



İST254: Mühendisler İçin İstatistik

Ders 6: Kesikli Olasılık Dağılımları

08.03.2013



Ders İçeriği



- ▶ Kesikli Düzgün (uniform) Dağılım
- ▶ Bernoulli Dağılımı
- ▶ Binom Dağılımı
- ▶ Çok Terimli Dağılım
- ▶ Geometrik Dağılım
- ▶ Negatif Binom Dağılımı
- ▶ Hipergeometrik Dağılım
- ▶ Poisson Dağılımı

08.03.2013



Kesikli Düzgün (uniform) Dağılım



- ▶ Alabileceği n farklı değerlerin gerçekleşme olasılıkları aynı ise, bu rastgele değişkene **kesikli düzgün rastgele değişken** denir.
- ▶ Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir

08.03.2013



Alıştırmalar



Bir zar atılıyor, X rastgele değişkeni üstte kalan yüzeydeki nokta sayısı olsun, X 'in beklenen değeri ve varnası kaçtır?

$$E(X) = \frac{1}{6} \times \sum_{x=1}^6 x = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \times \sum_{x=1}^6 x^2 = \frac{91}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \cong 2,92$$

08.03.2013



Bernoulli Dağılımı



- ▶ Örnek uzayda yalnızca iki örnek nokta varsa, yani X rastgele değişkeni için yalnız iki sonuç varsa, X rastgele değişkenine Bernoulli rastgele değişkeni denir.
- ▶ Örneğin:
 - Para atılması
 - Bir dükkandan içeri giren bir sonraki müşterinin cinsiyeti
 - Bir kimya deneyinin sonunda gözle görülür çökelti oluşup oluşmaması
- ▶ Genelde sonuçların biri 1 diğeri 0 olarak kodlanır. Dağılımın parametresi olan p deney sonucunun 1 olmasını, yani başarı olasılığını gösterir

08.03.2013



Bernoulli Dağılımı



Olasılık fonksiyonu:

$$f(x) = p^x \times (1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

Beklenen değer:

$$\mu_x = \sum x f(x) = p$$

Varyans:

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = p$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

08.03.2013



Binom (iki terimli) Dağılımı



- ▶ Özdeş ve birbirinden bağımsız n Bernoulli deneyi sonucundaki başarı sayısı X , **binom rastgele değişkenidir**.
- ▶ Binom dağılımının olasılık fonksiyonu:
- ▶ $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$
- ▶ $\mu_x = np$
- ▶ $\sigma_x^2 = np(1-p)$

08.03.2013



Alıştırmalar



Bir süpermarkette müşterilerin %35'i nakit ile, %65'i kredi kartı ile ödeme yapmaktadır. Sıradaki 10 müşterinin 2'sinin nakit ödeme yapma olasılığı nedir?

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,35^2 \times 0,65^8 \cong 0,176$$

08.03.2013



Alıştırmalar



180 yolcu kapasiteli bir uçağın tarifeli seferi için bir havayolları şirketi 183 bilet satmaktadır. Yolcuların %4'ünün uçuş günü check-in yaptırmadığı bilindiğine göre, bu havayolları şirketinin check-in için gelen en az bir yolcuyu uçağa alınamama olasılığı nedir?

$$\begin{aligned} X \text{ rastgele değişkeni check-in yapan yolcu sayısı, } A \\ \text{ olayı da en az bir yolcunun uçağa alınamaması olsun} \\ P(A) = P(X > 180) \\ = P(X = 181) + P(X = 182) + P(X = 183) \\ \cong 0,021 \end{aligned}$$

08.03.2013



Çok Terimli Dağılım



- ▶ E_1, E_2, \dots, E_k bir deneyin ayırık ve tümleyen sonuçları olsun. Deney n kez tekrar edilir, elde edilen E_i sonucu sayısı X_i rastgele değişkeni ile gösterilirse, X_1, X_2, \dots, X_k rastgele değişkenlerine **çok terimli rastgele değişken** denir.

$$\mu_{x_i} = np_i \quad \sigma_{x_i}^2 = np_i(1 - p_i)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

08.03.2013



Aliştırmalar



Periyodik araç muayenesi sonunda araçların %60'ına "kusursuz", %35'ine "hafif kusurlu", %4'üne "ağır kusurlu", %1'ine ise "emniyetsiz" raporu verilmektedir. Son bir saat içinde 4 araç muayene edilmiştir, 4 tür rapordan da birer adet verilmiş olma olasılığı nedir?

$$P(1,1,1,1) =$$

$$= \frac{4!}{1!1!1!1!} \times 0,6 \times 0,35 \times 0,04 \times 0,01 \cong 0,002$$

08.03.2013



Aliştırmalar



Bir şirketteki çalışanların %15'i ilkökul, %40'ı ortaokul veya lise, %35'i lisans veya önlisans, %10'u ise yüksek lisans mezunudur. Rastgele seçilen 5 çalışanın 2'sinin lisans veya önlisans, 3'ünün lise mezunu olma olasılığı nedir?

$$P(0,3,2,0) = \frac{5!}{3!2!} \times 0,40^3 \times 0,35^2 = 0,0784$$

08.03.2013



Geometrik Dağılım



- ▶ Bir rastgele değişkenin, **geometrik rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart $f(x) = (1 - p)^{x-1} \times p$ olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- ▶ Her birinin başarı olasılığının p olduğu Bernoulli deneyleri, başarı sağlanana kadar tekrar edilirse, yapılan deney sayısı bir geometrik rastgele değişken olur.
- ▶ $\mu_x = \frac{1}{p}$ $\sigma_x^2 = \frac{1-p}{p^2}$

08.03.2013



Alıştırmalar



Kızma birader oyununda her turda çift zar atılır ve oyuncunun taşını hareket ettirmeye başlaması için attığı zarlardan birinin 6 olması gerekir.

- a) Buna göre bir oyuncunun ilk taşını 3. turda oynatma olasılığı nedir?

$$p = \frac{11}{36}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{25}{36}\right)^{3-1} \times \frac{11}{36} = \frac{6875}{46656} \cong 0,147$$

- b) İlk iki tur taşını oynatamamış bir oyuncunun, taşını iki tur daha oynatamama olasılığı nedir?

$$P(X > 4 | X > 2) = \left(\frac{25}{36}\right)^2 = \frac{625}{1296} \cong 0,482$$

08.03.2013



Negatif Binom Dağılımı



- ▶ Bir rastgele değişkenin, **negatif binom rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart $f(x) = \binom{x-1}{k-1} (1-p)^{x-k} \times p^k$ olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- ▶ Her birinin başarı olasılığının p olduğu Bernoulli deneyleri, k 'inci başarı sağlanana kadar tekrar edilirse, yapılan deney sayısı bir negatif binom rastgele değişken olur.

$$\mu_x = \frac{k}{p} \quad \sigma_x^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

08.03.2013



Alıştırmalar



Bir turnuvarın her turunda oyuncular rastgele eşleştirilmekte ve 3. yenilgisini alan oyuncular elenmektedirler. Buna göre her maçı için kazanma olasılığı %75 olan bir oyuncunun 8. turda elenme olasılığı nedir?

$$f(8) = \binom{7}{2} (0,75)^5 (0,25)^3 \cong 0,0779$$

08.03.2013



Hipergeometrik Dağılım



- ▶ Bir rastgele değişkenin, **hipergeometrik rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart

$$f(x) = \frac{\binom{a}{x} \times \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.

- ▶ N elemanı bulunan bir kitleden a adedi A türünde olsun, bu kitleden yerine geri konmaksızın rastgele n adet çekildiğinde A türünden olanların sayısı hipergeometrik rastgele değişken olur.

$$\mu_x = \frac{n \times a}{N} \quad \sigma_x^2 = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

08.03.2013



Alıştırmalar



Erasmus Öğrencileri Klubünde 4 Alman, 3 İspanyol, 1 İtalyan ve 3 Fransız öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrencilerden rastgele seçilen 3'ü arasında 2 Alman öğrenci olma olasılığı nedir?

$$f(2) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{14}{55} \cong 0,255$$

08.03.2013



Poisson Dağılımı



- ▶ Bir rastgele değişkenin, **poisson rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.

- ▶ Belli bir olay birim zamanda ortalama λ sayıda gerçekleşiyorsa ve olayın gerçekleşmesi en son ne zaman gerçekleştiğinden bağımsızsa (hafızasızlık), gerçekleşen olay sayısı poisson rastgele değişkendir.

08.03.2013



Poisson Dağılımı



- ▶ $\mu_x = \lambda$ $\sigma_x^2 = \lambda$
- ▶ X bir binom rastgele değişken olsun; $n \rightarrow \infty$ 'a, $p \rightarrow 0$ 'a yaklaştıkça, $f(x)$, $\lambda = np$ parametrelili Poisson dağılımına yaklaşır.

08.03.2013



Alıştırmalar



- Bir itfaye istasyonuna gelen günlük ihbar sayısı $\lambda = 2$ parametrelili Poisson dağılımına sahiptir. a) Bir gün içinde 1 ihbar gelme olasılığı kaçtır?

$$f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2} \cong 0,271$$

- b) İki gün içinde toplam 5 ihbar gelme olasılığı nedir?

$$g(5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = \frac{128e^{-4}}{15} \cong 0,156$$

08.03.2013



Alıştırmalar



Bir sekreterin daktilo ile yazdığı bir kelimeye hata yapma olasılığı 0,002'dir.

a) 1000 kelimelik bir sözleşmeyi yazarken sekreterin 1 hata yapma olasılığı tam olarak kaçtır?

$$f(1) = \binom{1000}{1} 0,002^1 0,998^{999} \cong 0,27067038$$

b) 1000 kelimeye 1 hata yapılması ihtimali Poisson yaklaşması ile kaçtır?

$$f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \cong 0,27067056$$

08.03.2013
