İST254: Mühendisler İçin İstatistik

Ders 7: Sürekli Olasılık Dağılımları

22.03.2013

Ders İçeriği

- Normal Dağılım
- Standart Normal Dağılım
- Binom Dağılımına Normal Yaklaşım
- Düzgün (uniform) Dağılım
- Üstel Dağılım
- Dağılımlar arası ilişkiler

Normal Dağılım

- Bir rastgele değişkenin, **normal rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- μ ve σ dağılımın parametreleridir.
- X normal dağılıma sahip bir rastgele değişkense $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.
- Normal dağılımın bir diğer adı da Gauss Dağılımıdır

Normal Dağılım

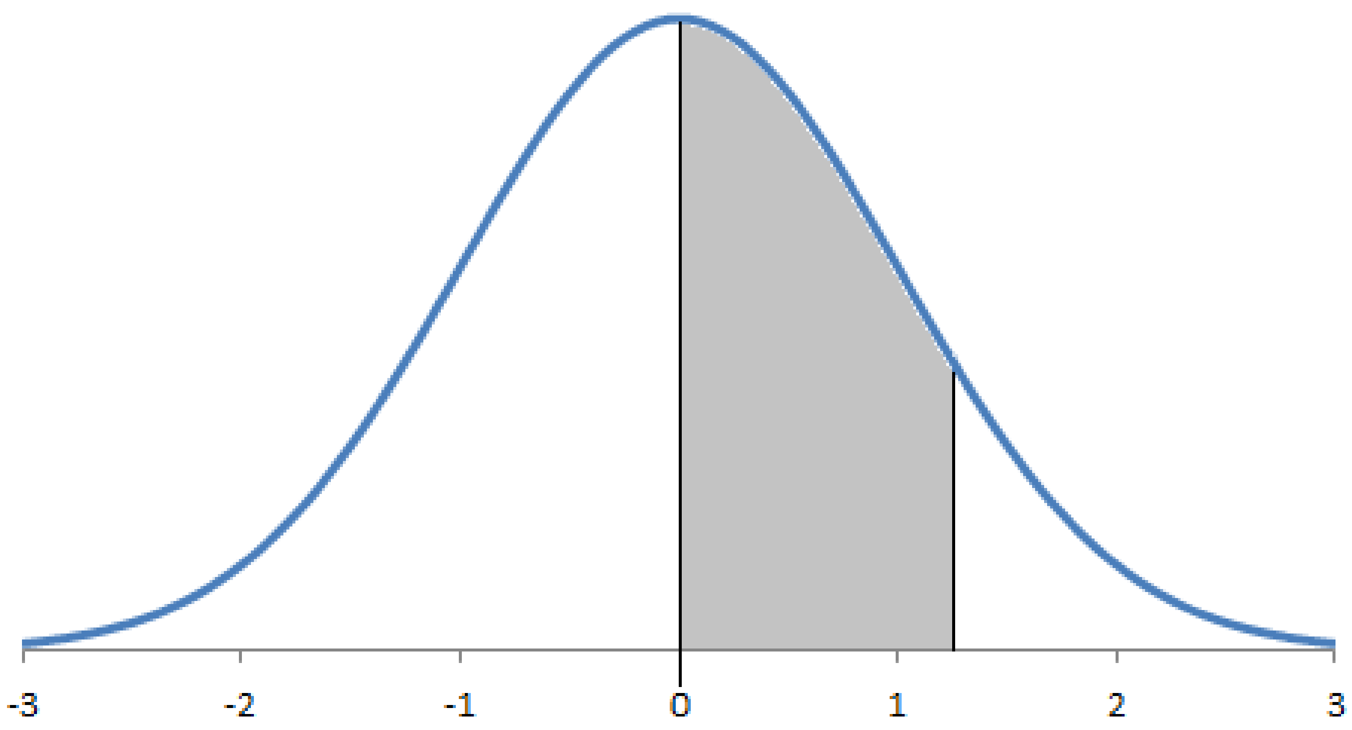
Bağımsız X rastgele değişkeni için:

- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2) \Rightarrow$
$$X_1 + X_2 = Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2)$$
- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2) \Rightarrow$
$$X_1 - X_2 = Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2)$$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$
$$aX + b = Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Standart Normal Dağılım

- $\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ parametrelerine sahip normal dağılıma **Standart Normal Dağılım** denir.
- Normal dağılımdan standart normal dağılıma geçiş için $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dönüşümü kullanılır.
- $\Phi(x)$ ile gösterilen dağılım fonksiyonunun kapalı şekil matematiksel ifadesi bulunmadığı için tablolar kullanılır.

Standart Normal Dağılım



Standart Normal Dağılım Tablosu

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441

Alıştırmalar

Z standart normal rastgele değişken olduğuna göre aşağıdaki eşitlikleri sağlayan k değerlerini bulunuz.

a) $P(Z < k) = 0{,}0817$

b) $P(Z > k) = 0{,}142$

c) $P(-1{,}24 < Z < k) = 0{,}814$

Alıştırmalar

a) $P(Z < k) = 0{,}0817$

$k = -1{,}39$

b) $P(Z > k) = 0{,}142$

$k = 1{,}07$

c) $P(-1{,}24 < Z < k) = 0{,}814$

$P(-1{,}24 < 0) = 0{,}3925$

$\Rightarrow P(0 < k) = 0{,}814 - 0{,}3925 = 0{,}4215$

$\Rightarrow k = 1{,}42$

Alıştırmalar

X, ortalaması 20, standart sapması 5 olan normal rastgele değişkendir. Buna göre;

a) X'in 12'den küçük olma olasılığı nedir?

b) X'in 21'den küçük olma olasılığı nedir?

c) X, 0,85 olasılıkla hangi değerden büyük olur?

Alıştırmalar

a) X'in 12'den küçük olma olasılığı nedir?

$$P(X < 12) = P\left(Z < \frac{12 - 20}{5}\right) = P(Z < -1{,}6)$$
$$= 0{,}5 - 0{,}4452 = 0{,}0548$$

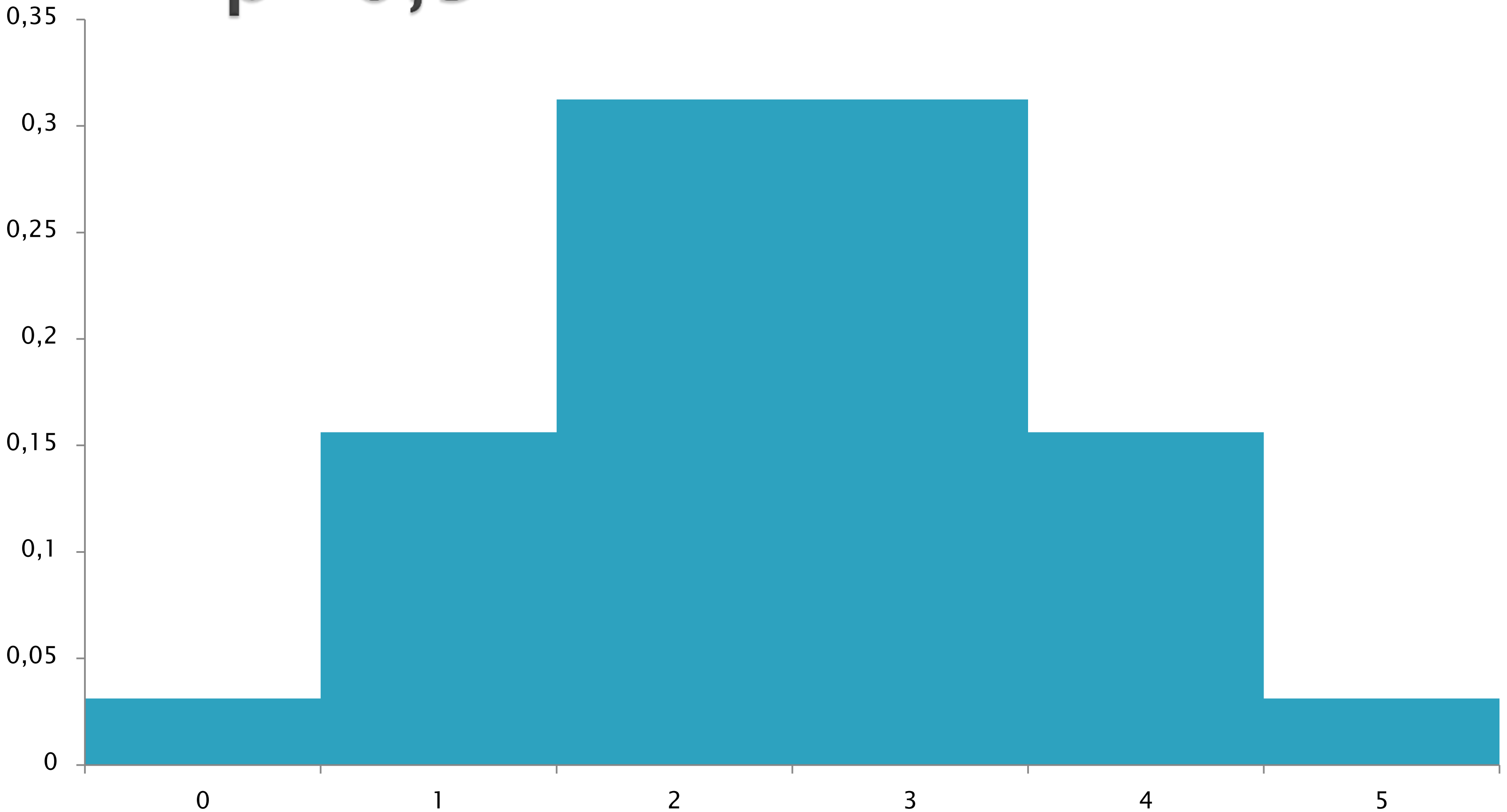
b) X'in 21'den küçük olma olasılığı nedir?

$$P(X < 12) = P\left(Z < \frac{21 - 20}{5}\right) = P(Z < 0{,}2)$$
$$= 0{,}5 + 0{,}0793 = 0{,}5793$$

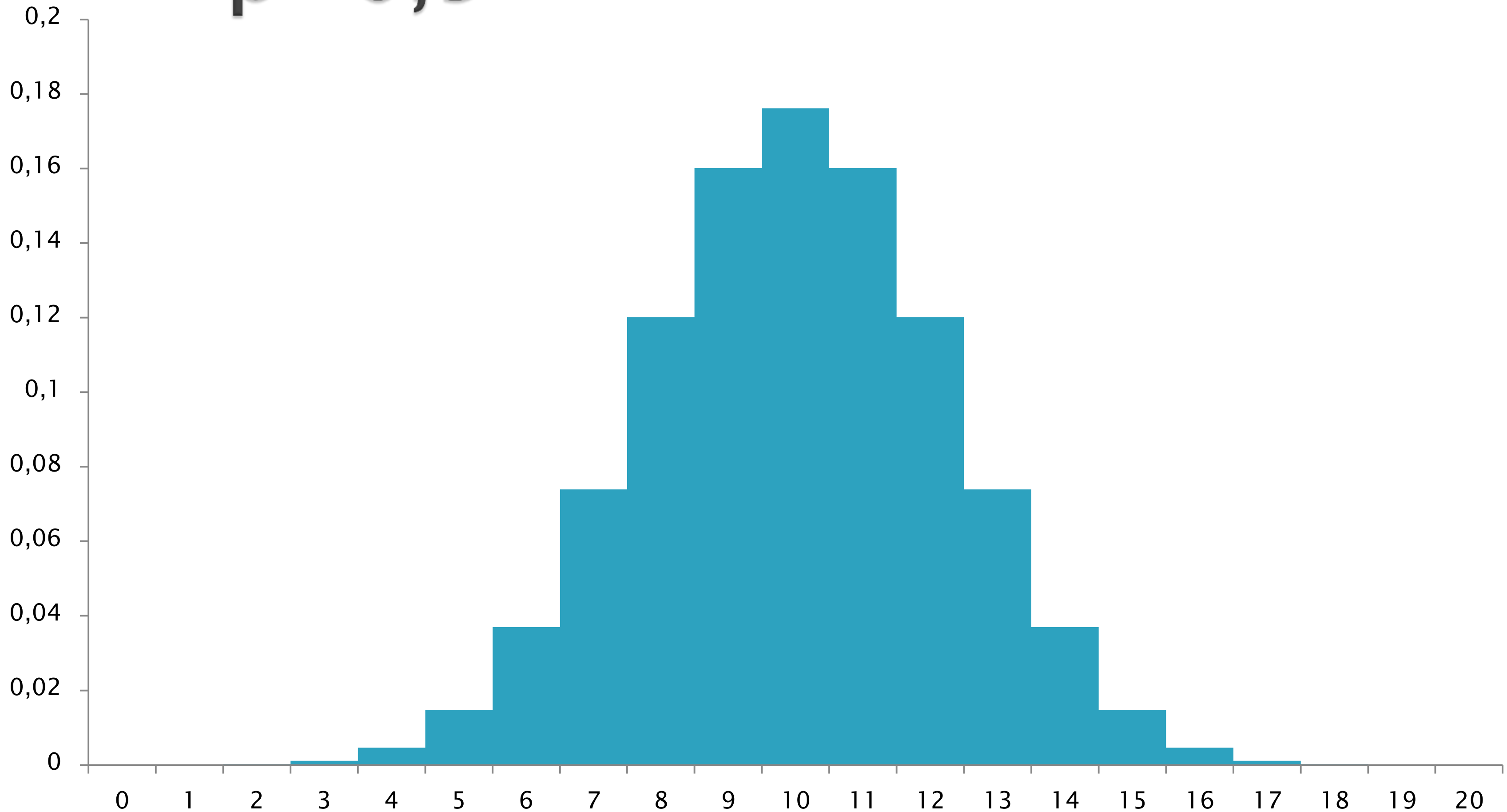
c) X, 0,85 olasılıkla hangi değerden büyük olur?

$$P(Z > 1{,}04) = 0{,}8508 \Rightarrow P(X > 1{,}04 \times 5 + 20) = 0{,}8508$$
$$\Rightarrow P(X > 25{,}2) = 0{,}8508$$

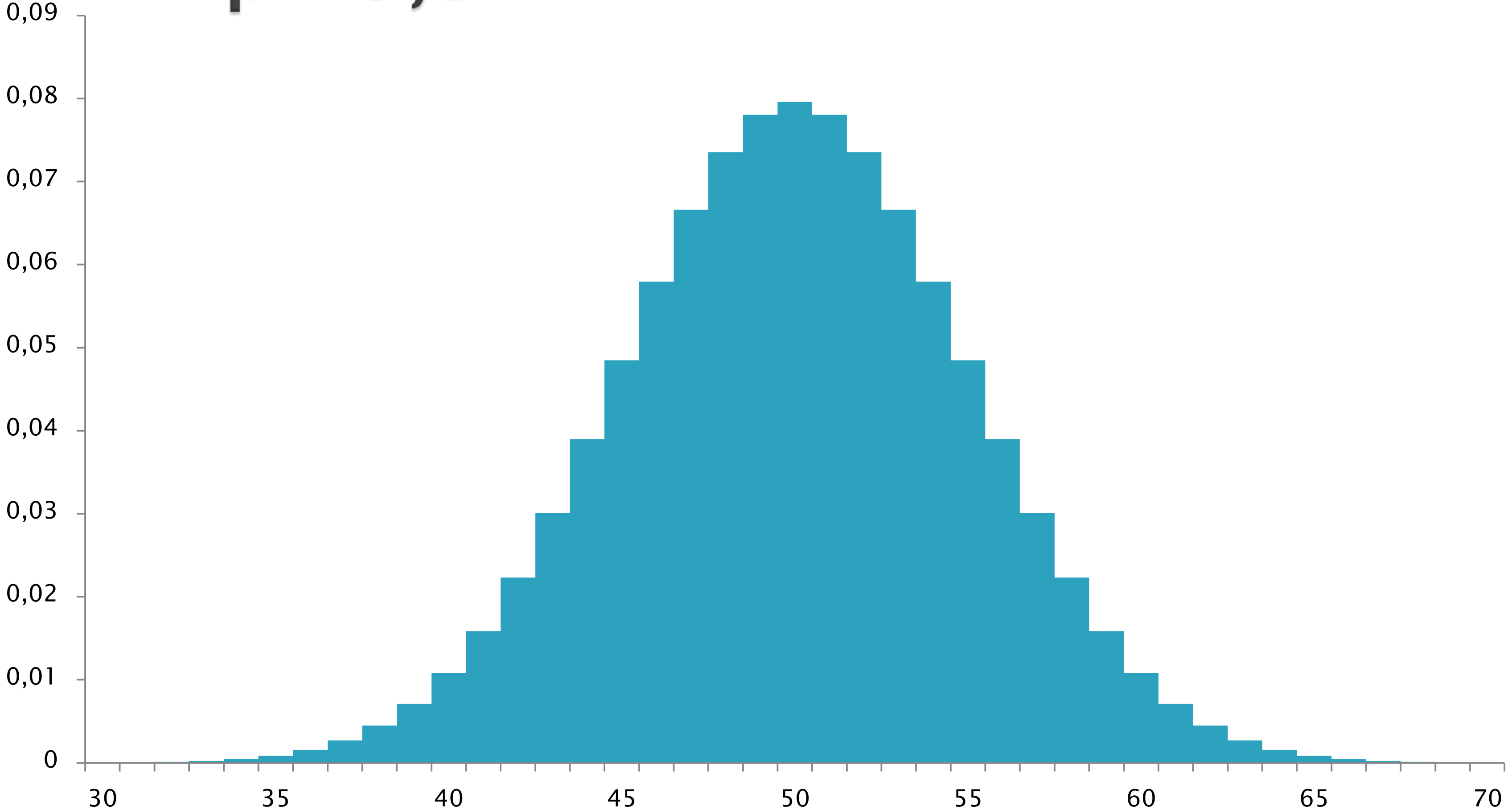
Binom Dağılımına Normal Yaklaşım n=5 p=0,5



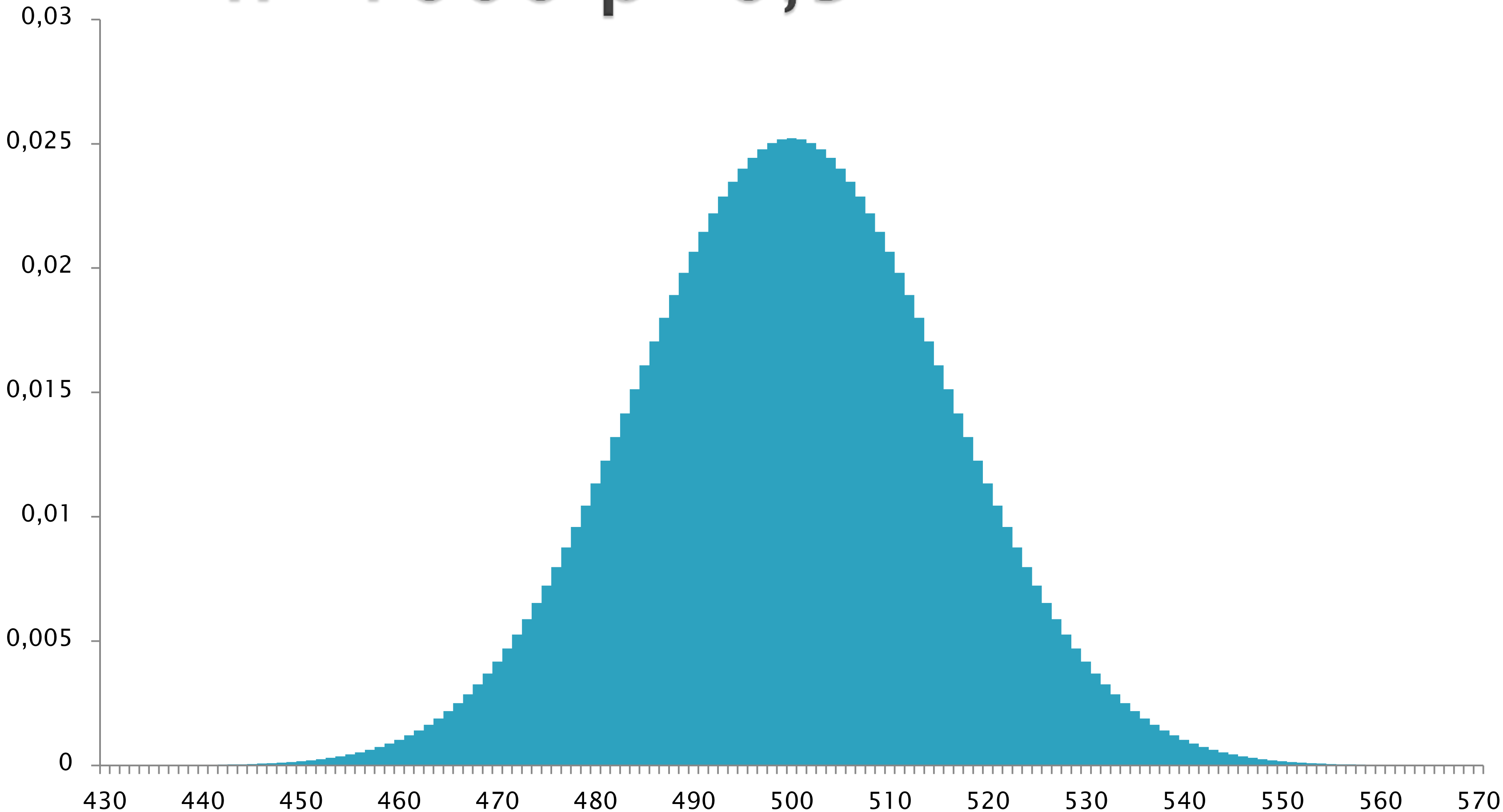
Binom Dağılımına Normal Yaklaşım n=20 p=0,5



Binom Dağılımına Normal Yaklaşım n=100 p=0,5



Binom Dağılımına Normal Yaklaşım n=1000 p=0,5



Binom Dağılıma Normal Yaklaşım

- n yeterince büyüdüğü zaman binom dağılımı normal dağılıma yaklaşır.
- Binom rastgele değişken X standart normal Z'ye $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ dönüşümü ile çevrilir.
- Normal yaklaşım kullanıldığında dağılım fonksiyonu:

$$P(X \leq x) \cong P\left(Z < \frac{x+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- $np(1-p) > 5$ için bu yaklaşım iyi sonuç verir

Alıştırmalar

Bir zar 1000 kez atılıyor, 6 gelme sayısının 150 ile 180 arasında (150 ve 180 dahi) olma olasılığı nedir?

Alıştırmalar

Bir zar 1000 kez atılıyor, 6 gelme sayısının 150 ile 180 arasında (150 ve 180 dahi) olma olasılığı nedir?

$$P(150 \leq X \leq 180) \cong$$

$$P\left(\frac{149{,}5 - \frac{1000}{6}}{\sqrt{1000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} \leq Z \leq \frac{180{,}5 - \frac{1000}{6}}{\sqrt{1000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}\right) =$$

$$P(-1{,}457 \leq Z \leq 1{,}173) =$$

$$0{,}4279 + 0{,}3790 = 0{,}8069$$

Düzgün Dağılım

- Bir rastgele değişken, sadece $[A;B]$ aralığındaki değerleri alabiliyor ve bu aralıktaki tüm değerler için eşit olasılığa sahipse; buna **düzgün rastgele değişken** denir.
- Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B-A} & A\le X\le B\\ 0 & diğer\ yerlerde\end{cases}$$

şeklindedir

- $\mu=\frac{A+B}{2}\qquad \sigma^2=\frac{(B-A)^2}{12}$

Alıştırmalar

Bir metro durağından her 5 dakikada bir tren kalkmaktadır. Bir yolcunun geliş zamanı iki trenin kalkışı arasındaki 5 dakikalık süreye eşit olarak dağıldığına göre

a) yolcunun trenin kalkmasını 3 dakikadan fazla bekleme olasılığı nedir?

b) yolcunun bekleme süresinin standart sapması kaç dakikadır?

Alıştırmalar

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 \leq X \leq 5 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$

$$P(X > 3) = \int_{3}^{\infty} f(x)dx = \int_{3}^{5} \frac{1}{5} dx = \frac{2}{5}$$

b) $\sigma^2 = \frac{(5-0)^2}{12} = \frac{25}{12}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cong 1{,}44$$

Üstel Dağılım

- Bir rastgele değişkenin, **üstel rastgele değişken** olması için yeter ve gerekli şart
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & 0 < X \\ 0 & diğer\ yerlerde \end{cases}$$
olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmasıdır.
- α dağılımın parametresidir. Oran olarak adlandırılır.
- $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & 0 < X \\ 0 & diğer\ yerlerde \end{cases}$
- $\mu = \frac{1}{\alpha} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}$

Alıştırmalar

Bir hastanenin acil servisinde bir sonraki hastanın gelmesine kadar geçen süre üstel dağılım göstermektedir. Acil servise saatte ortalama 5 hasta geldiğine göre;

a) bir sonraki hastanın 8 dakika içerisinde gelme olasılığı nedir?

b) 20 dakika içinde hiç hasta gelmeme olasılığı nedir?

Alıştırmalar

a) $\mu = 12$ dakika $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{12}$

$$P(x<8) = \int_0^8 \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}} dx = 1 - e^{-\frac{8}{12}} \cong 0{,}487$$

b) $P(x > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}} dx = e^{-\frac{20}{12}} \cong 0{,}189$

Dağılımlar Arası İlişkiler

Genel Dağılım	Koşul	Özel Durum
Negatif Binom	$k = 1$	Geometrik
Binom	$n = 1$	Bernoulli
Normal	$\mu = 0, \sigma = 1$	Standart Normal

Dağılımlar Arası İlişkiler

Dağılım	Koşul	Yaklaşık Dağılım	Dönüşüm
Hipergeometrik	$\frac{n}{N} \approx 0$	Binom	$p = \frac{a}{N}$
Binom	$n \to \infty$	Poisson	$\lambda = np$
Binom	$n \to \infty$	Normal	$\mu = np$ $\sigma^2 = np(1-p)$
Poisson	$n \gg 30$	Normal	$\mu = \sigma^2 = \lambda$