# Fonksiyon Dizilerinde Yakınsaklık Alıştırmaları

A. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ise $\sup(A)$, $\inf(A)$ tanımlarını yazınız.

B. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sup\{x^n : x \in (-1,1)\} = 1$ olduğunu gösterin.

C. Her $x \in (-1,1)$ için $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olduğunu gösteriniz.

D. Her $x > 1$ için $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ olduğunu gösteriniz.

E. Her $x > 1$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = \infty$ olduğunu gösteriniz.

F. Dirichlet Teoremini yazınız.

G. Dirichlet Teoremini kullanarak $f_n(x) = \sin(n\pi x)$, $x \in [0,1]$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

H. Bir fonksiyon dizisinin noktasal yakınsamasının tanımını yazınız.

I. Bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsamasının tanımını yazınız.

J. İspatlayın veya karşı örnek verin:
   - (a) Düzgün yakınsayan fonksiyon dizileri noktasal da yakınsar.
   - (b) Noktasal yakınsayan fonksiyon dizileri düzgün de yakınsar.
   - (c) Sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizinin noktasal limiti süreklidir.
   - (d) Sınırlı fonksiyonlardan oluşan bir dizinin noktasal limiti sınırlıdır.
   - (e) Sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizinin düzgün yakınsak limiti süreklidir.
   - (f) Sınırlı fonksiyonlardan oluşan bir dizinin düzgün yakınsak limiti sınırlıdır.
   - (g) Düzgün sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak limiti düzgün süreklidir.
   - (h) Süpnormu 1 olan bir fonksiyonlar dizisi süpnormu 1 olmayan bir fonksiyona yakınsayabilir.

K. Düzgün sürekliliğin tanımını yazınız. Düzgün sürekli olan bir fonksiyon ve olmayan bir fonksiyon örneği verin. Verdiğiniz örnekleri ispatlayınız.

L. Dini Teoremini yazınız.

M. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olsun. $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ dizisinin $f$'ye düzgün yakınsadığını gösterin. Eğer $f$ düzgün sürekli değil de sadece sürekliyse bunun doğru olmayabileceğini kanıtlayın.

N. Sürekli $f_n : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f$'ye düzgün yakınsasın. $\{x_n\}$ $A$'nın herhangi bir dizisi olsun. Eğer $x_n \to x \in A$ ise $f_n(x_n) \to f(x)$ olduğunu gösterin. Eğer yakınsama düzgün değilse, sonucun doğru olmayabileceğini gösterin.

O. Eğer $f_n$ fonksiyonlar dizisi $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, $\|f_n\|$ sayı dizisinin de $\|f\|$'e yakınsadığını gösterin.

P. Aşağıdaki fonksiyonların noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyin.
   - (1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (2) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.
   - (3) $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$.
   - (4) $f_n(x) = x^n$, $x \in (0, 1-\epsilon)$, $0 < \epsilon < 1$ sabit.
   - (5) $f_n(x) = n^\alpha x^n$, $x \in (-1,1)$, $\alpha > 0$ sabit.
   - (6) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in (0,1)$.
   - (7) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $x \in [0,\infty)$.
   - (8) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (9) $f_n(x) = \dfrac{x^3}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (10) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}$, $x \in [0,1]$.
   - (11) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}$, $x \in [0,1]$.
   - (12) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.
   - (13) $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.
   - (14) $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0, 1-\epsilon]$, $\epsilon > 0$ sabit.
   - (15) $f_n(x) = n^2x^n(1-x)^3$, $x \in [0,1]$.
   - (16) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0,1]$.
   - (17) $f_n(x) = (x - 1/n)^2, x \in [0,1]$.
   - (18) $f_n(x) = \dfrac{e^{-x^2/n}}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (19) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (20) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in [0,1]$.
   - (21) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$, $x \in [0,1]$.
   - (22) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } |x| \geq 1/n \\ n|x|, & \text{eğer } |x| < 1/n \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (23) $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx, & \text{eğer } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{eğer } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$.
   - (24) $f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{eğer } 0 \leq x \leq 1/n \\ \frac{n}{n-1}(1-x), & \text{eğer } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$.
   - (25) $f_n(x) = \arctan \dfrac{2x}{x^2+n^2}$, $x \in [0,1]$.
   - (26) $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x^n}{n}\right)$, $x \in [0,1]$.
   - (27) $f_n(x) = \sin^n x \cos x$, $x \in [0,\pi]$.
   - (28) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{nx}$, $x \in (0,1)$.
   - (29) $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (30) $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.
   - (31) $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$, $x \in [-M, M]$, $M > 0$ sabit.

Q. $a_n = (1 + \frac{\alpha}{n})^n$, $\alpha > 0$ sabit olsun. $a_{n+1} > a_n$ olduğunu gösterin.

R. Dini Teoremindeki monotonluk şartı kaldırılırsa, iddianın yanlış olabileceğine bir örnek verin.

S. Dini Teoremindeki kompaktlık şartı kaldırılırsa, iddianın yanlış olabileceğine bir örnek verin.

## Reel serilerle ile ilgili bilmeniz gerekenler

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dizisi yakınsaksa yakınsak, değilse ıraksak denir.
(2) $\sum a_n$ serisine $\sum |a_n|$ serisi yakınsaksa mutlak yakınsak denir.
(3) Mutlak yakınsak seriler yakınsaktır.
(4) Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise seri ıraksaktır.
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisine p-serisi denir. $p = 1$ durumuna, yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine harmonik seri denir. p-serileri $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$ serisine teleskopik seri denir. Teleskopik seriler eğer $a_n$ yakınsak bir dizi ise $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$ sayısına yakınsar. Eğer $a_n$ dizisi yakınsak değilse seri ıraksar.
(7) $\sum_{n=0}^{\infty} x^k$ serisine geometrik seri denir. Bu seri $|x| < 1$ ise $\frac{1}{1-x}$ sayısına yakınsar. Eğer $|x| \geq 1$ ise ıraksar.
(8) Karşılaştırma Ölçütü. Eğer $0 \leq a_n \leq b_n$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ olur.
(9) Limit Karşılaştırma Ölçütü. $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ ve $L = \lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ olsun.
- Eğer $0 \leq L < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsaksa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsar.
- Eğer $0 < L \leq \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaksa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksar.
- Eğer $0 < L < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsarsa yakınsar.

(10) Kök Testi. $a_n \in \mathbb{R}$, $r = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/k}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
- $r < 1$ ise mutlak yakınsaktır.
- $r > 1$ ise ıraksaktır.

Not: Eğer bir dizi için $\lim_{n\to\infty} x_n$ varsa $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ olur.
(11) D'Alambert Oran Testi. $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ (n yeterince büyükse), $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
- $R < 1$ ise mutlak yakınsaktır.
- $r > 1$ ise ıraksaktır.

(12) Abel bağıntısı.
(13) Cauchy sıklaştırma ölçütü. $a_n \geq 0$ azalan bir dizi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ yakınsarsa yakınsar.

## Fonksiyon Serilerinde Yakınsaklık Alıştırmaları

A. Bir fonksiyon serisinin noktasal ve düzgün yakınsaklığının tanımlarını yazınız.
B. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi $x \in (-1, 1)$ aralığında noktasal yakınsak ama düzgün yakınsak değildir. Aynı seri her $0 < a < 1$ için $[-a, a]$ aralığında düzgün yakınsaktır.
C. exp, cos ve sin fonksiyonlarının serileri olan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ serileri her $R > 0$ için $[-R, R]$ aralığında (dolayısıyla $\mathbb{R}$nin her sınırlı alt kümesinde) düzgün süreklidir.
D. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^x}{k^3+\sqrt{k}}$ serisinin $(-\infty, 2)$ aralığında noktasal yakınsadığını gösteriniz. (İpucu: $\sum_{k=1} \frac{1}{(k+2)^{3-x}}$ serisi ile limit karşılaştırma testi uygulayın.)
E. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ serisinin $(-\infty, 0)$ aralığında yakınsadığını, $[0, \infty)$ aralığında ıraksadığını gösteriniz. (İpucu: Kök testini uygulayın.)
F. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ serisinin her $x \in \mathbb{R}$ için noktasal yakınsadığını gösteriniz. (İpucu: $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$ bağıntısını ve Abel bağıntısını kullanın.)
G. Verilen serilerin hangi $x$'ler için noktasal yakınsadığını bulunuz.
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$
(7) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^n$
(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{e^{n^2|x|}}$
(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$
(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+nx^2)}{nx^n}$

H. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ serisinin $(1, \infty)$ aralığında düzgün yakınsamadığını ama her $a > 1$ için $[a, \infty)$ aralığında düzgün yakınsadığını gösteriniz.
I. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(n+x)}$ serisinin her $x \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \dots\}$ için yakınsadığını gösteriniz. Aynı serinin $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsak olmadığını ama her $M > 0$ için $[0, M]$ aralığında düzgün yakınsadığını