıkışı belirlemek için girişin tüm zamanlardaki değerlerine bakmaya gerek yoktur çünkü o anki çıkış değeri yanlızca o anki giriş (ve o anki zaman değeri) yardımıyla bulunabilir. Böylece sistemin herhangi bir geçmiş ya da gelecek bilgiyi taşımasına gerek yoktur, bu yüzden de belleksiz sistem denmiştir. Aksi halde sistem içerisinde bazı bilgilerin tutması gerekeceğinden böyle sistemlere *bellekli sistem* denir.

Örnek olarak $y(t)=u^2(t)+2\sin(u(t))+1$ ile ifade edilen sistem belleksizdir çünkü çıkış girişin o anki değeri yardımıyla bulunabilir. Fakat $y(t)=u^2(t)+2\sin(u(t-1))+1$ sistemi belleksiz değildir çünkü çıkışın belirlenebilmesi için girişin 1 (sn) önceki değerinin bilinmesi gerekir. Ayrıca

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt \,, \tag{1.2}$$

ile ifade edilen sistem belleklidir çünkü çıkış değerinin bununabilmesi için o ana kadar olan tüm giriş değerinin integralinin bilinmesi gerekmektedir (girişin o anki değeri çıkışın o anki değerini bulmakta yeterli olmamaktadır).

1.4.2 Nedensel Sistemler

Sistem çıkışının belirli bir andaki değeri sistem girişinin sadece o anki ve geçmiş değerleri yardımıyla bulunabiliyorsa böyle sistemlere *nedensel sistem* denir. Aslında fiziksel dünya da bilindiği kadarıyla bütün sistemler nedenseldir. Bir sistemin nedensel olmaması ancak o sistemin girişinin daha ilerideki gelecek değerlerinin şimdiki çıkışı etkilemesi ile mümkündür. Böyle bir durumda ise sistemin sanki geleceği gören bir yapı olarak davranması gerekecektir.

Örneğin bazı işaret işleme uygulamalarında giriş işareti önce kaydedilir ve bunun üzerinde çalışmalar yapılarak çıkış işareti oluşturulur. Bu aşamada çıkışın belli bir andaki değeri girişin daha sonradaki değerlerine bağlı olabilir. Böyle bir sistem yapısı gerçek zamanda çalışıyormuş gibi düşünülürse nedensel olmayacaktır. Bu nedensel olmayan sistemlerin uygulamasına bir örnek olabilir. Fakat aslında işaret işlenirken önce tüm işaret ele alınmış sonra işlem uygulanmıştır. Yani aslında gerçekte yapılan çalışma nedenseldir.

Nedensel bir sisteme belli bir zaman noktasına kadar tamamen aynı olan giriş işaretleri uygulandığında iki durum için de o ana kadarki çıkış işareti aynı olacaktır çünkü giriş işaretinin gelecekteki değişimleri önceki çıkışları etkilemeyecektir. Nedensel olmayan bir sistemde ise böyle bir durumda belli bir ana kadar aynı olan giriş işaretleri için bile (daha sonraki giriş işareti kısmı farklı olduğunda) o ana kadar değişik çıkışlar elde edilebilecektir. Bu durumda o ana kadarki belli bir nedene dayanmadan sistem çıkışı değiştiğinden böyle bir sisteme *nedensel olmayan sistem* denir. Nedensel ifadesi de buradan gelmektedir.

Örneğin y(t)=u(t)u(t-1) ile ifade edilen veya (1.2)'de verilen sistemler nedenseldir çünkü sistem çıkışı daha sonraki girişlere bağlı değildir. y(t) =u(t)u(t+1) ile ifade edilen sistem ise nedensel değildir çünkü çıkış girişin daha sonraki değerlerine bağlıdır.

Bütün belleksiz sistemler tanım gereği nedenseldir, çünkü sistem çıkışları gelecek (ve geçmiş) girişlerden etkilenmez.

1.4.3 Kararlılık

Sistemlerin kararlı olmasının birkaç tür tanımı mevcuttur. Burada kullanacağımız tanım sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlılıktır. Adından da anlaşılacağı üzere her sınırlı giriş işareti için sınırlı çıkış üreten sistemlere *sınırlı giriş sınırlı çıkış (SGSÇ) kararlı* (bounded input bounded output stable,BIBO stable) denir. Bilindiği gibi bir işaretin u(t) sınırlı olması demek $\|u(t)\|<B$ olan bir B sayısının bulunması ile mümkündür. Öyleyse SGSÇ kararlı bir sistem aşağıdaki özelliği sağlayan bir sistemdir:

$$\forall\, t\,,\ \forall\, B_1\,,\ \forall\, u \in R \ \ni\ \|u(t)\|<B_1 \ \Rightarrow\ \forall\, t\,,\ \exists\, B_2 \ \ni\ \|y(t)\|<B_2\,.$$

Sistemin kendi içerisinde bazı değerlerin sınırsız şekilde artması o sistemin bu tanım gereği kararsız olmasını gerektirmez. Bilindiği üzere burada biz sadece giriş çıkış açısından sistemleri değerlendiriyoruz.

Uygulamada kararlılık özelliği çok önemlidir., çünkü sisteminizin çalışması demek bize uygun çıkışlar vermesi demektir ve genellikle istenen sınırlı girişler için sınırlı çıkışların elde edilmesidir. Aksi halde sistem çıkışları sınırsız bir şekilde artıyorsa bu genellikle sistemde istenmeyen bir etki olacak ve sistem elemanlarının zorlanarak bozulmalarına veya etrafa zarar vermesine sebep olabilecektir. Bu doğal olarak bazı sistemler için farklı değerlendirilebilir örneğin bir ekonomik sistemde sabit iş gücü için elde edilen kazancın ya da performansın gittikçe artması istenen bir durum olabilir.

Örneğin

$$y(t) = \frac{d}{dt}u(t)\,, \tag{1.3}$$

ile ifade edilen sistem SGSÇ kararlı değildir çünkü mesela sınırlı $u(t)=\sin(t^2)$ girişi için sınırlı olmayan $y(t)=2t\cos(t^2)$ çıkışını vermektedir. Ayrıca sistem (1.2) de SGSÇ kararlı değildir çünkü mesela $u(t)=1$ sınırlı girişi için $y(0)=0$ ilk koşulu ile $y(t)=t$ sınırsız çıkışını sağlamaktadır.

Bununla beraber $y(t)=u^2(t)\cos(u(t))+u(t-1)$ ile ifade edilen sistem SGSÇ kararlıdır, çünkü eğer giriş B_1 ile sınırlı ise çıkış $B_2=B_1^2+B_1$ ile sınırlı olacaktır. Aynı şekilde verilen bir T için

$$y(t) = \int_{t-T}^{t+T} u(t)dt\,, \tag{1.4}$$

ile ifade edilen sistem SGSÇ kararlıdır çünkü B_1 ile sınırlı bir giriş en fazla $B_2=2TB_1$ ile sınırlı bir çıkış üretecektir. Bu sistem, çıkışı gelecek girişlere bağlı olduğundan nedensel (ve belleksiz) bir sistem değildir.

1.4.4 Zamanla Değişmeyen Sistemler

Sistem tanımlı u(t) girişi için ilgili y(t) çıkışını versin. Sistem eğer bütün T gerçel değerlerinde tüm u(t-T) girişleri için y(t-T) çıkışını sağlıyor ise bu tür bir sisteme *zamanla değişmeyen (ZD) sistem* adı verilir. Yani bir işaret için belli bir çıkışı veren sistem ilgili giriş işaretinin ötelenmişi için de çıkışın aynı miktarda ötelenmişini veriyor ise zamanla değişmeyen sistemdir. Bu bütün tanımlı giriş işaretleri ve bütün öteleme miktarları için geçerli olmalıdır.

Gerçekte yaşadığımız fiziksel dünya da tek bir zaman boyutu vardır ve zaman bir süreç olarak durmadan işlemektedir. Bu yüzden değişik zaman boyutlarına gidip $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı çeşitli giriş sinyalleri için ne tip çıkışlar elde edileceğini bulmak mümkün değildir. Aslında biz sistemlerde sadece sonlu zaman aralığında tanımlı giriş ve çıkış işaretleri ile ilgileniriz. Fakat analizde kolaylık sağlamak amacıyla işaret $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı imiş gibi düşünülür.

Zamanla değişmeme özelliği genelde sistemlerde istenen bir vasıftır. Çünkü örneğin bir sisteme sonlu süreli bir giriş işareti verdiğimizde bir çıkışı sağlıyor ise belli bir süre sonra bu işareti tekrar verdiğimizde (ötelenmiş işaret) yine aynı çıkışın elde edilmesini isteriz. Aksi durumda sistem sanki zamanın değerini de kullanarak bir çıkış vermiş olur. Bu durumda sisteme *zamanla değişen sistem* adı verilir. Burada çok önemli bir ayrım vardır: Sistemin zamanla değişmesi demek sistem çıkışının zamanla değişmesi değildir. Bu zaten doğaldır. Fakat sistemin zamanla değişmesi demek sistemin giriş çıkış dönüşüm kuralının zamanla değişmemesi yani zaman değerinden etkilenmemesi demektir.

Örneğin $y(t)=tu(t)$ ile ifade edilen sistem zamanla değişen bir sistemdir çünkü zaman değeri çıkışı etkilemektedir. Bu durumda örneğin $u_1(t)=\sin(t)$ giriş işareti için $y_1(t)=t\sin(t)$ işareti elde edilir fakat u_1'in ötelenmişi olan $u_2(t)=\sin(t-1)$ işareti için $y_2(t)=t\sin(t-1)$ işareti elde edilecektir. Görüldüğü gibi burada $u_2(t)=u_1(t-1)$ olduğu halde $y_2(t)=y_1(t-1)$ değildir böylece bu sistem zamanla değişmeyen bir sistem olamaz yani zamanla değişen bir sistemdir.

Öte yandan $y(t)=\sin(u(t))+2u(t-1)$ sistemi zamanla değişmeyen bir sistemdir çünkü dönüşüm kuralında zamanın değeri ayrıca kullanılmamıştır. $u_1(t)$ girişi için $y_1(t)= \sin(u_1(t))+2u_1(t-1)$ çıkışı elde edilir. $u_1(t)$'nin ötelenmişi olan $u_2(t)=u_1(t-T)$ işareti ve tüm T değerleri için $y_2(t)=\sin(u_2(t))+2u_2(t-1)=\sin(u_1(t-T))+2u_1(t-1-T)$ işareti elde edilecektir. Görüldüğü gibi $y_2(t)=y_1(t-T)$ dir. Bu tüm giriş işaretleri ve tüm ötelemeler için geçerli olduğundan bu sistem zamanla değişmeyen bir sistemdir.

Ayrıca $y(t)=u(t^2)$, $y(t)=u(-t)$ ve $y(t)=u(2t)$ ile ifade edilen sistemler zamanla değişen (ve nedensel olmayan) sistemlerdir. (1.2), (1.3) ve (1.4)'de verilen sistemler ise zamanla değişmeyen sistemlerdir (neden?).

1.4.5 Evrilebilirlik

Bir sistemin herhangi bir çıkış işareti yardımıyla ilgili giriş işareti tek (unique) olarak bulunabiliyorsa böyle sistemlere *evrilebilir (invertible) sistemler* denir. Bu durumda her bir giriş işareti için ona özel bir çıkış işareti bulunması gerekir. Evrilebilir sistemler için öyle bir *evrik (inverse) sistem* tasarlanabilir ki ilgili sistemin çıkışı evrik sisteme giriş olarak verildiğinde evrik sistemin çıkışında ilgili sistemin giriş işareti elde edilir. Yani evrik sistemde giriş ve çıkış kapıları yer değiştirmiştir. Evrilemeyen bir sistemde bu söz konusu olamaz çünkü belli bir çıkış için hangi giriş işaretinin seçileceği tek olarak gerçekleştirilemez. Evrik sistem de tanım gereği evrilebilir bir sistemdir ve onun evriği ilgili orijinal sistem olur.

Evrilebilir sistem ve onun evriği ardışık olarak bağlanırsa bu sistem takımına giren işaret çıkıştan da aynen elde edilecektir. Uygulamada ise bu o kadar kolay mümkün olmaz çünkü genel olarak her sistemde giriş çıkış arasında az da olsa bir işlem gecikmesi olacaktır böylece iki sistem ard arda bağlandığında ilk giriş son çıkış arasında bir miktar zaman gecikmesi olacak ve orijinal işaret tam olarak aynen elde edilemeyecektir.

Örnek olarak (1.2) ve (1.3) birbirinin evriği olan iki evrilebilir sistemdir. $y(t)=Ku(t)$ (K sabit) ile ifade edilen sistem K=0 olmadıkça evriği $v(t)=(1/K)y(t)$ olan evrilebilir bir sistemdir. K=0 ise bu sistem evrilemez çünkü bütün giriş işaretleri için sistem tek bir 0 işaretini üretmektedir. Ayrıca

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k], \qquad (1.5)$$

ile ifade edilen sistem de evrilebilir bir sistemdir çünkü $v[n]=y[n]-y[n-1]$ ile ifade edilen sistem kullanılarak evrilebilir (böylece $v[n]=u[n]$ elde edilebilir).

$y(t)=u^2(t)$ ise evrilemeyen bir sistemdir çünkü mesela $u(t)$ ve $-u(t)$ giriş işaretleri için aynı çıkışı vermektedir ve böylece çıkış işareti yardımıyla giriş işareti tek olarak bulunamaz. Benzer şekilde $y(t)=\sin(u(t))$, $y(t)=u(t)u(t-1)$ ve $y[n]=u[2n]$ ile ifade edilen sistemler evrilemeyen sistemlerdir (neden?).

Evrilebilirlik tanımı gereği, evrik sistemin nedensel olması zorunlu değildir. Örneğin $y(t)=u(t-1)$ ile ifade edilen nedensel bir gecikme sisteminin evriği $v(t)=y(t+1)$ ile ifade edilen nedensel olmayan bir sistemdir. Görüldüğü gibi gecikme sistemi evrilebilir bir sistemdir. Fakat bu evrik sistemin gerçek zamanda tasarlanması mümkün değildir çünkü evrik sistem nedensel değildir. Evrilebilir ve evriği nedensel olan sistemlere *gerçek zamanda evrilebilir (GZE) sistem* adını verebiliriz. Böylece ancak GZE sistemler uygulamada evrilebilir sistemlerdir. Örneğin (1.5)'de verilen sistem bir GZE sistemdir.

Örnek 1.8 $y(t)=2^{u(t)}$ ile ifade edilen sistemin özelliklerini araştıralım.

- Öncelikle sistem çıkışı girişin yanlızca bulunulan anki değeri ile belirlenebildiğinden yani girişin daha önceki veya sonraki değerlerini kullanmadığından dolayı sistem belleksizdir.
- Sistem belleksiz olduğundan nedenseldir.
- Sistem SGSÇ kararlıdır, çünkü örneğin giriş B ile sınırlı ise çıkış en fazla 2^B olacaktır.
- Sistem zamanla değişmeyen bir sistemdir çünkü zaman değeri giriş çıkış kuralında ayrıca kullanılmamaktadır. Bunu matematiksel dille ispatlarsak: u1(t) girişi için $y1(t)=2^{u1(t)}$ çıkışı ötelenmiş giriş u2(t)=u1(t-T) için $y2(t)=2^{u1(t-T)}$ çıkışı elde edilecektir. Görüldüğü gibi y2(t)=y1(t-T)'dir.
- Sistem evrilebilir bir sistemdir ve evriği $v(t)=\log_2(y(t))$'dir. Böylece v(t)=u(t) tek olarak elde edilebilir.

❑

Örnek 1.9 y(t)=u(-t) sistemini inceleyelim.

- Sistem çıkışını belirlemek için girişin yanlızca bulunulan andaki değerini kullanmak yeterli değildir böylece sistem belleksiz değildir. Örneğin y(1) değerini belirlemek için u(-1) değerini bilmeye ihtiyaç vardır.
- Sistem nedensel değildir. Çünkü örneğin y(-1) çıkışını vermek için daha ileride sağlanacak olan u(1) değerini bilmek gerekmektedir.
- Sistem SGSÇ kararlıdır çünkü B ile sınırlı bir giriş işareti yine B ile sınırlı bir çıkış işareti üretecektir.
- Sistem zamanla değişen bir sistemdir. Örneğin $u_1(t)=\upsilon(t)$ birim basamak olarak seçilirse $y_1(t)=\upsilon(-t)$ olur. $u_2(t)=\upsilon(t-T)$ girişi için ise $y_2(t)=\upsilon(-t-T)$ çıkışı elde edilir. Görüldüğü gibi $y_2(t)$, $y_1(t-T)=\upsilon(-t+T)$'e eşit değildir.
- Sistem evrilebilir bir sistemdir ve evriği kendisidir. Yani v(t)=y(-t) sistemi ele alınırsa v(t)=u(t) bulunur.

❑

Örnek 1.10 y[n]=0.5y[n-1]+u[n]+u[n-1] ile ifade edilen sistemi inceleyelim.

Dikkat edilirse verilen sistem aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (½)^{n-k} (u[k] + u[k-1]) = u[n] + 3\sum_{k=-\infty}^{n-1} (½)^{n-k} u[k] = u[n] + 3\sum_{m=1}^{\infty} (½)^{m} u[n-m].$$

- Sistem çıkış değeri geçmiş giriş (ve çıkış) değerlerini de kullandığından sistem belleklidir.
- Sistem çıkış değeri gelecek giriş değerlerini kullanmadığından nedenseldir.
- Sistem SGSÇ kararlıdır, çünkü B ile sınırlı bir giriş en fazla $B + 3B\sum_{m=1}^{\infty} (½)^{m} = 4B$ ile sınırlı bir çıkış üretecektir.

- Sistem zamanla değişmeyen bir sistemdir. $u_1[n]$ girişi $y_1[n]=u_1[n]+3\sum_{m=1}^{\infty}(½)^m u_1[n-m]$ çıkışını, $u_2[n]=u_1[n-N]$ girişi ise $y_2[n]=u_1[n-N]+3\sum_{m=1}^{\infty}(½)^m u_1[n-m-N]$ çıkışını üretecektir. Görüldüğü gibi $y_2[n]=y_1[n-N]$ olmaktadır.
- Sistem evrilebilir bir sistemdir ve v[n]=-v[n-1]-0.5y[n-1]+y[n] sistemi kullanılarak evrilebilir. Burada ilk sistem ifadesi kullanılarak v[n]=-v[n-1]+u[n]+u[n-1] bulunur. Evrik sistemin ilk koşul değeri uygun olarak v[0]=u[0] seçilirse v[n]=u[n] olarak bulunacaktır.

❑

Örnek 1.11 $y[n]=u[n]+n^3$ ile ifade edilen ayrık zaman sistemini ele alalım.

- Sistem çıkışı girişin ani değeri ve zaman değeri kullanılarak bulunabildiğinden yani girişin daha önceki veya sonraki değerlerine bakmadığından belleksizdir.
- Sistem belleksiz olduğundan nedenseldir.
- Sistem SGSÇ kararlı değildir. Çünkü örneğin u[n]=0 sınırlı girişi için $y[n]=n^3$ sınırsız çıkışını vermektedir.
- Sistem zamanla değişen bir sistemdir. $u_1[n]$ girişi $y_1[n]=u_1[n]+n^3$ çıkışını, ötelenmiş $u_2[n]=u_1[n-N]$ girişi $y_2[n]=u_1[n-N]+n^3$ çıkışını üretmektedir. Görüldüğü üzere $y_2[n]=y_1[n-N]$ değildir.
- Sistem evrilebilirdir ve $v[n]=y[n]-n^3$ sistemi yardımıyla evrilebilir. Böylece v[n]=u[n] tek olarak geri elde edilebilir.

❑

PROBLEMLER

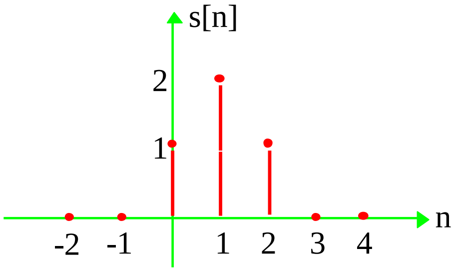
P 1.1 $s_1(t)$= rect(1-t/6)+υ(t-6) ve $s_2(t)$=υ(t-3)+rect(t/3-2.5) olsun.

a) $s_1(t)$ ve $s_2(t)$ işaretlerini çiziniz.
b) $s_1(3t+3)$, $s_1(6-3t)$ işaretleri çiziniz.
c) $s_1(t)$'nin bir güç ve enerji işareti olup olmadığını bulunuz.
d) $s_1(t)$'nin tek ve çift kısımlarını bulup çiziniz.

P 1.2 $s_1(t)$=(t υ(t) - (t-2) υ(t-2)) υ(4-t) ve $s_2(t)=e^{-t}$υ(t) olsun.

a) $s_1(t)$ ve $s_2(t)$ işaretlerini çiziniz.
b) $s_1(t)$ ve $s_2(t)$'nin toplam integrallerini ((-∞,∞) aralığında integralini) bulunuz.
c) $s_1(t)s_2(t)$ işaretini çiziniz ve toplam integralini bulunuz.
d) $s_1(4-t)$, $s_2(2-t)$ işaretlerini ve bunların çarpımı olan işareti çiziniz ve toplam integrallerini bulunuz.

P 1.3 Aşağıdaki ayrık zaman işaretini ele alalım.



Şekil 1.18 Bir ayrık zaman işareti.

a) s[n] işaretini yanlızca δ[n] fonksiyonlarını (ötelenmişi ve bir katsayı ile çarpılmışlarını) kullanarak ifade ediniz.
b) s[n] işaretini υ[n] işaretini (ötelenmişi ve bir katsayı ile çarpılmışını) kullanarak ifade ediniz.
c) s[3-n], s[2n-1] ve bunların çarpım işaretlerini çiziniz.
d) s[n]'in tek ve çift kısımlarını çiziniz.

P 1.4 $s_1(t)$=sinc(t/2-2)υ(t) ve $s_2(t)$=(t-4) υ(t-4) işaretlerini ele alalım.

a) $s_1(t)$, $s_2(t)$ ve bunların çarpım işaretini çiziniz.
b) $s_1(t)$, $s_2(t)$ ve $s_1(t)s_2(t)$ işaretlerinin tek ve çift kısımlarını çiziniz.

P 1.5 Herhangi bir s[n] işaretini ele alalım. s[n]'i, δ[n] dürtü işaretini kullanarak aşağıdaki şekillerde ifade edebileceğimize dikkat ediniz:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]s[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[n-k]\delta[k].$$

s[n]'i u[t] birim basamak fonksiyonları yardımıyla da ifade etmek mümkündür:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \upsilon[n-k]q[k].$$

Yukadıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için q[n]'i s[n] cinsinden yazınız.

P 1.6 Aşağıdaki işaretler periyodik midir? Periyodik ise temel periyodlarını belirleyiniz.

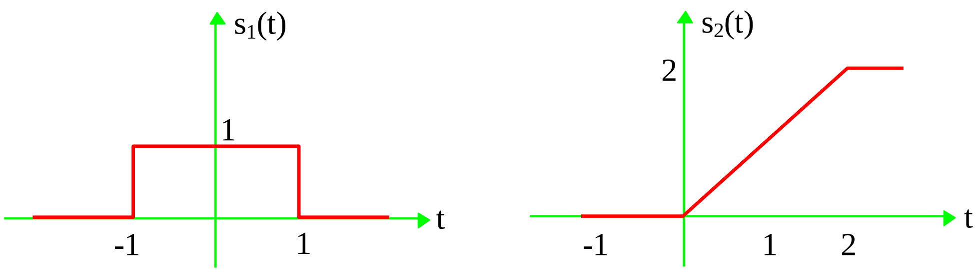
a) $s[n] = e^{j(n/4-\pi)}$.
b) $s[n] = e^{j(\pi n/4-1)}$.
c) s[n] = cos(3n)
d) s(t) = cos(t) + cos(2t)
e) s(t) = cos(t) + cos(πt)
f) s(t) = cos(t)cos(πt)

P 1.7 Temel periyodları (T_1 ve T_2) birbirlerinin bir rasyonel sayı katı (ortak bölensiz $T_1=(N_1/N_2)T_2$) olan iki işaretin toplam işareti periyodik midir? Periyodik ise temel periyodu ne olur? Temel periyodları birbirlerinin bir rasyonel sayı katı değil ise durum ne olur?

P 1.8 Aşağıda ifade edilen sistemlerin (belleksizlik, nedensellik, SGSÇ kararlılık, zamanla değişmezlik, evrilebilirlik) özelliklerini sebepleri ile birlikte belirleyiniz. u sistem girişini, y sistem çıkışını göstermektedir.

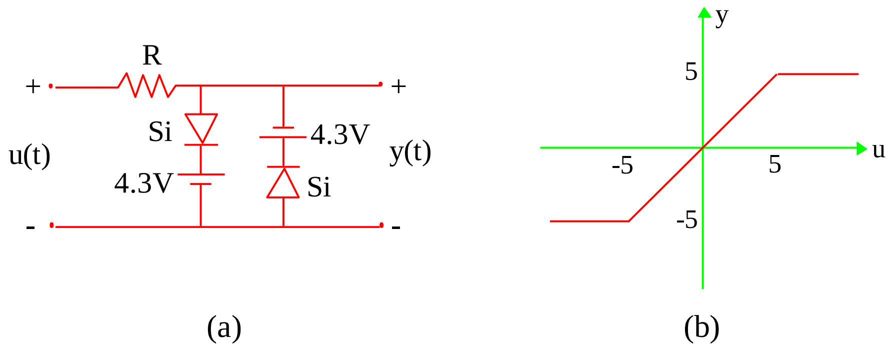
a) $y(t)=tu(t)u(t-2)+\sin(t)$,
b) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} u(\tau)d\tau$,
c) $y(t)=u(t)\mathrm{rect}(t)$,
d) $y[n]=\begin{cases} u[n-1], & n \text{ tek sayı}, \\ u[n], & n \text{ çift sayı}. \end{cases}$
e) $y(t)=u(t^2)$,
f) $y[n]=y[n-1]+u^2[n]$,
g) $y[n]=y[n+1]+u[n]+n$,
h) (1.4) de verilen sistem,
i) (1.5) de verilen sistem.

P 1.9 Aşağıda gösterilen işaretleri göz önüne alalım.



a) $s_1(t)$ işaret girişine $s_2(t)$ işaretini çıkış olarak sağlayabilecek bir sistem ifadesi veriniz.
b) Verdiğiniz sistemin özelliklerini belirleyiniz.

P 1.10 Bazen bir elektronik devrede giriş işaretinin yüksek değerlerinin sınırlanması gerekmektedir. Böylece devredeki hassas elemanlar korunabilecektir. Bunun için aşağıda verilen ön sınırlayıcı devre tasarlanabilir.



Şekil 1.19 Sınırlayıcı elektronik devre ve karakteristiği.

Şekil 1.19 (a)'da verilen devrenin yaklaşık giriş-çıkış karakteristiği Şekil 1.19 (b)'de verilmiştir.

a) Verilen giriş-çıkış karakteristiğini matematiksel olarak ifade ediniz. (y çıkışını u girişi cinsinden matematiksel olarak yazınız. Örneğin birim basamak fonksiyonundan yararlanabilirsiniz.)
b) Bu sistemin özelliklerini (sebepleriyle birlikte) belirleyiniz.
c) u(t)=4sin(t) ve u(t)=8sin(t) giriş işaretlerine karşı düşen çıkış işaretlerini çiziniz.

2. DOĞRUSAL SİSTEMLER

2

Doğrusal sistemler modelleme, analiz ve tasarım aşamasında, mühendislikte ve bilimin diğer dallarında çokça kullandığımız bir sistem türüdür. Bunun en önemli sebeplerinden birisi doğrusal sistemlerin matematiksel analiz aşamasında çok büyük kolaylıklar sağlamasıdır. Aslında fiziksel dünyamızda hiçbir sistem doğrusal değildir. Yada bir başka ifade ile her sistemin doğrusallığının bir sınırı vardır. Bununla birlikte fiziksel dünya daki birçok sistemin sınırlı bir bölgede yaklaşık doğrusal bir sistem gibi davranması doğrusal sistem modellemesinin önemlerinden biridir. Böylece bu tür bir sistem modellemesi birçok aşamalarda işimize yaramaktadır.

Doğrusal olmayan sistemler analiz aşamasında bazen çok fazla zorluk çıkarır. Hatta bazı doğrusal olmayan sistemlerin analizi mümkün olamamaktadır. Bu yüzden modellemede mecbur kalınmadıkça doğrusal olmayan sistem modelleri kullanılmamalıdır. Zaten birçok fiziksel sistemde doğrusal sistem olma özelliği (büyük bir yaklaşıklıkla) vardır. Bu olmadığı takdirde sistem doğrusal olmayan bir model ile modellenebilir. Fakat burada da mümkün ise sistemi doğrusal bir sistem ve basit bir doğrusal olmayan sistemin seri olarak bağlanmışı olarak modellemek yararlı olabilir. Zira hiç olmazsa doğrusal olan kısmın analizi kolaylıkla yapılabilecektir. Bazen de bu tür doğrusal olmayan sistemlere yapay bir ön sistem bağlanarak birleşik sistemin giriş çıkış açısından doğrusal bir sistem gibi çalışması sağlanabilir. Böylece bu birleşik sisteme istenilen tasarım yöntemleri kolaylıkla uygulanabilir.

Sistem teorisinde şu ana kadar elde edilen sonuçların büyük bir kısmı doğrusal sistemler üzerinedir. Doğrusal sistemler için çok çeşitli ve derin analiz ve tasarım yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlar basit kararlılık analizi yöntemlerinden karmaşık optimum tasarımlara kadar uzanmaktadır. Bunun sağlanmasına yardımcı olan etken doğrusal sistemlerin matematiksel dünya da kolayca tanımlanıp, matematiksel araçlar kullanılarak işlenebilmesidir. Doğrusal olmayan sistemlerde ise benzer bir ilerleme sağlanamamıştır çünkü analiz orantısız bir şekilde güçleşmekte ve matematiksel araçlar yetersiz kalmaktadır. Doğrusal olamayan sistemler istenildiği kadar zorlaştırılabilir. Böylece analizleri mümkün bile olmayabilir. Doğrusal sistemler için ise birçok sistematik analiz ve tasarım metodları geliştirilmiştir.

2.1 *Doğrusallık Tanımı ve Özellikleri*

Doğrusal sistemler superpozisyon dediğimiz toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini sağlayan sistemlerdir. Sistemimiz öyle bir özellikte olsun ki iki ayrı giriş işaretine karşılık düşen iki çıkış işareti olduğunda bu iki giriş işaretinin toplam işaretine karşılık düşen çıkış işareti de ilgili çıkış işaretlerinin toplamı olsun. Bu özelliği sağlayan sistemlere *toplamsallık* özelliğini sağlıyor denir. Yine bir giriş işareti için buna karşı düşen bir çıkış işareti bulunsun. Bu giriş işaretinin herhangi bir katsayı ile çarpılmışına, çıkışın da aynı katsayı ile çarpılmışı karşı düşüyor ise sistem *çarpımsallık* özelliğini sağlıyor denir. Bu iki özelliği aynı anda sağlayan sistemlere *doğrusal sistemler* (*linear systems*) denir. Çarpımsallık ve toplamsallık özellikleri aynı anda matematiksel olarak yazılırsa doğrusallık aşağıdaki gerek ve yeter koşul ifadesi ile verilebilir:

> Herhangi iki giriş işareti u_1 , u_2 için ilgili çıkış işaretleri $y_1=T[u_1]$, $y_2=T[u_2]$ olsun. Eğer sistem $u = a_1 u_1 + a_2 u_2$ (a_1 , a_2 belirli sayılar) giriş işareti için çıkış işareti olarak
>
> $$y = T[u] = \mathbf{T[a_1\, u_1 + a_2\, u_2] = a_1\, T[u_1] + a_2\, T[u_2]} = a_1\, y_1 + a_2\, y_2$$
>
> özelliğini, tüm olabilecek giriş işaret çiftleri ve a_1 , a_2 sayıları için sağlıyorsa sistem doğrusaldır (ya da operatör T[ ] doğrusal bir operatördür) denir.

Görüldüğü gibi doğrusal bir sistem u_1 için y_1, u_2 için y_2 çıkışını veriyor ise $a_1u_1+a_2u_2$ girişi (a_1 ve a_2 katsayılar) için $a_1y_1 + a_2y_2$ çıkışını sağlar. Burada örneğin $a_1=a_2=1$ alırsak toplamsallık özelliğini; $a_2=0$ alırsak çarpımsallık özelliğini ifade etmiş oluruz. Öyleyse doğrusal bir sistemde bir giriş için bir çıkış elde edildiğinde, o girişin örneğin iki katı için eski çıkışın iki katı çıkmalıdır. İki ayrı işaret toplamı girişi için de çıkış olarak ilgili çıkış işaretlerinin toplamı çıkış olarak gözükmelidir.

Yukarıda verilen doğrusallık koşulundan hemen, doğrusal sistemlerin sıfır giriş işaretine sıfır çıkışı verdikleri görülebilir ($a_1=a_2=0$ durumu). Ayrıca doğrusallık koşulunu sağlayan sistemler sadece iki girişin toplamı için değil istendiği kadar fazla işaret toplamı girişi için de çıkışta ilgili çıkışların toplamını verecektir. Bunu kanıtlamak için önce iki işaret toplamı ele alınır, daha sonra bu toplam işaret ve sıradaki diğer işaret toplamı için de çıkış ilgili çıkışların toplamı olacaktır. Öyle ise yukarıdaki doğrusallık kuralı üç işaret toplamı için de sağlanmış olur. Buna bu şekilde devam ederek doğrusallığın istendiği kadar fazla işaret için toplamsallığı sağladığı görülebilir.

Sistemler çeşitli şekillerde ifade edildiği gibi doğrusal sistemler de çeşitli şekillerde ifade edilebilirler. Bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1 $y(t)=\sin(t)u(t)$ ile ifade edilen sistemi ele alalım.

> Sistem $u_1(t)$ için $y_1(t)=\sin(t)u_1(t)$, $u_2(t)$ için $y_2(t)=\sin(t)u_2(t)$ çıkışını sağlayacaktır. $u(t)=a_1u_1(t)+a_2u_2(t)$ girişi için ise $y(t)=\sin(t)u(t)=\sin(t)(a_1u_1(t)+a_2u_2(t))$ çıkışını sağlayacaktır. $y(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ olduğundan bu sistem doğrusal bir sistemdir. Sistem zaman değerini kullandığından zamanla değişen bir doğrusal sistemdir.

❑

Örnek 2.2 $y(t)=2u(t)+1$ ile ifade edilen sistemi ele alalım.

Bu sistem $u(t)=0$ giriş işareti için $y(t)=1\neq 0$ çıkışını sağlamaktadır. Bu yüzden doğrusal bir sistem olamaz.

❑

Örnek 2.3 $y[n]=2u[n]-3u[n-1]$ ile ifade edilen sistemi ele alalım.

Sistem $u_1[n]$ için $y_1[n]=2u_1[n]-3u_1[n-1]$, $u_2[n]$ için $y_2[n]=2u_2[n]-3u_2[n-1]$ çıkışlarını sağlayacaktır. $u[n]=a_1u_1[n]+a_2u_2[n]$ girişi için ise $y[n]=2u[n]-3u[n-1]= 2(a_1u_1[n]+a_2u_2[n])-3(a_1u_1[n-1]+a_2u_2[n-1])$ çıkışını sağlayacaktır. $y[n]= a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$ olduğundan bu sistem doğrusal bir sistemdir. Ayrıca sistem zamanla değişmediğinden doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem olur.

❑

Örnek 2.4 $y[n]=0.5y[n-1]+u[n]$ ile ifade edilen sistemi ele alalım.

Aslında sistemin bu haliyle ifade edilmesi tam olarak yeterli değildir. Çünkü çıkış yine çıkışın bir önceki değeri cinsinden verilmektedir. Bu durumda sistem için bir ilk koşul verilmesi gerekir. Bu ilk koşul verildiğinde artık sistem tam olarak belirlenmiş olacaktır. Mesela $u[n]=0$ girişi verildiğini düşünelim, şimdi $y[n]$ çıkışının ne olacağı bulunamayacaktır. Çünkü sistem ifadesi eksiktir. Bu durumda ilk koşul $y[0]=1$ olarak alınırsa çıkış tam $y[n]=2^{-n}$ olarak bulunacaktır. Bu sistemin doğrusal olabilmesi için öncelikle sıfır girişi için sıfır çıkışını sağlaması gerekir. Bu yüzden öncelikle biz ilk koşulların sıfır olduğunu ($y[0]=0$) kabul edeceğiz. Şimdi doğrusallığı test edebiliriz. Sistem $u_1[n]$ girişi için $y_1[n]$ çıkışını, $u_2[n]$ girişi için $y_2[n]$ çıkışını sağlasın. Öyle ise $y_1[n]=0.5y_1[n-1]+u_1[n]$ ve $y_2[n]=0.5y_2[n-1]+u_2[n]$ olur. Şimdi bu denklemleri sırası ile a_1 ve a_2 ile çarpıp toplarsak $a_1y_1[n]+a_2y_2[n]=0.5(a_1y_1[n-1]+a_2y_2[n-1])+(a_1u_1[n]+a_2u_2[n])$ bulunur. Böylece ilk koşullar da belirlendiğinde $a_1u_1[n]+a_2u_2[n]$ girişi için $a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$ çıkışı sağlanacaktır. Böylece bu sistem doğrusal (zamanla değişmeyen) bir sistem olarak bulunmuş olur.

❑

2.2 Doğrusal Sistemlerin İfade Edilmesi

Doğrusal sistemler birçok şekillerde ifade edilebilirler. Bunlar içersinde en yaygınları diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin, durum denklemlerinin, ya da dürtü cevaplarının kullanılmasıdır.

2.2.1 Diferansiyel ve Fark Denklemleri

Doğrusal Sistemler sürekli zamanda diferansiyel denklemler, ayrık zamanda fark denklemleri kullanılarak ifade edilebilirler. Bunların genel ifadeleri aşağıda gösterilmiştir:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)\,, \qquad (2.1)$$

$$y[n] + a_{N-1}y[n-1] + \cdots + a_0 y[n-N] = b_M u[n] + b_{M-1}u[n-1] + \cdots b_0 u[n-M]\,. \qquad (2.2)$$

Modelin tam olarak belirlenebilmesi için yukardaki ifadelere ek olarak sürekli zamanda *n* ilk koşul değeri y(0), y′(0), …, $y^{(n-1)}(0)$ sağlanmalıdır. Ayrık zamanda ise *N* tane ilk koşul değeri y[0], y[-1], …, y[-N+1] verilmelidir. Bu ilk koşul değerlerinin sıfır olduğu varsayılırsa ve *a* ve *b* katsayıları sadece zamanın fonksiyonu olarak seçilirse yukarıdaki ifadelerde verilen sistemler doğrusal sistem olacaktır. Eğer a ve b katsayıları sabit sayılar ise bu denklemler doğrusal zamanla değişmeyen sistemleri ifade edecektir. Yukarıdaki genel sistem denklemleri fiziksel dünya da karşımıza çıkan birçok sistemi yaklaşık ifade etmemize yaramaktadır.

Sürekli zamanlı sistemlerde ayrıca gecikmeler de mevcutsa diferansiyel ve fark denklemlerini bir arada kullanarak doğrusal sistemleri ifade etmek mümkündür. Belli bir giriş işaretine karşılık düşen çıkış işaretinin bulunması için diferansiyel veya fark denklemlerinin çözüm yöntemlerinden yararlanmak gerekmektedir.

2.2.2 Durum Denklemleri

Sürekli zamanda difereransiyel denklemler ile (2.1) ifade edilen sistemler durum denklemleri ile de ifade edilebilirler. Aslında durum denklemleri sistemin iç değişkenleri ile ilgili de bilgi verebileceğinden daha üstün ve daha modern bir modelleme aracıdır. Sürekli zamanda *durum denklemleri* aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B} u(t)\,, \qquad (2.3)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + Du(t)\,. \qquad (2.4)$$

Görüldüğü gibi denklem sistemi matrisler kullanılarak verilmiştir. Burada *x(t)* durum vektörünü, x_i *i.* durum değişkenini göstermektedir. Durum denklemleri fiziksel sistemlerin modellenmesinde çok işe yaramaktadır. Çıkışlar durum değişkenleri ve o anki giriş değerleri kullanılarak verilebilir. Durum değişkenleri sanki sistem içerisinde sistemin belleğini (durumunu) tutan değişkenlerdir. Yani sistemin şimdiye kadarki geçmişinin özü özeti durum değişkenlerinde saklanmaktadır.

Yukarıdaki durum denklemi sistemi vektör ve matris adları kullanılarak kısaca aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{2.5}$$

Görüldüğü üzere bütün bir sistem ifadesini kısaca bu şekilde vermek denklemleri (modeli) kullanmak açısından birçok kolaylıklar getirmektedir. Yukarıdaki sistem sanki birinci dereceden diferansiyel denklem gibi görünmektedir fakat çok daha yüksek dereceden diferansiyel denklemleri ifade edebilmektedir.

A, B, C, D matrisleri zamanla değişen elemanlara sahip olabilir. Bu durumda matrisler zamanın bir fonksiyonu olacaktır ve bu tür bir modelleme zamanla değişen doğrusal bir sistemi ifade edebilecektir. Eğer A, B, C ve D zamanla değişmeyen yani sabit sayılı matrisler ise durum denklemleri zamanla değişmeyen bir sistemi ifade edecektir.

Ayrık zamanda durum denklemlerinde türev yerine gecikme operatörü olacaktır:

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n], \quad y[n] = Cx[n] + Du[n]. \tag{2.6}$$

Burada yine *x* durum vektörünü, *u* giriş değişkenini, *y* çıkış değişkenini, A,B,C ve D ilgili matrisleri göstermektedir.

2.2.3 Dürtü Cevabının Kullanılması

Herhangi bir ayrık zaman doğrusal sistemi ele alalım. Sistem δ[n-N] giriş işareti (N sabit sayı) için h[N,n] çıkış işaretini sağlasın. Bütün N'ler için sadece h[N,n] işaretlerini kullanılarak sistem giriş-çıkışı hakkında tüm bilgiye sahip olabiliriz. Sistem girişi verildiğinde çıkış işaretini h[N,n]'ler yardımıyla bulabiliriz. Bunun sebebi sistemimizin (zamanla değişen ya da değişmeyen) doğrusal bir sistem olmasıdır. Bunun için öncelikle herhangi bir giriş işareti u[n]'i δ[n-N]'lerin katsayılı toplamı olarak yazalım:

$$u[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u[N]\delta[n-N]. \tag{2.7}$$

Yukarıda sanki u[n] işareti δ[n-N] işaretlerinin belli katsayılarla çarpılmış toplamı gibi yazılmıştır.

Alıştırma: Belirli bir işareti u[n] ele alınız ve bunu yukarıdaki eşitlikteki gibi tek tek çeşitli N değerleri için u[N] δ[n-N] işaretlerini çizerek ve toplayarak eşitliği gösteriniz.

Biz bütün δ[n-N] giriş işaretleri için ilgili çıkışları (h[N,n]) biliyoruz. Sistemimiz de doğrusal olduğu için çarpımsallık ve toplamsallık özelliklerini sağladığından bu işaret toplamına karşılık düşen çıkışı aşağıdaki gibi kolayca elde edebiliriz:

$$y[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u[N]h[N,n]. \tag{2.8}$$

Görüldüğü gibi u[n]'e karşılık düşen çıkış yanlızca h[N,n] işaretleri kullanılarak bulunabilmektedir. Yani bütün doğrusal sistemler bu şekilde ifade edilebilirler. Diferansiyel, fark ve durum denklemleri ise yanlızca belli bir sınıf doğrusal sistemi ifade eder, yani bütün doğrusal sistemleri kapsamaz.

Sürekli zamanda ise toplam yerine integrali kullanmak mümkündür. Sürekli zamanlı bir doğrusal sistemi ele alalım. δ(t-T) girişine (T sabit) karşı h(T,t) işaret çıkışı elde edilsin. Önce u(t)'yi dürtü işaretleri yardımı ile yazalım:

$$u(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} u(T)\delta(t - T)dT\,. \tag{2.9}$$

Burada u(t) yanlızca dürtü işaretlerinin katsayılı bir integral toplamı olarak yazılmıştır. Şimdi ayrık zamandakine benzer şekilde ilgili çıkış aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$y(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} u(T)h(T,t)dT\,. \tag{2.10}$$

2.3 Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler

Hem doğrusal hemde zamanla değişmeyen özellikteki sistemler sistem teorisinde çok önemli bir yere sahip olup birçok fiziksel sistemin modellenmesinde kullanılırlar. Kısaca *Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) (Linear Time Invariant, LTI)* sistemler denilen bu tür sistemler hakkında literatürde çok geniş ve köklü çalışmalar mevcuttur.

DZD sistemlerin tam ifadesi yanlızca birim dürtü cevabı (δ[n] ya da δ(t) girişine karşılık düşen çıkış işareti, h[n] ya da h(t))kullanılarak verilebilir. Burada zamanla değişmemenin getirdiği şu özellik bulunur: Eğer sistem δ[n] giriş işaretine h[n] dürtü cevabını sağlıyor ise, δ[n-N] giriş işaretine h[n-N] çıkışını sağlamalıdır. Yani genel bir doğrusal sistemden daha özel olarak DZD sistemlerde h[N,n]=h[n-N] özelliği vardır. Öyleyse (2.8) kullanılarak:

$$y[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u[N]h[n - N], \tag{2.11}$$

yazılabilir. Yukarıda verilen işlem *ayrık zamanda evrişim (convolution)* ya da *evrişim toplamı (convolution sum)* olarak anılır ve

$$y[n]=u[n]*h[n], \tag{2.12}$$

olarak yazılır. Çok önemli bir sonuç olarak, ayrık zamanlı DZD herhangi bir sistem giriş-çıkış açısından sadece h[n] birim dürtü cevabı verilerek tam olarak ifade edilebilir. Benzer bir sonuç olarak belli bir birim dürtü cevabını sağlayan yanlızca bir tek DZD sistem vardır. Bu tabii olarak doğrusal olmayan ya da zamanla değişen sistemler için doğru değildir.

Örnek 2.5 Birim dürtü cevabının h[n]=2δ[n-1]+δ[n-2] olduğunu düşünelim.

Bu işaret sistem girişine u[n]=δ[n] işareti vermekle çıkıştan elde edilmiştir. Bu cevabı sağlayan yegane DZD sistem y[n]=2u[n-1]+u[n-2] olarak ifade edilebilir. Fakat örneğin $y[n]=2u^2[n-1]+u^4[n-2]$ veya y[n]=0.5y[n-1]u[n-2]+2u[n-1] ile verilen doğrusal olmayan sistemler veya y[n]=0.5y[n-1]δ[n-2]+2u[n-1] ile verilen zamanla değişen sistemler aynı birim dürtü girişi için aynı çıkışı sağlarlar. Fakat değişik giriş işaretleri için farklı çıkış işaretleri üreteceklerdir. Birim dürtü işaretine aynı çıkışı veren bütün doğrusal sistemler (ki giriş çıkış açısından aslen aynı sistemdirler) herhangi bir giriş işareti için de aynı çıkışı sağlayacaklardır.

❑

Sürekli zamanda da benzer olarak δ(t) dürtü giriş işaretine karşı h(t) dürtü cevabı çıkışı verilsin. Sistemimiz zamanla değişmeyen ise δ(t-T) girişi için h(t-T) çıkışı elde edilecektir. Yani bu durumda genel bir doğrusal sistemden daha özel olarak h(T,t)=h(t-T) olacaktır. Bu durumda çıkış (2.10) yardımıyla

$$y(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} u(T)h(t-T)dT \qquad (2.13)$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki işlem *sürekli zamanda evrişim (convolution)* ya da *evrişim integrali (convolution integral)* olarak anılır ve

$$y(t)=u(t)*h(t) \qquad (2.14)$$

şeklinde gösterilir. Görüldüğü gibi DZD bir sürekli zaman sistemi yanlızca h(t) birim dürtü cevabı yardımıyla giriş-çıkış açısından tam olarak ifade edilebilmektedir.

Diferansiyel ve fark denklemleri ile ifadede bir DZD sistem sabit katsayılı bir denklem sistemi verecektir. Çünkü eğer denklemlerdeki katsayılardan biri zamanın bir fonksiyonu ise (zamanla değişiyor ise) sistem zamanla değişen bir sistem olacaktır. Benzer şekilde durum denklemleri ile ifadede A,B,C ve D matrisleri sabit sayılı matrisler olacaktır.

2.3.1 Evrişimin Özellikleri

Evrişim yukarıdaki bölümde de görüldüğü üzere DZD sistemlerde karşımıza çıkmaktadır. DZD bir sistemin birim dürtü cevabı ile giriş işaretinin evrişimi alındığında çıkış işareti kolayca bulunabilmektedir. Bunun önemi tüm DZD sistemler için geçerli olmasıdır. Evrişim işlemi uygulanırken birinci işaret (u[N]) ile, ikinci işaretin dikey eksen etrafında döndürülüp (h[-N]) n noktasına kaydırılmışı (h[n-N]) çarpılır ve bu çarpım işaretinin toplam değeri bulunur. Bu değer evrişim işaretinin n noktasındaki değerini verecektir. İkinci işaretin ters döndürülmesinden dolayı bu işleme evrişim (ya da bazı yayınlarda *katlama*) denmiştir.

Evrişim toplama veya çarpma işlemlerindeki gibi iki küme arasındaki bir işlemdir. İki işaret verildiğinde bunlara evrişim işlemi uygulanırsa sonuçta yine bir işaret elde edilir. Diğer işlemlerde olduğu gibi evrişimin de çok faydalı bazı özellikleri vardır. Ayrık zamanda:

Değişme Özelliği: $$u[n]*h[n] = h[n]*u[n], \qquad (2.15)$$

Birleşme Özelliği: $$u[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (u[n]*h_1[n])*h_2[n], \qquad (2.16)$$

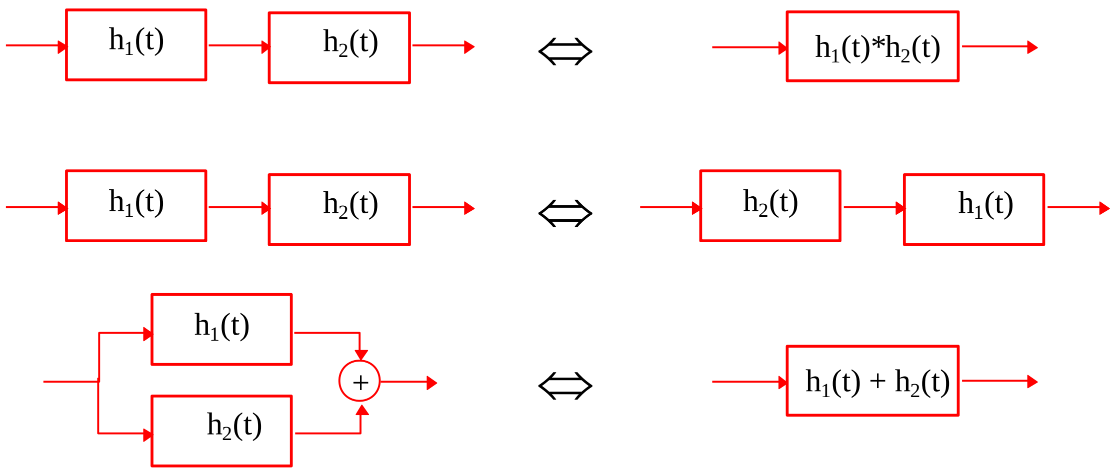
Dağılma Özelliği: $$u[n]*(h_1[n] + h_2[n]) = u[n]*h_1[n] + u[n]*h_2[n], \qquad (2.17)$$

olarak verilebilir. Yukarıdaki özellikler sürekli zaman (evrişim integrali) için de geçerlidir.

Alıştırma : Yukarıdaki özelliklerin geçerliliğini evrişim işlemi tanımını kullanarak ayrık ve sürekli zamanlı işaretler için kanıtlayınız.

Burada değişme özelliği bize göstermektedir ki giriş işareti ve dürtü cevabı yer değiştirseler yine aynı sistem çıkışı elde edilecektir. Birleşme özelliği ise DZD sistemler için çok önemli bir özelliktir. İki DZD sistemin ardışık (seri) olarak bağlandığını ve birinci sistemin dürtü cevabının $h_1[n]$ ikincisinin $h_2[n]$ olduğunu düşünelim. Bu durumda birinci sistemin çıkışı $u[n]*h_1[n]$ ve son sistem çıkışı $(u[n]*h_1[n])*h_2[n]$ olacaktır. Birleşme özelliğine göre bu çıkış $u[n]*(h_1[n]*h_2[n])$ olarak da verilebilir. Buradan şu sonuç çıkmaktadır, ardışık sistem bu durumda sanki dürtü cevabı $h_1[n]*h_2[n]$ olan tek bir sistem gibi çalışmaktadır.

Ayrıca $h_1[n]*h_2[n] = h_2[n]*h_1[n]$ değişme özelliğinden dolayı ardışık bağlanmış iki DZD sistemin yerleri değiştirilse de ilk giriş son çıkış açısından tamamen aynı işi görecektir. Bu da önemli bir özelliktir. Paralel bağlanmış (girişleri aynı çıkışları toplanan) iki sistem de dağılma özelliğinden dolayı birim dürtü cevabı $h_1[n]+h_2[n]$ olan tek bir sistemmiş gibi görülebilir. Bu özellikler sürekli zamanda blok diyagramları olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Bazı DZD blok bağlantıları ve eşdeğerleri.

Yukarıdaki blok diyagramlarında bloklar içerisine o sistemin (bloğun) birim dürtü cevabı simgesi yazılmıştır. Bu literatürde çok kullanılan bir yoldur. Ne de olsa DZD sistemler birim dürtü cevaplarıyla tam olarak ifade edilebilmektedirler. Sistem eğer doğrusal olmayan bir sistem ise içersine giriş cinsinden çıkışı ifade eden formül yazılabilir.

Evrişimin diğer bir özelliği, birim dürtü işareti ile herhangi bir işaretin evrişiminin işaretin kendisini vermesidir:

$$u[n]*\delta[n] = u[n], \quad u(t)*\delta(t) = u(t). \tag{2.18}$$

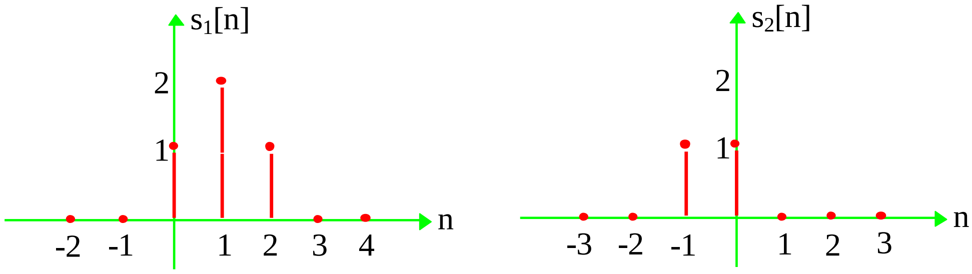
Bu da beklenen bir şeydir çünkü burada giriş işareti sanki dürtü cevabı yine birim dürtü olan yani çıkışı girişine eşit bir DZD sisteme girmiş gibi olacak ve sonuçta sistem çıkışında yine aynı işaret elde edilecektir. Böylece evrişim işleminin birim elemanın birim dürtü işareti olduğu görülür.

Ayrıca (belli bir N veya T için)

$$u[n]*\delta[n-N] = u[n-N], \quad u(t)*\delta(t-T) = u(t-T), \tag{2.19}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 2.6 $s_1[n]$ ve $s_2[n]$ işaretleri aşağıdaki gibi alınsın.



Şekil 2.2 $s_1[n]$ ve $s_2[n]$ işaretleri.

$s_1[n]*s_2[n]$ evrişimini bulmak için aşağıdaki toplam hesaplanmalıdır:

$$s_1[n]*s_2[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} s_1[N]s_2[n-N].$$

Bunu hesaplamanın bir yolu belli bir *n* noktasını ele alıp o noktadaki evrişim işareti değerini bulmak ve sonra diğer bütün *n* değerleri için aynı şeyi uygulamaktır. *n* noktasındaki evrişim değerini bulmak için ise N değişkenine göre $s_1[N]$ ve $s_2[n-N]$ işaretlerinin üst üste çizilerek, çarpımlarını ve daha sonra bu çarpım işaretinin ($(-\infty,\infty)$ aralığındaki) toplamını bulmak gerekir. Bilindiği gibi $s_2[n-N]$ işareti, N ekseninde $s_2[N]$ işaretinin dikey eksene göre simetriğinin alınıp (ya da döndürülüp) ($s_2[-N]$), n noktasına kaydırılmışıdır. Yukarıdaki işaretler sonlu aralıkta sıfırdan farklı değer aldığından belli bir nokta sayısı için bu işlem tekrar edilecektir. Bu durumda diğer noktalarda evrişim değeri sıfır olacaktır.

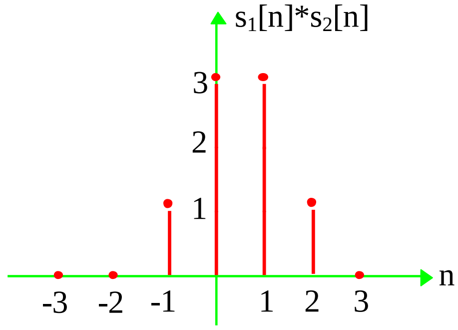
Diğer bir yol $s_1[n]$ ve $s_2[n]$ işaretlerini bilinen işaretler cinsinden yazmak ve daha sonra evrişim özellikleri yardımıyla sonucu bulmaktır. $s_1[n]$ ve $s_2[n]$ işaretleri birim dürtü işaretleri kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2],$$
$$s_2[n] = \delta[n+1] + \delta[n].$$

Şimdi $\delta[n-N_1]*\delta[n-N_2] = \delta[n-N_1-N_2]$ olduğu ve dağılma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} s_1[n]*s_2[n] &= \delta[n]*\delta[n+1] + \delta[n]*\delta[n] + \\ &\quad 2\delta[n-1]*\delta[n+1] + 2\delta[n-1]*\delta[n] + \\ &\quad \delta[n-2]*\delta[n+1] + \delta[n-2]*\delta[n], \\ &= \delta[n+1]+3\delta[n]+3\delta[n-1]+ \delta[n-2], \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.3 $s_1[n]$ ve $s_2[n]$ işaretlerinin evrişimi.

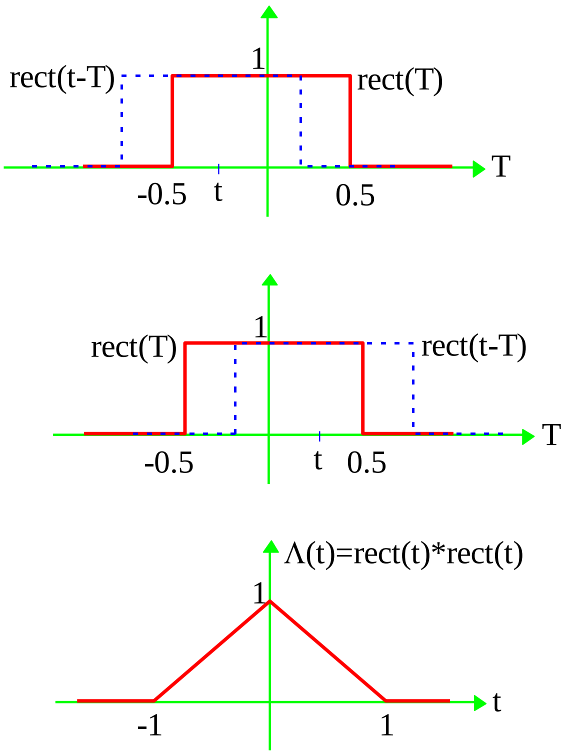
❑

Örnek 2.7 rect(t)*rect(t) evrişimini bulalım.

Burada hesap etmemiz gereken aşağıdaki integraldir:

$$rect(t)*rect(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} rect(T)rect(t-T)dT \,.$$

Bu integralin belli bir t anı için hesap edilmesinde önce T ekseninde rect(T) çizilir. Daha sonra rect(t-T) (rect(T)'nin dikey eksen etrafında simetriği alınıp t noktasına ötelenmişi) aynı şekil üzerine çizilerek, bunların çarpımı alınıp, toplam integrali bulunur. Bu işlem tüm t anları için yapılırsa evrişim hesaplanmış olacaktır. Bu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.4 rect(t)*rect(t) evrişiminin elde edilmesi.

Burada t<-1 ve t>1 için rect(T)rect(t-T) çarpımı ve dolayısıyla toplam integrali sıfır olacaktır, böylece bu aralıkta evrişim işareti sıfır olmalıdır. -1 ≤ t ≤ 0 için rect(T)rect(t-T) çarpımı -0.5 ≤ T ≤ t+0.5 aralığında 1 diğer yerlerde sıfır olan bir fonksiyondur. Bunun toplam integrali olan t+1 evrişim işaretinin bu bölgedeki değeri olacaktır. 0 ≤ t ≤ 1 için benzer olarak çarpım işareti t-0.5 ≤ T ≤ 0.5 aralığında 1 diğer yerlerde sıfır olacaktır. Bunun toplam integrali olan 1-t değeri evrişim işaretinin buradaki değeridir. Bu sonuçları toparlarsak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$rect(t) * rect(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ 1+t, & -1 \le t < 0, \\ 1-t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Görüldüğü üzere burada evrişim işleminin sonucu Λ(t) (üçgen) fonksiyonu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Burada dikkat edilecek bir husus evrişim işaretinin belli bir anını (mesela t=1 anını) ifade ederken rect(1)*rect(1) yazmamaktır, çünkü bunun bir anlamı olmaz. Evrişimin bulunabilmesi için ilgili zaman değişkeninin bilinmesi ve kullanılması gerekecektir. Bu yüzden evrişim yazılırken ilgili zaman değişkeni belirtilmelidir. Eğer t=1 anındaki değer ile ilgileniyorsak önce evrişim işaretini yeni bir fonksiyonla ifade ederiz daha sonra o fonksiyonu sabit bir argüman ile kullanabiliriz. Örneğin burada rect(1)*rect(1) yerine Λ(1) yazmak doğru olacaktır.

❑

Örnek 2.8 Herhangi bir işaret h(t) için υ(t)*h(t) evrişimini hesaplayalım.

Burada aşağıdaki integral hesaplanmalıdır:

$$\upsilon(t) * h(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} \upsilon(T) h(t-T) dT .$$

υ(t) işareti t<0 için sıfır, t>0 için 1 olduğundan sonuç aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\upsilon(t) * h(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} \upsilon(T) h(t-T) dT = \int_{T=0}^{\infty} h(t-T) dT = \int_{T=-\infty}^{t} h(T) dT .$$

Yani birim basamak ile bir işaretin evrişimi, o işaretin (-∞'dan t'ye kadar olan) integral işaretini vermektedir.

❑

2.3.2 Belleksiz DZD Sistemler

Bir sistemin hem belleksiz hemde DZD olduğunu düşünelim. Bu durumda ayrık zamanda δ[n] birim dürtü girişine karşı sistem ancak belli bir A için Aδ[n] çıkışını sağlayacaktır. Çünkü sistem DZD ve belleksiz olduğundan çıkışta n≠0 için sıfır girişi olduğundan sıfır çıkışı sağlamalıdır (aksi halde sıfırdan farklı sabit bir çıkış sağlıyor olamaz çünkü giriş iki katına çıkarılsa çıkış da iki katına çıkmalıdır). n=0'da ise sistem herhangi bir çıkış değeri (A) verebilir. Böyle bir sistem y[n]=Au[n] şeklinde (çıkış girişin belli bir sayı katı olarak) verilebilir. Örneğin işaret kuvvetlendirici bir anfi bu türden bir sistemdir.

Sürekli zamanda da benzer olarak belleksiz DZD bir sistem genel olarak y(t)=Au(t) şeklinde ifade edilebilir.

2.3.3 Nedensel DZD Sistemler

Bütün t anları için, sistemin t anından sonraki giriş değerleri t anındaki girişi etkilemiyor ise sistem nedenseldir. Ayrık zamanda DZD bir sistemde çıkış işareti, giriş işareti ve dürtü cevabına bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u[N] h[n-N] .$$

Burada sistemimizin nedensel olabilmesi için u[N]'in çarpanı N>n için sıfır olmalıdır, ancak bu şekilde nedensellik koşulu sağlanabilecek, sonraki girişler çıkış değerini etkilemeyecektir. Öyleyse N>n için h[n-N]=0 olmalıdır. Başka bir ifade ile ayrık zamanlı DZD bir sistemin nedensel olabilmesinin gerek ve yeter koşulu n<0 için h[n]=0 olmasıdır. Aslında bu beklenen bir sonuçtur çünkü h[n] birim dürtü cevabı olduğundan, n=0 anında dürtü değeri oluşuncaya kadar sistemin sıfır vermesi doğaldır (sistem DZD olduğundan sıfırdan farklı sabit bir değer de veremez). Aksi halde sistem sanki gelecek dürtü değerini önceden algılamış gibi olacaktır ki nedensel olduğundan bu mümkün değildir. n≥0 için ise sistem istediği gibi çıkış değerleri verebilir. DZD bir sistemde, n>0 için dürtü cevabı sıfır değil ise bu sistemin bellekli olduğunu gösterecektir.

Öyleyse ayrık zamanlı DZD nedensel bir sistemin çıkışı, giriş ve dürtü cevabı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y[n] = \sum_{N=-\infty}^{n} u[N]h[n-N] = \sum_{N=0}^{\infty} h[N]u[n-N]. \tag{2.20}$$

Bunun sebebi y[n]'in ancak şimdiki ya da geçmiş girişlere (u[N], N∈(-∞,n]) bağlı olmasıdır.

Sürekli zamanda ise benzer olarak DZD bir sistemin nedensel olmasının gerek ve yeter koşulu t<0 için h(t)=0 olmasıdır. Sürekli zamanlı DZD nedensel bir sistem için çıkış işareti, giriş işareti ve dürtü cevabı cinsinden aşağıdaki gibi verilebilecektir:

$$y(t) = \int_{T=-\infty}^{t} u(T)h(t-T)dT = \int_{T=0}^{\infty} h(T)u(t-T)dT. \tag{2.21}$$

2.3.4 SGSÇ Kararlı DZD Sistemler

Bir sistemin SGSÇ kararlı olabilmesi için tüm sınırlı giriş işaretlerine sınırlı çıkış vermesi gerekir. Ayrık zamanlı DZD sistemler için giriş çıkış ilişkisini tekrar yazarsak:

$$y[n] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} u[N]h[n-N].$$

Burada u girişinin mutlak değerinin B ile sınırlı olduğunu (|u(n)| ≤ B) düşünelim. Böylece elde edebileceğimiz en yüksek (örneğin pozitif) değeri giriş işaretini kullanarak elde etmeye, oluşturmaya çalışalım. Burada bizim yapmamız gereken h dürtü cevabını önceden inceleyerek istediğimiz (B ile sınırlı) bir giriş işareti oluşturmak ve böylece mümkün olan en yüksek çıkış değerini elde etmektir. Aslında bu kolay bir işlem olacaktır, çünkü yukarıdaki genel giriş çıkış ilişkisinden görülmektedir ki her u[N] değeri ile değişik bir h[] değeri çarpılmaktadır. Öyleyse biz her bir u[N]h[n-N] değerini tek tek en yüksek yaparsak sonuçta tüm toplam en yüksek olacaktır. Yani her h[n-N] değerini toplama en çok katkıda bulunduracak bir u[N] değeri ile çarpmalıyız. Burada u ve h işaretlerinin gerçel değerler aldığını düşünelim. Bu durumda yapılacak en akıllıca iş h[n-N] değeri pozitif ise u[N]=B seçmek, h[n-N] değeri negatif ise u[N]=-B seçmektir. Böylece u[N]h[n-N] çarpımı olabildiğince (pozitif) büyük yapılmış olacaktır. Öyleyse belli bir n için elde edebileceğimiz en yüksek değer

$$\sup_{|u|\le B}(y[n]) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} B\left|h[n-N]\right| = B\sum_{N=-\infty}^{\infty}\left|h[N]\right|,$$

olacaktır. Burada B sabit bir sayı olduğundan bulunan bu en yüksek değerin sınırlı olması için (sonsuz değer almaması için) aşağıdaki koşul gerçekleşmelidir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \,. \tag{2.22}$$

Böylece ayrık zamanlı DZD sistemlerin SGSÇ kararlılığı için gerek ve yeter koşul bu şekilde bulunmuş olur.

Sürekli zamanlı DZD sistemlerin SGSÇ kararlılığının gerek ve yeter koşulu da benzer şekilde aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \,. \tag{2.23}$$

Bu koşul da yukarıdaki mantık kullanılarak kolayca elde edilmiştir. Böylece DZD sistemlerin kararlılığını test etmek için dürtü cevabını kullanan yararlı ve kolay bir kriter elde edilmiş olur.

Örnek 2.9 $h(t)=Be^{-at}\upsilon(t)$ birim dürtü cevabı ile verilen sistemi ele alalım.

Bu sistemin SGSÇ kararlı olabilmesi için aşağıdaki integral sonucunun sonlu olması gerekir:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} |Be^{-at}\upsilon(t)| dt = |B| \int_{t=0}^{\infty} e^{-at} dt = \begin{cases} |B| a^{-1}, & a > 0, \\ \infty, & a \le 0. \end{cases}$$

Böylece ancak a>0 ise sistem SGSÇ kararlı olacaktır. Aksi halde sistem kararlı değildir.

❑

2.3.5 *DZD Sistemlerin Evrilebilirliği*

DZD sistemlerin diğer sistemlerde olduğu gibi evrilebilmesi için öyle bir evrik sistem bulunmalıdır ki orijinal sisteme ardışık bağlandığında ilk giriş son çıkıştan aynen elde edilmelidir. Orijinal sistemin girişi u[n], çıkışı y[n]; evrik sistemin girişi y[n], çıkışı v[n] ile gösterilirse, istenilen, her u[n] girişi için v[n]=u[n] eşitliğinin sağlanmasıdır. DZD sistemlerde bu dürtü girişi için sağlandığında tüm diğer girişler için de sağlanmış olacaktır, çünkü sistemimiz doğrusal ve zamanla değişmeyendir. Orijinal sistemimizin dürtü cevabı h[n] olsun. Öyleyse öyle bir $h_e[n]$ bulmalıyız ki

$$h[n]*h_e[n]=\delta[n],$$

koşulu sağlansın. Eğer bu koşulu sağlayan bir $h_e[n]$ bulabilirsek bu demektir ki orijinal sistemle bulduğumuz evrik sistem ardışık olarak bağlandığında bileşik sistemin dürtü cevabı δ[n] olacaktır. Bileşik sistem de DZD olduğundan, bunu ifade edebilecek yegane sistem $v[n]=u[n]$ dir. Yani sonuç olarak evirme işlemi tüm giriş işaretleri için sağlanmış olacaktır.

Sistemin gerçek zamanda evrilebilmesinin (GZE) koşulu ise evrik sistemin nedensel olmasıdır. Yani $n<0$ için $h_e[n]=0$ koşulunun sağlanmasıdır.

Sürekli zamanda da benzer şekilde, verilen bir orijinal sistem dürtü cevabına karşı

$$h(t)*h_e(t)=\delta(t),$$

özelliğini sağlayan bir $h_e(t)$ bulunabiliyor ise orijinal sistem, dürtü cevabı $h_e(t)$ olan bir evrik sistemle evrilebilir.

PROBLEMLER

P 2.1 Aşağıda ifade edilen sistemler doğrusal mıdır? Zamanla değişmeyen midir? Eğer dogrusal iseler dürtü cevaplarını ($h[N,n]$ ya da $h(T,t)$) bulunuz.

a) $y[n]=u[n]$, n çift; $y[n]=0$, n tek,
b) $y[n]=u[n]n^2$,
c) $y[n]=u[n^2]$,
d) $y(t)=u(t)\Lambda(t)$,
e) $y(t)=|u(t)|$.

P 2.2 $h(T,t)=T^2-2Tt+T-t+t^2$ dürtü cevabı ile verilen doğrusal sistem zamanla değişmeyen midir? Bu sistem nedensel midir? Kararlı mıdır? $u_1(t)=\mathrm{rect}(t)$ ve $u_2(t)=\Lambda(t)$ girişlerine ilişkin çıkışlar ne olur?

P 2.3 Aşağıda bazı DZD sistemlerin birim dürtü cevabı ve giriş işaretleri verilmiştir. İlgili çıkış işaretlerini elde ediniz.

a) $h[n]=2\delta[n-1]$, $u[n]=\sin[n]$,
b) $h[n]=3\delta[n]+\delta[n-1]$, $u[n]=\upsilon[n]$,
c) $h(t)=\mathrm{sinc}(t)$, $u(t)=2\delta(t)+\delta(t-2)$,
d) $h(t)=\mathrm{rect}(t-0.5)$, $u(t)=\Lambda(t)$,
e) $h(t)=\Lambda(t/2)\upsilon(t)$, $u(t)=\delta(t)+\upsilon(t-2)$.

P 2.4 Bir motor hız kontrol sistemi DZD bir sistem olarak modellenmiştir. Sistem kontrol girişine birim basamak ($u(t)=\upsilon(t)$) uygulandığında çıkış hızının $y(t)=\upsilon(t)(1-e^{-2t})$ şeklinde değiştiği gözlenmiştir. Bu sistemin birim dürtü cevabı nedir? Sisteme $u_1(t)=\mathrm{rect}(t-0.5)$ ve $u_2(t)=\Lambda(t)$ işaretleri uygulansaydı çıkış işaretleri ne şekilde olacaktı. Giriş ve çıkış işaretlerini alt alta çiziniz.

P 2.5 $h[n]=(\mathrm{sinc}(t/2))^2$ ile ifade edilen DZD sistem SGSÇ kararlı mıdır? Giriş işareti sınırlı iken ($|u[n]| \leq 1$) n=0'daki çıkış değerini ($y[0]$) olabildiğince yüksek yapmak için gerekli giriş işaretini ($u[n]$) ve elde edilen en yüksek değeri bulunuz.

P 2.6 Aşağıda dürtü cevapları ile ifade edilen DZD sistemlerin özelliklerini (belleksizlik, nedensellik, SGSÇ kararlılık) nedenleriyle birlikte belirleyiniz.

a) $h(t)=\mathrm{rect}(t)$,
b) $h(t)=\Lambda(t-1)$,
c) $h(t)=\upsilon(t)$,
d) $h[n]=\sin(n)\upsilon[n]$,
e) $h[n]=1/n$, $n>0$; $h[n]=0$, $n\leq 0$,
f) $h[n]=1/(n^2+1)$.

3. SÜREKLİ ZAMANLI İŞARETLER

3

Sürekli zamanlı işaretler gerçek dünya da birçok işareti ifade etmekte kullanılırlar. Küçük birer örnek olmak üzere bir cismin pozisyonu, hızı, ivmesi (sürekli) zamanın bir fonksiyonudur ve böylece bunlar sürekli zaman işaretleridir. Ayrıca bir devredeki ya da iletişim hattındaki gerilim ya da akım da sürekli zaman işaretleri olarak ele alınabilir.

3.1 İşaretlerin Dik Fonksiyonlarla İfade Edilmesi

Bir işaret kümesini ele alalım: …. diklik norm hata min yapacak değer. tamlık parseval teoremi.
Örnekler….

3.2 Sürekli Zamanlı Fourier Dönüşümü

3.2.1 Öz İşaretler

Matris analizinden bilindiği üzere (n×n) bir matris (A) için öz değerler (eigenvalues) (λ_i) ve öz vektörler (eigenvectors) (x_i) aşağıdaki koşulu sağlar:

$$Ax_i=\lambda_i x_i \, .$$

Bunun önemi bir vektörün bir matris ile çarpımının, çok daha kolay olan, bir vektörün bir sabit ile çarpımına indirgenmesidir. Öz değerlerin ayrık olduğunu düşünürsek, n özdeğere karşı n doğrusal olarak bağımsız (linearly independent) öz vektör bulabiliriz. Böylece herhangi bir (n boyutlu) vektör (x) bir kere özvektörler cinsinden

$$x=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \ ,$$

şeklinde (a_k'lar x'e bağlı sabit sayılar) yazıldığında, Ax ve $A^p x$ (p herhangi bir tam sayı) matris vektör çarpımları kolayca bulunabilir:

$$Ax=\sum_{k=1}^{n} a_k Ax_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k x_k \ ,$$

$$A^p x=\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k^{\ p} x_k \ .$$

Öz değerler ve öz vektörler daha birçok analiz aşamasında işimize yaramaktadır.

Acaba sistem teorisinde öz vektörlerin bir genelleştirmesini kullanabilir miyiz? Sistem ifadesini de bir tür giriş-çıkış ilişkisi gibi düşündüğümüzde, acaba bazı özel giriş işaretleri de çıkışta bir katsayı ile çarpılmış gibi gözükebilir mi?

Çarpımsallık ve toplamsallığa ihtiyacımız olacağından öncelikle doğrusal sistemleri ele alalım. Sistem giriş işareti $u(t)=\phi_i(t)$ işaretine karşılık çıkışta $y(t)=\lambda_i\phi_i(t)$ işareti (λ_i sabit kompleks sayı), yani giriş işaretinin sadece bir sayı ile çarpımı, elde ediliyorsa $\phi_i(t)$ işaretine *öz işaret (*ya da *öz fonksiyon)*, $\lambda_i$değerine de *öz değer* denir.

Sürekli zamanda doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) bir sistemin giriş çıkış ilişkisinin birim dürtü cevabı (h(t)) kullanılarak

$$y(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} h(T)u(t-T)dT\,,$$

şeklinde yazılabileceğini görmüştük. Burada herhangi bir s (kompleks) değeri için $\phi(t)=e^{st}$ işaretinin (genelde tüm üstel işaretlerin) DZD sistemlerde öz işaret özelliğini sağladığını görürüz. Yani $u(t)=e^{st}$ alındığında çıkış:

$$y(t) = \int_{T=-\infty}^{\infty} h(T)e^{s(t-T)}dT = e^{st} \underbrace{\int_{T=-\infty}^{\infty} h(T)e^{-sT}dT}_{H(s)} = H(s)e^{st} = H(s)u(t)\,,$$

olarak bulunmaktadır. Burada H(s) (s'e bağlı) sabit bir sayı olduğundan çıkış işareti girişin belli bir sayı katı olmaktadır. Öyleyse tüm DZD sistemler için e^{st} gibi üstel işaretler öz işaret ve H(s)'ler de ilgili öz değerlerdir. Burada s herhangi bir komplex sayı olabilir.

>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>

Herhangi bir vektörü öz vektörler cinsinden yazdığımız gibi, işaretleri de belki öz işaretler cinsinden yazabiliriz. Öncelikle sadece e^{jnwt} şeklindeki öz fonksiyonları düşünelim ve periyodik ya da belli bir sürede tanımlı işaretleri bunlar cinsinden yazalım.
??? yöntemini kullanırsak: …..
bunların tamlığı ve formülleri.
Ayrıca sin cos için…

3.2.2 Periyodik İşaretlerin İfade Edilmesi ve Fourier Serileri

3.2.3 Periyodik Olmayan İşaretlerin İfade Edilmesi ve Fourier Dönüşümü

3.3 Fourier Dönüşümü Özellikleri