İST254: Mühendisler İçin İstatistik

Ders 6: Kesikli Olasılık Dağılımları

08.03.2013

Ders İçeriği

- Kesikli Düzgün (uniform) Dağılım
- Bernoulli Dağılımı
- Binom Dağılımı
- Çok Terimli Dağılım
- Geometrik Dağılım
- Negatif Binom Dağılımı
- Hipergeometrik Dağılım
- Poisson Dağılımı

Kesikli Düzgün (uniform) Dağılım

- Alabileceği n farklı değerin gerçekleşme olasılıkları aynı ise, bu rastgele değişkene **kesikli düzgün rastgele değişken** denir.
- Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x_1, x_2, \ldots x_n \\ 0 & diğer\ yerlerde \end{cases}$$

şeklindedir

Alıştırmalar

Bir zar atılıyor, X rastgele değişkeni üstte kalan yüzeydeki nokta sayısı olsun, X'in beklenen değeri ve varnası kaçtır?

$$E(X) = \frac{1}{6} \times \sum_{x=1}^{6} x = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \times \sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{91}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \cong 2{,}92$$

Bernoulli Dağılımı

- Örnek uzayda yanlızca iki örnek nokta varsa, yani X rastgele değişkeni için yanlız iki sonuç varsa, X rastgele değişkenine Bernoulli rastgele değişkeni denir.
- Örneğin:
  - Para atılması
  - Bir dükkandan içeri giren bir sonraki müşterinin cinsiyeti
  - Bir kimya deneyinin sonunda gözle görülür çökelti oluşup oluşmaması
- Genelde sonuçların biri 1 diğeri 0 olarak kodlanır. Dağılımın parametresi olan p deney sonucunun 1 olmasını, yani başarı olasılığını gösterir

Bernoulli Dağılımı

Olasılık fonksiyonu:

$$f(x) = p^x \times (1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,1$$

Beklenen değer:

$$\mu_x = \sum x\, f(x) = p$$

Varyans:

$$E(X^2) = \sum x^2\, f(x) = p$$

$$\sigma_x{}^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Binom (İki terimli) Dağılımı

- Özdeş ve birbirinden bağımsız n Bernoulli deneyi sonucundaki başarı sayısı X, **binom rastgele değişkeni**dir.
- Binom dağılımının olasılık fonksiyonu:
- $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$
- $\mu_x = np$
- ${\sigma_x}^2 = np(1-p)$

Alıştırmalar

Bir süpermarkette müşterilerin %35'i nakit ile, %65'i kredi kartı ile ödeme yapmaktadır. Sıradaki 10 müşterinin 2'sinin nakit ödeme yapma olasılığı nedir?

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}35^{\,2} \times 0{,}65^{8} \cong 0{,}176$$

Alıştırmalar

180 yolcu kapasiteli bir uçağın tarifeli seferi için bir havayolları şirketi 183 bilet satmaktadır. Yolcuların %4'ünün uçuş günü check-in yaptırmadığı bilindiğine göre, bu havayolları şirketinin check-in için gelen en az bir yolcuyu uçağa alınamama olasılığı nedir?

X rastgele değişkeni check-in yapan yolcu sayısı, A olayı da en az bir yolcunun uçağa alınamamsı olsun

$$P(A) = P(X > 180)$$
$$= P(X = 181) + P(X = 182) + P(X = 183)$$
$$\cong 0{,}021$$

Çok Terimli Dağılım

- $E_1, E_2, \dots, E_k$ bir deneyin ayrık ve tümleyen sonuçları olsun. Deney n kez tekrar edilir, elde edilen E_i sonucu sayısı X_i rastgele değişkeni ile gösterilirse, $X_1, X_2, \dots, X_k$ rastgele değişkenlerine **çok terimli rastgele değişken** denir.
- $f(x_1, x_2, \dots x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} {p_1}^{x_1} {p_2}^{x_2} \dots {p_k}^{x_k}$
- $\mu_{x_i} = np_i \qquad {\sigma_{x_i}}^2 = np_i(1 - p_i)$

Alıştırmalar

Periyodik araç muayenesi sonunda araçların %60’ına ‘‘kusursuz’’, %35’ine ‘‘hafif kusurlu’’, %4’üne ‘‘ağır kusurlu’’, %1’ine ise ‘‘emniyetsiz’’ raporu verilmektedir. Son bir saat içinde 4 araç muayene edilmiştir, 4 tür rapordan da birer adet verilmiş olma olasılığı nedir?

$$P(1,1,1,1) =$$

$$= \frac{4!}{1!1!1!1!} \times 0,6 \times 0,35 \times 0,04 \times 0,01 \cong 0.002$$

Alıştırmalar

Bir şirketteki çalışanların %15'i ilkokul, %40'ı ortaokul veya lise, %35'i lisans veya önlisans, %10'u ise yükseklisans mezunudur. Rastgele seçilen 5 çalışanın 2'sinin lisans veya önlisans, 3'ünün lise mezunu olma olasılığı nedir?

$$P(0{,}3{,}2{,}0) = \frac{5!}{3!\,2!} \times 0{,}40^3 \times 0{,}35^2 = 0{,}0784$$

Geometrik Dağılım

- Bir rastgele değişkenin, **geometrik rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart
  $f(x) = (1-p)^{x-1} \times p$
  olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- Her birinin başarı olasılığının p olduğu Bernoulli deneyleri, başarı sağlanana kadar tekrar edilirse, yapılan deney sayısı bir geometrik rastgele değişken olur.
- $\mu_x = \frac{1}{p}$ $\qquad \sigma_x{}^2 = \frac{1-p}{p^2}$

Alıştırmalar

Kızma birader oyununda her turda çift zar atılır ve oyuncunun taşını hareket ettirmeye başlaması için attığı zarlardan birinin 6 olması gerekir.

a) Buna göre bir oyunucunun ilk taşını 3. turda oynatma olasılığı nedir?

$$p = \frac{11}{36}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{25}{36}\right)^{3-1} \times \frac{11}{36} = \frac{6875}{46656} \cong 0{,}147$$

b) İlk iki tur taşını oynatamamış bir oyuncunun, taşını iki tur daha oynatamama olasılığı nedir?

$$P(X > 4 | X > 2) = \left(\frac{25}{36}\right)^{2} = \frac{625}{1296} \cong 0{,}482$$

Negatif Binom Dağılımı

- Bir rastgele değişkenin, **negatif binom rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart $f(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k} \times p^k$ olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- Her birinin başarı olasılığının p olduğu Bernoulli deneyleri, k'ıncı başarı sağlanana kadar tekrar edilirse, yapılan deney sayısı bir negatif binom rastgele değişken olur.
- $\mu_x = \frac{k}{p}$ $\quad\quad$ ${\sigma_x}^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$

Alıştırmalar

Bir turnuvanın her turunda oyuncular rastgele eşleştirilmekte ve 3. yenilgisini alan oyuncular elenmektedirler. Buna göre her maçı için kazanma olasılığı %75 olan bir oyuncunun 8. turda elenme olasılığı nedir?

$$f(8) = \binom{7}{2}(0{,}75)^5(0{,}25)^3 \cong 0{,}0779$$

Hipergeometrik Dağılım

- Bir rastgele değişkenin, **hipergeometrik rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart

  $$f(x) = \frac{\binom{a}{x} \times \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

  olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- N elemanı bulunan bir kitleden a adedi A türünde olsun, bu kitleden yerine geri konmaksızın rastgele n adet çekildiğinde A türünden olanların sayısı hipergeometrik rastgele değişken olur.
- $\mu_x = \frac{n \times a}{N} \qquad {\sigma_x}^2 = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$

Alıştırmalar

Erasmus Öğrencileri Klübünde 4 Alman, 3 İspanyol, 1 İtalyan ve 3 Fransız öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrencilerden rastgele seçilen 3'ü arasında 2 Alman öğrenci olma olasılığı nedir?

$$f(2) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{7}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{14}{55} \cong 0,255$$

Poisson Dağılımı

- Bir rastgele değişkenin, **poisson rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart

  $$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

  olasılık fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- Belli bir olay birim zamanda ortalama λ sayıda gerçekleşiyorsa ve olayın gerçekleşmesi en son ne zaman gerçekleştiğinden bağımısızsa (hafızasızlık), gerçekleşen olay sayısı poisson rastgele değişkendir.

Poisson Dağılımı

- $\mu_x = \lambda \qquad \sigma_x{}^2 = \lambda$
- X bir binom rastgele değişken olsun; n ∞'a, p 0'a yaklaştıkça, $f(x)$, $\lambda = np$ parametreli Poisson dağılımına yaklaşır.

Alıştırmalar

Bir itfaye istasyonuna gelen günlük ihbar sayısı $\lambda = 2$ parametreli Poisson dağılımına sahiptir. a) Bir gün içinde 1 ihbar gelme olasılığı kaçtır?

$$f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2} \cong 0{,}271$$

b) İki gün içinde toplam 5 ihbar gelme olasılığı nedir?

$$g(5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = \frac{128e^{-4}}{15} \cong 0{,}156$$

Alıştırmalar

Bir sekreterin daktilo ile yazdığı bir kelimede hata yapma olasılığı 0,002'dir.

a) 1000 kelimelik bir sözleşmeyi yazarken sekreterin 1 hata yapma olasılığı tam olarak kaçtır?

$$f(1) = \binom{1000}{1} 0{,}002^{\,1} 0{,}998^{999} \cong 0{,}27067038$$

b) 1000 kelimede 1 hata yapılması ihtimali Poisson yakınlaşması ile kaçtır?

$$f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \cong 0{,}27067056$$