Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz III	
İmza:	Sınav Tarihi: 8 Ocak 2017	

Her soru eşit değerdedir. Yalnızca 5 soruyu cevaplayınız. Süre 90dk.

1. a) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}dx$ ve b) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$ integrallerinin yakınsaklığını inceleyin.
(Hatırlatma: Her $x>0$ ve her $a>0$ için $\ln x < \frac{1}{a}x^a$ olur.)

Çözüm: a)

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}dx \le \int_1^\infty \frac{2x^{1/2}}{x^{5/2}}dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx$$

Son integral $p=2$ integralidir ve $[1,\infty)$ aralığında yakınsar. Kıyaslama ölçütüne göre $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}dx$ integrali yakınsar.
b) İntegral ıraksar çünkü

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx = \int_1^\infty \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\left(\lim_{R\to\infty}\ln R - \ln 1\right) = \infty.$$

2. $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini yazın ve serinin yakınsama aralığını belirleyin.

Çözüm: $|x|<1$ olsun.

$$\arctan x = C + \int\left(\frac{d}{dx}\arctan x\right)dx = C + \int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = C + \int\left(\frac{1}{1-(-x^2)}\right)dx = C + \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$\arctan x = C + \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{2n}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$x=0$ koyarsak $C=0$ buluruz. $\arctan x$'in Taylor serisi $\frac{1}{1+x^2}$ ile o da $\frac{1}{1-x}$ ile aynı yakınsaklık yarıçapına sahiptir.

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|<1$$

$\arctan x$'in Taylor serisi alterne seri testi nedeniyle $x=\pm1$ için de yakınsar. Abel Teoremi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|\le 1$$

olduğunu söyler.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$, $x \geq 0$ serisinin düzgün yakınsadığı bir aralığı belirleyin.

Çözüm: Seri $0 \leq x < 1$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$ olduğu için yakınsamaz. $x = 1$ için de aynı sebeple yakınsamaz. Her $a > 1$ için serinin $[a,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görelim. $x > a$ için $1 + x^n \geq 1 + a^n \geq a^n$ olduğundan

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}, \qquad x > a$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ serisi yakınsak olduğundan Weirstrass-M testi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ serisinin $[a,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu söyler. Serinin terimleri $x \geq a$ için sürekli olduğundan ve seri $x \geq a$ için düzgün yakınsak olduğundan, $x \geq a$ için süreklidir. Bu her $a > 1$ için geçerli olduğundan, seri $x > 1$ için süreklidir.

4. $f_n(x) = \dfrac{\cos n^3 x}{n^2 x}$ fonksiyonun $x \in (0,1)$ aralığında noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm:

$$0 \leq \left| f_n(x) \right| \leq \frac{1}{n^2 x}$$

olduğundan sıkıştırma teoremi bize her $x > 0$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \equiv f(x)$ olduğunu söyler.

$$\left\| f_n - f \right\| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| = |n \cos 1| \to \infty$$

oluduğundan dizi düzgün yakınsamaz.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n!} x^{n!}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulun.

Çözüm: Serinin katsayıları $a_n = 0$ eğer $n \neq m!$ ve $a_{n!} = 2^{n!}$ olur.

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup |a_{n!}|^{1/n!}} = \frac{1}{\limsup |a_{n!}|^{1/n!}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 2} = \frac{1}{2}.$$

Seri $x = \frac{1}{2}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ ve ıraksak, $x = -\frac{1}{2}$ için ise $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n!} = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1$ ve ıraksak olur.

6. $f \in PC[-\pi,\pi]$ ve 2π periyodik bir fonksiyon olsun. $S_N(x)$ ise f'in Fourier serisinin kısmi toplamı olsun. Her $N \in \mathbb{N}$ için

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t)\,dt, \qquad D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nt$$

olduğunu gösterin. (Hatırlatma: $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B)$)

Çözüm: Bakınız ders notları.

7. $f(x) = \pi - |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ fonksiyonun Fourier serisinin yazın. Fourier serisinin noktasal limitini belirleyin. $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ bağıntısını gösterin.

Çözüm: Fonksiyon çift olduğundan $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ olur.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}) = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\pi - |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, \qquad |x| \le \pi$$