ANALİZ III

DERS NOTLARI

Prof. Dr. Nurettin ERGUN

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa No

T e ş e k k ü r

Marmara Üniversitesinde son yıllarda düzenli olarak verdiğim Analiz III dersinin ders notları, öğrencilerin yararlanması amacıyla burada biraraya getirilmektedir. El yazması metni Latex'de özen ve titizlikle yazan sevgili öğrencim Doç.Dr. Faruk Uçar ile Durmuş Albayrak'a ve bu notlar yazılırken gösterdiği destek ve sabır için sevgili eşim Yasemin Ergun'a içtenlikle teşekkür ederim. Bu notları, babamın sevgili küçük kardeşi olan, yaşama 1919 yılında henüz 11 yaşında veda eden, kendisini mahzun fotograflarından tanıdığım,onunla aynı adı taşıdığım sevgili amcam H.Nurettin'e ithaf ederim.

Nurettin Ergun

Aralık 2014

Doğanın muazzam kitabının dili matematikdir.

Galileo Galilei

Bölüm 1

Fonksiyon Dizi ve Serileri

Fonksiyon dizilerinde belli başlı iki tür yakınsaklık vardır: Noktasal yakınsama ve düzgün yakınsama. Bu bölümde bu kavramlarla ilgileneceğiz.

Önce gerekli olduğu için supremum ve infimum bilgilerini anımsayalım ve örnekler verelim. Bilindiği gibi, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verildiğinde, ancak ve yalnız

$$i)\ x \leqslant \alpha_0\ (\forall x \in A) \qquad , \qquad ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \alpha_0 - \varepsilon < x_\varepsilon$$

koşullarını gerçekleyen bir $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı varsa (tanımlanabilirse) $\sup A = ek\ddot{u}s\ A = \alpha_0$ yazılır. $i)$ koşulu $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ gerçel sayısının A kümesinin bir üst sınırı olduğunu, $ii)$ koşulu ise ondan daha küçük hiçbir gerçel sayının A için bir üst sınır **olmadığını** söyler, çünkü $y_0 < \alpha_0$ ise uygun bir $\varepsilon_0 > 0$ için $y_0 < y_0 + \varepsilon_0 < \alpha_0 - \varepsilon_0$ bularak $(dikkat\ : 0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\alpha_0 - y_0}{2}$ almak yeterlidir) ve $ii)$ kullanılarak $y_0 < \alpha_0 - \varepsilon_0 < x_0$ gerçekleyen en az bir $x_0 \in A$ vardır, y_0 gerçel sayısının A için bir üst sınır olamadığı anlaşılır, böylelikle α_0 gerçel sayısı A kümesinin üst sınırlarının en küçüğü olur. Buna karşılık, eğer, **her** $M > 0$ için $\exists x_M \in A$, $M < x_M$ oluyorsa, hiçbir gerçel sayı A kümesinin bir üst sınırı olamaz, çünkü bu son koşul gereği, her $y \in \mathbb{R}$ için $y < |y| + 1 < x_y$ olacak biçimde en az bir (ve aslında sonsuz tane) $x_y \in A$ vardır; ancak bu durumda $\sup A = +\infty$ yazılır. Öte yandan

$$iii)\ \beta_0 \leqslant x\ (\forall x \in A) \qquad , \qquad iv)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, x_\varepsilon < \beta_0 + \varepsilon$$

koşullarını gerçekleyen bir $\beta_0 \in \mathbb{R}$ varsa $\inf A = ebas\ A = \beta_0$ yazılır. R. Dedekind'in ünlü teoremi (kanıtlanması çok ciddi bir iştir) boştan farklı ve üstten sınırlı tüm $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümelerinin tek türlü belirlenebilen bir supremumunun ve benzer biçimde boştan farklı ve alttan sınırlı alt kümelerin de infimumunun var olduğunu söylemektedir. Eğer $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi için $x \leq \gamma_0\ (\forall x \in A)$ koşulunu gerçekleyen bir $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ varsa, Dedekind Teoremi gereği var ve iyi tanımlı olan $\sup A = \alpha_A \in \mathbb{R}$ için $\alpha_A \leq \gamma_0$ geçerlidir, çünkü eğer tam tersine $\gamma_0 < \alpha_A$ olsaydı $\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+, \gamma_0 + \varepsilon_0 < \alpha_A - \varepsilon_0$ böylece $\exists x_0 \in A\ , \gamma_0 < \gamma_0 + \varepsilon_0 < \alpha_A - \varepsilon_0 < x_0 \leq \gamma_0$ çelişkisi doğardı. Demek ki $x \leq \gamma_0\ (\forall x \in A)$ bilgisinden $\sup A \leq \gamma_0$ sonucu, benzer biçimde $\beta_0 \leq x$ $(\forall x \in A)$ bilgisinden de $\beta_0 \leq \inf A$ sonucu çıkarsanır.

Şimdi bazı kümelerin supremum ve infimumlarını belirleyelim.

Örnek: $\sup \mathbb{N} = +\infty$ geçerlidir, çünkü $\mathbb{N}$ kümesi üstten sınırlanamaz, gerçekten eğer **Koş**: $\exists x_0 \in \mathbb{R}, n \leq x_0$

$(\forall n \in \mathbb{N})$ **koşulu gerçekleşseydi** sonuçta **Koş***: $n+1 \leq x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ böylece $n \leq x_0 - 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bulunur, yani $x_1 = x_0 - 1$ gerçel sayısı ve benzer biçimde $x_2 = x_1 - 1$ gerçel sayısı, $\ldots$ $\mathbb{N}$ kümesi için birer üst sınır olur, supremum özelliğine sahip $\mathbb{R}$ kümesinde $\mathbb{N}$ kümesinin en küçük üst sınırı asla belirlenemezdi, çelişki! Bu gözlemden şu önemli sonuçlar çıkar.

Arşimet İlkesi: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, x < n_x$ olur.

Bu yukarıdaki kanıtlamanın kolay bir sonucudur ve dikkat edilirse aşağıdaki ilke elde edilir:

Tanım 1 (Arşimet İlkesi):

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \, (= n_{x,y}) \in \mathbb{N}, y < nx$$

olur.

Gerçekten bu sonuç $\frac{y}{x}$ gerçel sayısına yukarıdaki ilke uygulanarak kolayca bulunur. Okuyucu yukarıdaki ilkelerin birbirine eşdeğer olduğunu kolayca gösterebilmelidir.

Temel Bilgi: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ geçerlidir, çünkü herhangi $0 < \varepsilon$ verildiğinde Arşimet İlkesi ile $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, 1 < n_\varepsilon \varepsilon \leq n\varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ böylece $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bulunur, buysa istenendir.

Yardımcı Teorem 1: Gerek $\mathbb{Q}$ gerekse $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ kümeleri gerçel sayılar kümesinde yoğundurlar.

İspat: Önce $x < y$ gerçekleyen x ve y gerçel sayıları ne olursa olsun, en az bir $r_0 \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısının $x < r_0 < y$ gerçeklediğini Arşimet İlkesi kullanarak gözleyelim. Önce $0 < y - x$ unutmadan bu ilke gereği $1 < n_0 (y - x)$ yani $n_0 x + 1 < n_0 y$ gerçekleyen $n_0 \in \mathbb{N}$ ve sonra $n_0 x < N_0$ gerçekleyen $N_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayıları var, böylece

$$\mathbb{Z}_x = \{k \in \mathbb{Z} : n_0 x < k\} \, (\subseteq \mathbb{Z})$$

alt kümesi $N_0 \in \mathbb{Z}_x$ nedeniyle boş olmadığından ve $n_0 x$ gerçel sayısı ile alttan sınırlı olduğundan aşağıda yer alan bilgi nedeniyle iyi tanımlı olan $k_0 = \min \mathbb{Z}_x \, (\in \mathbb{Z}_x \subseteq \mathbb{Z})$ tam sayısı sayesinde $r_0 = \dfrac{k_0}{n_0}$ rasyonel sayısı $x < r_0 < y$ gerçekler, çünkü $\mathbb{Z}_x$ kümesinin en küçük elemanı k_0 olduğundan $k_0 - 1 \notin \mathbb{Z}_x$ fakat $k_0 \in \mathbb{Z}_x$ nedeniyle hem $k_0 - 1 \leq n_0 x < k_0$ hem de $n_0 x < k_0 \leq n_0 x + 1 < n_0 y$ böylece istenen $x < \dfrac{k_0}{n_0} = r_0 < y$ sonucu bulunur. Öte yandan $k_1 < k_2$ gerçekleyen k_1 ve k_2 tam sayıları ne olursa olsun $k_1 < q < k_2$ gerçekleyen en az bir $q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ vardır, çünkü $k_1 < k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = q < k + 1 \leq k_2$ olmaktadır ve $q = k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ gerçekler (neden?), o halde $x < y$ gerçekleyen x ve y gerçel sayılarına karşılık önce $x < r_1 < r_2 < y$ gerçekleyen $r_i = \dfrac{k_i}{n_i}$ $(i = 1, 2)$ rasyonel sayıları ve az önce gözlendiği gibi $k_1 n_1 < q_0 < k_2 n_1$ greçekleyen q_0 irrasyonel sayısı var böylece $x < r_1 < \dfrac{1}{n_1 n_2} q_0 = q^* < r_2 < y$ bulunur ve q^* irrasyonel olup $x < q^* < y$ gerçekler.

Bilgi: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin boştan farklı ve alttan sınırlı her alt kümesinin minimal elemanı iyi tanımlıdır. Gerçekten $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ için eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise bu iddia bilinmektedir, yok eğer $A - \mathbb{N} \neq \emptyset$ ise A kümesinde, alttan sınırlı olduğu için, sadece **sonlu tane** negatif tam sayı bulunabileceğinden onların en küçüğü apaçık biçimde $\min A$ elemanıdır (neden?)

Ayrıca dikkat edilirse

$$\max\left((-\infty, x] \cap \mathbb{Z}\right) = [x] \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

tam sayısı herbir $x \in \mathbb{R}$ için iyi tanımlıdır. Gerçekten $A_x = (-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$ $(\subseteq \mathbb{Z})$ kümesinde x gerçel sayısından büyük olmayan tüm tam sayılar ve yalnızca onlar yer alır, üstelik Arşimet İlkesi nedeniyle

$$\exists n_x \in \mathbb{N} \quad , \quad -x \leq |x| < n_x < n_x + 1 < n_x + 2 < \cdots$$

gerçekleştiğinden

$$\cdots < -(n_x + 2) < -(n_x + 1) < -n_x < x$$

geçerlidir, böylece A_x kümesinde sonsuz tane tam sayı yer alır, bu küme $x \in \mathbb{R}$ ile üstten sınırlı olduğundan kesinlikle $\beta_x = \sup A_x$ gerçel sayısı iyi tanımlıdır, oysa **Topoloji** derslerinde bir $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ alt kümesi için eğer $\sup A \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı iyi tanımlı ise (yani A kümesi üstten sınırlı ise) $\sup A \in A$ böylece $\sup A = \max A$ gerçekleştiği gösterildiğinden $\beta_x \in A_x = (-\infty, x] \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ olduğu anlaşılır, bu özel tam sayı $[x]$ işareti ile yazılır ve (bilindiği gibi) x **gerçel sayısının tam kısmı** adını alır. (1) tanımından kolayca

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

eşitsizlikleri elde edilir (nasıl?). Demek ki her gerçel sayı iki uygun ardışık tam sayının arasında yer alır, üstelik $x \notin \mathbb{Z}$ ise

$$x - 1 < [x] < x < [x] + 1$$

eşitsizlikleri bulunur.

Örnekler 0:

1) $A = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}\}$ için $\min A = 0 < 1 = \sup A$ gösterelim.

Dikkat edilirse $\sqrt{n^2} - [\sqrt{n^2}] = n - n = 0 \in A$ ve zaten $0 \leqslant \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gözleyerek $0 = \min A$ bulunur. Ayrıca $n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $q_n = \sqrt{n^2 + 2n} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ için $n < q_n < n + 1$ ve böylelikle $[q_n] = n$ ve $\sqrt{n^2 + 2n} - \left[\sqrt{n^2 + 2n}\right] = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} > \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + 2n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} = \dfrac{n}{q_n} = \xi_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n(n+3) < n(n+3) + 2 = (n+1)(n+2)$ böylece $\dfrac{n^2}{n^2 + 2n} = \dfrac{n}{n+2} < \dfrac{n+1}{n+3} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 2(n+1)}$ bulup kök alınırsa $\xi_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} < \dfrac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2 + 2(n+1)}} = \xi_{n+1} < \cdots < 1 = \lim_n \xi_n$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $1 - \varepsilon < \xi_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} < \sqrt{n^2 + 2n} - \left[\sqrt{n^2 + 2n}\right]$ $(\in A) < 1$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ ve böylelikle $\sup A = 1$

bulunur. Siz her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = \sqrt{n^2+3n}$ gerçel sayılarını tanımlayıp (dikkat: $1 < n$ için $q_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ gözleyiniz.) $E = \{q_n - [q_n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$ alt kümesi için $\sup E = \dfrac{1}{2}, \min E = 0$ gösteriniz. Bunun için $0 = q_1 \le q_n < q_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $q_n < \dfrac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gözleyiniz

2) $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\right\}$ için $\max B = \frac{3}{2}$ ve $\inf B = 0$ gösterin.

Dikkat: $n \neq m$ için $r_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} (= r_{m,n})$ yazılırsa kolayca her $n \in \mathbb{N}$ ve her $m > n$ için $r_{n,m} \le r_{1,2} = \frac{3}{2} = \max B$ gözlenir, çünkü $m \ge n+1$ böylece $r_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \le \frac{3}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ geçerlidir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = \{r_{n,m} : m > n\}$ tanımlanırsa $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ ve $\max B_n = r_{n,n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} > \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = r_{n+1,n+2} = \max B_{n+1}$ gözleyip $\max B = \max B_1 = r_{1,2} = \frac{3}{2}$ bulunur. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, 2 < n_\varepsilon \cdot \varepsilon$ yani $0 < \dfrac{2}{\varepsilon} < n_\varepsilon$ olduğundan (Arşimet İlkesini kullanın) $\dfrac{1}{n_\varepsilon} + \dfrac{1}{n_\varepsilon + 1} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için zaten $0 < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}$ olduğundan bu sonuç apaçık biçimde $\inf B = 0$ verir.

3) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $r_{n,m} = \dfrac{mn}{1+n+m}$ olsun. $\sup\{r_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ ve $\inf\{r_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ nedir.

$r_{1,1} = \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{m}{m+2} \leqslant \dfrac{mn}{1+n+m} = r_{n,m}$ nedeniyle aranan infimum $r_{1,1} = \dfrac{1}{3}$ olur. Öte yandan $r_{n,n} = \dfrac{n^2}{2n+1} > \dfrac{n}{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gözleyip $+\infty \ge \sup\{r_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\} \ge \sup\{r_{n,n} : n \in \mathbb{N}\} \ge \sup\{\dfrac{n}{3} : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ nedeniyle aranan supremum $+\infty$ olur.

4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ise $\sup f(\mathbb{R}^+) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f(x) = +\infty$, $\inf f(\mathbb{R}^+) = 2$ olur, çünkü $\inf f(\mathbb{R}^+) = \min f(\mathbb{R}^+) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f(x) = f(1) = 2$ olur. Dikkat: Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $x < 2x < x^2 + 1$ ve böylece $2 \le x + \dfrac{1}{x}$ gözleyiniz.

5) $g(x) = 2^x + 2^{\frac{1}{x}}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ise $\sup g(\mathbb{R}^+) = +\infty$ olur, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $n \le 2^{n-1} < 2^n$ bilgisiyle $\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}, M < n_M < 2^{n_M} < g(n_M)$ olur. Ayrıca ünlü $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)$ eşitsizliği kullanılırsa $g(x) = 2 \cdot \dfrac{2^x + 2^{\frac{1}{x}}}{2} \ge 2 \cdot \sqrt{2^x} \cdot \sqrt{2^{\frac{1}{x}}} = 2 \cdot \sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}} = 2 \cdot \sqrt{2^{f(x)}} = 2(\sqrt{2})^{f(x)} \ge 2(\sqrt{2})^{f(1)} = 4 = g(1) \Rightarrow \inf g(\mathbb{R}^+) = g(1) = 4$ olur.

6) $\sup\limits_{x \in (0,1)} x^n = 1$, çünkü her $x \in (0,1)$ için $0 < 1 - x < 1$ ve sonuçta $0 < \varepsilon < 1$ verildiğinde $1 - \varepsilon < y_\varepsilon < 1$ gerçekleyen $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayesinde $x_\varepsilon = \sqrt[n]{y_\varepsilon}$ tanımlanırsa, kolayca $0 < 1 - \varepsilon < x_\varepsilon^n < 1$ olur, böylelikle $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists x_\varepsilon \in (0,1), 1 - \varepsilon < x_\varepsilon^n < 1$ bulunur, bu istenendir. Siz $\sup\limits_{x \in (-1,1)} |x|^n = 1$ gösteriniz.

7) $A = \{\cos n : n \in \mathbb{N}\} = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3, ...\}$ $(\subseteq [-1,1])$ kümesi için $\inf A = -1 < 1 = \sup A$ geçerlidir, çünkü aslında $A^* = \{\cos(2n\pi + k) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} = A \cup \{1\}$ kümesi birazdan göreceğimiz ünlü Dirichlet Teoremi'nin kolay bir sonucu olarak $[-1,1]$ aralığında **yoğun** olduğundan, yani $-1 \le x < y \le 1$ gerçel sayıları ne olursa olsun (x,y) aralığında A^* kümesinden **sonsuz sayıda eleman** yer aldığından, (x,y) aralığında A kümesinden de sonsuz sayıda gerçel sayı yer alır (bkz. Yardımcı Teorem 1) , bu nedenle $0 < \varepsilon < 1$ ne olursa olsun $-1 \le \cos n < -1 + \varepsilon <$

$0 < 1-\varepsilon < \cos N \leq 1$ gerçekleyen sonsuz tane n ve N doğal sayısı vardır, bu sonuç ise isteneni verir. Dikkat: A kümesinin elemanları ikişer ikişer farklıdır, çünkü $1 \leq x < y$ gerçel sayılarının $\cos x = \cos y$ gerçekleyebilmesi için ya uygun bir $k_0 \in \mathbb{Z}$ için $x = y \mp 2k_0\pi$ ya da uyguın bir $k_1 \in \mathbb{Z}$ için $|x - k_1\pi| = |y - k_1\pi|$ olması gerektiğinden (neden?) $1 \leq r_1 < r_2$ gerçekleyen r_1, r_2 rasyonel sayıları ne olursa olsun, asla $\cos r_1 = \cos r_2$ **gerçekleşmez** (neden?).

8) $\emptyset \neq A \subseteq (0,\infty)$ ve $\sup A = \gamma_A \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki gerçekleşir gösteriniz:

$$\sup\{\ell n x : x \in A\} = \ell n \gamma_A$$

Gerçekten her $x \in A$ için $0 < x \leq \gamma_A$ böylece $\ell n x \leq \ell n \gamma_A$ olur. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için $1 < e^{\varepsilon}$ böylece $\frac{\gamma_A}{e^{\varepsilon}} < \gamma_A$ ve $\gamma_A = \sup A$ olduğundan $\exists \delta_\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$

$$\frac{\gamma_A}{e^{\varepsilon}} + \delta_\varepsilon < \gamma_A - \delta_\varepsilon < x_\varepsilon$$

böylece logaritma artan olduğundan istenen bulunur:

$$\ell n \gamma_A - \varepsilon = \ell n\left(\frac{\gamma_A}{e^{\varepsilon}}\right) < \ell n\left(\frac{\gamma_A}{e^{\varepsilon}} + \delta_\varepsilon\right) < \ell n x_\varepsilon.$$

Temel Bilgi: Sabit $0 < a < 1$ gerçel sayısı *ne olursa olsun*, aşağıdaki A_a kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur:

$$A_a = \{ka^n : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Gerçekten $x < y$ gerçel sayıları verildiğinde, uygun bir $k_0 \in \mathbb{Z}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x < k_0 a^{n_0} < y$ gözlemek güç değildir, çünkü $0 < \delta = y - x$ sayesinde $a^n \downarrow 0^+$ nedeniyle $\exists N_0 \in \mathbb{N}, 0 < a^n < \delta$ $(\forall n \geq N_0)$ olur; böylece sabit bir $n_0 > N_0$ doğal sayısı seçerek, Arşimet İlkesiyle $\exists m_0 \in \mathbb{N}, x < m_0 a^{n_0}$ bulunur, böylelikle

$$m_0 \in \Lambda = \{k \in \mathbb{Z} : x < ka^{n_0}\} \neq \emptyset$$

gözleyip, sayfa 2' deki Bilgi kullanılarak, kesinlikle $k_0 = \min \Lambda \in \Lambda$ tam sayısı iyi tanımlıdır, $k_0 - 1 \notin \Lambda$ olduğundan $(k_0 - 1)a^{n_0} \leq x < k_0 a^{n_0} < y$ bulunur, dikkat edilirse, eğer $y \leq k_0 a^{n_0}$ *olsaydı* $(k_0-1)a^{n_0} \leq x < y \leq k_0 a^{n_0}$ ve sonuçta $a^{n_0} < \delta = y - x \leq k_0 a^{n_0} - (k_0 - 1)a^{n_0} = a^{n_0}$ çelişkisi doğardı !

Ödev: $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\varepsilon_n \downarrow 0^+$ gerçeklensin. Gösteriniz: $A = \{k\varepsilon_n : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ kümesinde yoğundur.

Tanım 2: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi ve $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçel değerli fonksiyonları verilsin. A kümesinin

$$A_0 = \{x \in A : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ dizisi yakınsak}\} = \left\{x \in A : \exists \ell_x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ell_x\right\}$$

kümesi boştan farklı **ise** $x \mapsto \ell_x$ $(\forall x \in A_0)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon, daha açık biçimde $f(x) = \ell_x =$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in A_0)$ gerçekler ve f gerçel değerli fonksiyonuna $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin **noktasal limit fonksiyonu** denilir. $Tan(f) = A_0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnekler 1

1) Şu temel bilgileri tazeleyerek başlayalım: Her $x \in (-1,1)$ için $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ve her $x \in (1,\infty)$ içinse $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ geçelidir. Gerçekten $x \in (-1,1)$ yani $|x| < 1$ ise, uygun bir $\varepsilon_x > 0$ sayısı sayesinde $0 \le |x|^n < \frac{1}{n\varepsilon_x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, buna karşılık $1 < x$ ise, bu kez uygun bir $\delta_x > 0$ sayesinde $n\delta_x < x^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ geçerlidir, çünkü $|x| < 1$ ise $\exists \varepsilon_x > 0$, $0 \le |x| < |x| + \varepsilon_x < 1 - \varepsilon_x < \frac{1}{1+\varepsilon_x}$ böylece $0 \le |x|^n < \left(\frac{1}{1+\varepsilon_x}\right)^n = \frac{1}{(1+\varepsilon_x)^n} < \frac{1}{n\varepsilon_x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bulunur çünkü $(1-\varepsilon_x)(1+\varepsilon_x) = 1 - \varepsilon_x^2 < 1$ ve $\varepsilon_x > 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+\varepsilon_x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon_x^k > 1 + \binom{n}{1}\varepsilon_x > n\varepsilon_x > 0$ böylece hem $1 - \varepsilon_x < \frac{1}{1+\varepsilon_x}$ hem de $\frac{1}{(1+\varepsilon_x)^n} < \frac{1}{n\varepsilon_x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bulunur, sonuçta $0 \le |x^n| = |x|^n < \frac{1}{n\varepsilon_x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ eşitsizliklerini kullanarak ünlü Sıkıştırma Lemması yardımıyla istenen $\lim_{n\to\infty} |x^n| = 0 = \lim_{n\to\infty} x^n$ sonucu çıkarsanır. Buna karşılık $1 < x$ ise bu kez $\exists \delta_x > 0$, $1 < 1 + \delta_x < x - \delta_x < x$ böylece $n\delta_x < (1+\delta_x)^n < x^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bularak $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ bulunur. O halde $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x^n}{n}\right)$ $(\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N})$ biçiminde tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti $f(x) = 0$ $(\forall x \in [0,1))$ ve $f(1) = 1$ gerçekleyen böylece $f(1-) \ne f(1)$ nedeniyle süreksiz olan f fonksiyonudur, çünkü her $x \in [0,1]$ için ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \le \frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n} \le 1 < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $0 \le \sin\left(\frac{x^n}{n}\right)$ geçerli olup, ünlü $|\sin y| \le |y|$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ bilgisiyle aşağıdakiler bulunur:

$$0 \le f_n(x) = n\sin\left(\frac{x^n}{n}\right) = n\left|\sin\left(\frac{x^n}{n}\right)\right| \le n\left|\frac{x^n}{n}\right| = x^n \qquad (\forall x \in [0,1), \forall n \in \mathbb{N})$$
$$f_n(1) = n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

böylece $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu için istenenler elde edilir.

Uyarı 1: Demek ki sürekli fonksiyonların noktasal limit fonksiyonu **süreksiz olabilmektedir**.

2) $A = [0,2]$ ve $f_n(x) = x^n$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ ise, her $x > 1$ için $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ olduğu, kısacası herbir $x \in (1,2]$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi **yakınsak olmadığı** için $A_0 = [0,1]$ olur ve kolayca $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu aşağıdaki fonksiyondur ve f fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreksizdir:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0,1) \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

3) $A = \mathbb{R}$ *ve* $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ ise $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ noktasal limit fonksiyonu tüm A kümesinde tanımlı ve $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ $(\forall x \in A)$ gerçekler.

Gerçekten öncelikle herhangi $x \in \mathbb{R}$ için $x = \lim_{n\to\infty} \ln(g_n(x))$ gerçeklendiğini göstermek kolaydır, çünkü dikkat edilirse Arşimet İlkesi ile

$$\exists n_x \in \mathbb{N},\ -x \le |x| < n_x \le n \quad (\forall n \ge n_x)$$

böylece $-\frac{x}{n} < 1$ $(\forall n \ge n_x)$ yani $0 < g_n(x)$ $(\forall n \ge n_x)$ ve aşağıdaki **7)** örneğinde gösterileceği gibi

$$\frac{nx}{x+n} < n.\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \ln(g_n(x)) < n.\frac{x}{n} = x \quad (\forall n \ge n_x),$$
$$0 < x - \ln(g_n(x)) < x - \frac{nx}{x+n} = \frac{x^2}{n+x} \quad (\forall n \ge n_x)$$

olduğundan her iki yandan limit alarak istenen bulunur. Buradan $e^x = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ çıkarsanır.

4) $A = [0,1]$ ve $h_n(x) = \sin n\pi x$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ ise $A_0 = \{0,1\}$ olur, çünkü her $x \in (0,1)$ gerçel sayısı için $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi **ıraksaktır.** Gerçekten $x = r \in \mathbb{Q}$ ise $r = \dfrac{n_0}{N_0}$ olacak biçimde aralarında asal n_0 ve N_0 doğal sayıları vardır ve $\{h_n(r)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sin\dfrac{n\pi n_0}{N_0}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, iki farklı limite yakınsayan iki alt dizisi var olduğundan bu dizi **ıraksar** (bilindiği gibi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi yakınsak ve sözgelimi $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ ise, bu dizinin herhangi bir $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi de $\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \ell$ gerçekler). Dikkat edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $h_{nN_0}(r) = \sin\left(\dfrac{nN_0\pi n_0}{N_0}\right) = \sin(nn_0\pi) = 0$ böylece

$$h_{N_0}(r) = h_{2N_0}(r) = h_{3N_0}(r) = \cdots = 0, \qquad h_{2N_0+1}(r) = h_{4N_0+1}(r) = h_{6N_0+1}(r) = \cdots = \sin\pi r > 0$$

olur, sözgelimi $h_{2N_0+1}(r) = \sin\left(\frac{(2N_0+1)\pi n_0}{N_0}\right) = \sin(2\pi n_0 + \pi r) = \sin\pi r > 0$ olur, çünkü $0 < \pi r < \pi$ geçerlidir, kısacası $\{h_{nN_0}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi sıfıra, buna karşılık $\{h_{2nN_0+1}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi pozitif $\sin\pi r$ sayısına yakınsar. Öte yandan herhangi bir $x = q \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]$ irrasyonel sayısı için $\{h_n(q)\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin n\pi q\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı dizisinin ıraksaması iddiası çok ciddidir ve Dirichlet'nin aşağıda yazılı teoremi yardımıyla gösterilir. Apaçık biçimde her $x \in A_0 = \{0,1\}$ için $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ olur.

5) $A = [0,1]$ ve $f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{n} & ; x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ 1 + \frac{x}{n} & ; x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ $\quad (\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$

ise $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu $f(x) = 1$ $(\forall x \in A)$ gerçekler, çünkü herbir $x \in A$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ olur, çünkü $x = 0$ alındığında, her $n \in \mathbb{N}$ için $x = 0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ ve $f_n(0) = 1 - \dfrac{0}{n} = 1$ nedeniyle $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$ olur; herhangi $x \in (0,1]$ alındığında Arşimet İlkesi ile

$$\exists n_x \in \mathbb{N}, 1 < n_x \cdot x \le nx \quad (\forall n \ge n_x)$$

ve dolayısıyla $x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]$ $(\forall n \geq n_x)$ gözleyip bu x için $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$ $(\forall n > n_x)$ böylelikle $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = 1$ $(\forall x \in (0,1])$ bulunur, burada son adımda bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, eğer yakınsak bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi aracılığıyla $x_n = a_n$ $(\forall n \geq n_0)$ gerçeklerse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ olur, bilgisi kullanılmıştır, (nerede?). Dikkat edilirse her $x \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, ister $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ isterse $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ olsun

$$0 \leq |f_n(x) - 1| \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$$

gözleyerek de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ sonucu bulunur.

6) $A = \mathbb{R}$ ve $p_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ polinom dizisinin noktasal limit fonksiyonunun $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = \sin x$ $(\forall x \in A)$ olduğu ilerde gözlenecektir.

7) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ yazılsın. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ noktasal limit fonksiyonu tanımlıdır, (vardır). Bunun için önce şu temel bilgileri gözleyelim:

Bilgi 1: Her $n \in \mathbb{N}$ için, çarpımları 1 olan n tane pozitif gerçel sayının toplamı $\geq n$ gerçekler.

Gerçekten iddia $n = 1$ için apaçıktır, iddia n için doğru varsayıldığında $1 = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}$ gerçekleyen a_k pozitif gerçel sayıları için $n + 1 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ olur, çünkü içlerinde en az birisi 1 ise iddia n 'inci adım varsayımından elde edilir, sözgelimi $a_2 = 1$ ise $1 = a_1 a_3 a_4 \cdots a_n a_{n+1}$ nedeniyle, bu son çarpıma katılan çarpan sayısı n olduğundan, n 'inci adım varsayımı ile $n \leqslant a_1 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$ ve sonuçta $n + 1 = n + a_2 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}$ bulunur. Eğer a_k pozitif sayılarından hiçbirisi 1 değilse, tümü $a_k < 1$ (ya da tümü $1 < a_k$) gerçekleyemeyeceğinden $(neden?)$ $a_i < 1 < a_k$ gerçekleyen a_i ve a_k vardır sözgelimi $a_1 < 1 < a_{n+1}$ olsun. Sonuçta $1 = a_2 a_3 \cdots a_n \cdot (a_1 a_{n+1})$ ve n 'inci adım varsayımı ile $n \leqslant a_2 + a_3 + \cdots a_n + (a_1 a_{n+1})$ ve her yana 1 ekleyip $n+1 \leqslant a_2 + \cdots a_n + 1 + (a_1 a_{n+1}) \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ bulunur çünkü $1 < a_{n+1}$ ve $0 < 1 - a_1$ nedeniyle $1 - a_1 < a_{n+1}(1 - a_1)$ yani $1 + a_1 a_{n+1} < a_1 + a_{n+1}$ olur. O halde Bilgi 1 tümevarımla gösterilmiştir. Dikkat: Eğer $n \geq 2$ ve çarpıma katılanlardan **en az birisi** 1'den farklıysa sözü edilen toplam $> n$ gerçekler. Bu iddia Bilgi 1 kullanılarak tümevarımla gösterilir (nasıl?).

Bilgi 2: Sonlu sayıda pozitif gerçel sayının geometrik ortalaması aritmetik ortalamasından **büyük olamaz**.

Gerçekten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pozitif gerçel sayıları için, Bilgi 1 yardımıyla

$$n \leqslant \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

olur, çünkü sağ yandaki toplama katılanların hepsi pozitif ve çarpımları 1 olmaktadır. Dolayısıyla şu çıkarsanır:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Üstelik a_k 'lardan birisi $a_k \neq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ yani $\dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \neq 1$ gerçeklerse son eşitsizlik

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

biçimini alır (neden?).

O halde herhangi $x > 1$ verildiğinde bu son gözlem yardımıyla, üstelik $1 < \sqrt[n]{x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $1 \neq \sqrt[n+1]{x}(= \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdots \sqrt[n]{x} \cdot 1})$ nedeniyle

$$\sqrt[n+1]{x} = \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdots \sqrt[n]{x} \cdot 1} < \frac{n \cdot \sqrt[n]{x} + 1}{n+1}$$

ve böylelikle $0 < (n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1) < n(\sqrt[n]{x} - 1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bularak alttan sınırlı $\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}_{n=1}^{\infty}$ azalan dizisinin yakınsadığı anlaşılır. Demek ki $x > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} (n(\sqrt[n]{x} - 1)) = \ell_x \in \mathbb{R}$ vardır (tanımlıdır). $x = 1$ için, bu dizinin tüm terimleri ve sonuçta limiti 0 olur. $x \in (0, 1)$ ise

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = n\sqrt[n]{x}(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}) = (-\sqrt[n]{x}) \left[n \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ve biraz önce gözlendiği gibi, $\dfrac{1}{x} > 1$ nedeniyle köşeli parantez içindeki dizinin limiti var olduğundan $\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $0 < x < 1$ durumunda da yakınsamaktadır. Demek ki gerçekten

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ için } f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(n(\sqrt[n]{x} - 1)\big)$$

noktasal limit fonksiyonu **iyi tanımlıdır**. Matematikte bu f noktasal limit fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denilir, kısacası aşağıdaki geçerlidir:

$$(*) \qquad lnx = \lim_{n\to\infty} \big(n(\sqrt[n]{x} - 1)\big) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Dikkat edilirse $x, y \in \mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayıları ne olursa olsun, $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ ve sonuçta yukarıdaki tanım kullanılarak

$$\begin{aligned} \ell n(x \cdot y) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x \cdot y} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x \cdot y} - \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{y} - 1) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(\sqrt[n]{y} \cdot n(\sqrt[n]{x} - 1)\big) + \lim_{n\to\infty} (n(\sqrt[n]{y} - 1)) = \ell nx + \ell ny \end{aligned}$$

bulunur, çünkü iyi bilindiği gibi, **her** $x \in \mathbb{R}^+$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = x^0 = 1$ bilgisiyle yukarıdaki ilk limit ℓnx olur. Bu konuda son olarak şunu gözleyelim :

$$1 < a \text{ ise } 0 < \ln a \text{ çünkü } 0 < \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \quad (\forall x > 0)$$

geçerlidir. Dikkat edilirse $a \neq 1$ ise $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$ böylece $0 < x$ için $1 < \sqrt[n]{1+x}$ olup bu son özdeşlikten $\frac{x}{\sqrt[n]{1+x}-1} = (1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + ... + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1 < n(1+x)^{\frac{n-1}{n}} < n(1+x)$,

$$0 < \frac{x}{1+x} \leq n(\sqrt[n]{1+x} - 1) \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

ve limit alıp $0 < \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) = \lim\limits_{x\to\infty} n(\sqrt[n]{1+x} - 1)$ bulunur. O halde $1 < a$ ise $\delta_a = a - 1 > 0$ sayesinde şu sonuç bulunur. $\ln a = \ln(1+\delta_a) \geq \frac{\delta_a}{1+\delta_a} > 0$. Doğal logaritma fonksiyonunun tüm özellikleri $(*)$ tanımından çıkarsanır. Bunların **Analiz I derslerinde** yapıldığını varsayıyoruz.

8) Her $x > 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty$ olur.

Çözüm: Gerçekten $\exists \varepsilon_x > 0, 1 < 1 + \varepsilon_x < x - x_\varepsilon < x$ böylece her $n \geq 2$ için

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_x^2 < 1 + \binom{n}{2}\varepsilon_x^2 \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\varepsilon_x^k = (1+\varepsilon_x)^n < x^n$$

böylece n ile bölerek $(n-1)\frac{\varepsilon_x^2}{2} < \frac{x^n}{n} (\forall n \geq 2)$ gözleyip $n \to \infty$ için limit alıp istenen bulunur.

Yardımcı Teorem 2: $A \subseteq [a, b]$ alt kümesi $[a, b]$ aralığında yoğun ise $a \leq x < y \leq b$ gerçekleyen her x, y gerçel sayı çiftinin arasında A kümesinden sonsuz sayıda nokta vardır.

Kanıtlama: A kümesinin yoğun olmasının gereği olarak önce $x < a_1 < y$ gerçekleyen $a_1 \in A$ elamanını, sonra benzer gerekçeyle $x < a_3 < a_1$ gerçekleyen $a_3 \in A$ ile $a_1 < a_2 < y$ gerçekleyen $a_2 \in A$ elemanını belirleme işlemini tümevarımla sürdürerek, sonuçta

$$x < \cdots < a_{2n+1} < a_{2n-1} < \cdots a_3 < a_1 < a_2 < a_4 < \cdots < a_{2n} < a_{2n+2} < \cdots < y$$

gerçekleyen $a_{2n}, a_{2n-1} \in A$ gerçel sayıları her $n \in \mathbb{N}$ için belirlenir, böylece $(x, y) \cap A$ kesişim kümesinde, ikişer ikişer farklı olan, en az sayılabilir sonsuz tane $a_n \in A$ elemanı bulunmuş olur.

Yardımcı Teorem 3: Bir $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $[a, b]$ aralığında yoğunsa, herbir $x \in [a, b]$ gerçel sayısı, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin uygun bir alt dizisinin limitidir.

Kanıtlama: Kısalık amacıyla $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, ...\}$ yazalım. Herhangi bir $x \in [a, b]$ alınsın, önce $a \leq x < b$ olması durumunda bir kanıtlama verelim. Bu durumda $a \leq x < x+\delta_0 < b-\delta_0 < b$ olacak biçimde bir δ_0 var, A yoğun üstelik $a \leq x < x+\frac{\delta_0}{2} < x+\delta_0 < b$ gerçeklendiğinden, birinci aşamada $x < x_{n_1} < x+\frac{\delta_0}{2}$ olacak biçimde $x_{n_1} \in A$, sonra $x + \varepsilon_1 < x_{n_1} - \varepsilon_1$ olacak biçimde $\varepsilon_1 > 0$ var olduğundan $0 < \delta_2 < \varepsilon_1 \wedge \frac{\delta_0}{2^2}$

pozitif sayısı için hem $\delta_2 < \varepsilon_1$ hem de $\delta_2 < \dfrac{\delta_0}{2^2}$ ve böylece $x < x + \delta_2 < x + \varepsilon_1 < x_{n_1}$ gözleyip bu kez $x < x_{n_2} < x + \delta_2 < x + \dfrac{\delta_0}{2^2}$ gerçeklenecek biçimde bir $n_2 > n_1$ doğal sayısı ve $x_{n_2} \in A$ vardır, çünkü $(x, x+\delta_2) \cap A$ kesişimi sonsuz elemanlı olduğundan bu kesişim kümesinde $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3}, ...$ elemanlarından sonsuz tanesi bulunur (Dikkat: $x_{n_2} < x + \delta_2 < x_{n_1}$ gözleyiniz). Sonra $x + \varepsilon_2 < x_{n_2} - \varepsilon_2$ ve $0 < \delta_3 < \varepsilon_2 \wedge \dfrac{\delta_0}{2^3}$ sayıları aracılığıyla $(x, x+\delta_3) \cap A$ kesişim kümesinde sonsuz eleman bulunduğundan, en az bir $n_3 > n_2$ için $x_{n_3} \in (x, x+\delta_3) \cap A$ vardır, $x < x_{n_3} < x + \delta_3 < x + \dfrac{\delta_0}{2^3}$ ve $x_{n_3} < x + \delta_3 < x + \varepsilon_{n_2} < x_{n_2}$ gözleyiniz. Bu işlem tümevarımla sürdürülürse her $m \in \mathbb{N}$ için $x < x_{n_m} < x + \dfrac{\delta_0}{2^m}$ ve $n_m < n_{m+1}$ ve $x_{n_{m+1}} < x_{n_m}$ olacak biçimde $x_{n_m} \in A$ elemanları tanımlanır ve $x < x_{n_m} < x + \dfrac{\delta_0}{2^m}$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ eşitsizlikleri kullanılıp limit alınarak, azalan $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi için $x = \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}$ bulunur. $x = b$ için bu kez artarak b gerçel sayısına yakınsayan bir alt dizi tanımlanır. Bitti!

Teorem 1 (Dirichlet Teoremi): Sabit $q_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ verilsin. Eğer q_0 ve $x_0 \neq 0$ gerçel sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsız iseler $A_{q_0,x_0} = \{nq_0 + kx_0 : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi gerçel sayıların yoğun bir kümesidir.

Kanıtlama: q_0 ve $x_0 \neq 0$ sayılarının $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde lineer bağımsız olması demek, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayıları için ancak ve yalnız, $r_1 = 0 = r_2$ olduğunda $r_1 q_0 + r_2 x_0 = 0$ gerçeklenmesi demektir. Herhangi bir irrasyonel sayı ile, sıfırdan farklı herhangi bir rasyonel sayının bu nitelikte olduğuna ve ayrıca $A_{q_0,x_0} = A_{q_0,-x_0}$olduğuna dikkat ediniz., çünkü $nq_0 + kx_0 \in A_{q_0,x_0}$ için $nq_0 + kx_0 = nq_0 + (-k)(-x_0) \in A_{q_0,-x_0}$ gözlemek yeterlidir. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın $x_0 > 0$ **varsayabiliriz**, çünkü $x_0 < 0$ ise $A_{q_0,-x_0}$ kümesinin yoğun olduğu gösterildiğinde A_{q_0,x_0} kümesinin yoğun olduğu gösterilmiş olur.

Demek ki $x_0 > 0$ olmaktadır ve

$$k_n = \left[\frac{nq_0}{x_0}\right] \in \mathbb{Z} \qquad\qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

tam kısım değerleri her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \leqslant \dfrac{1}{x_0}(nq_0) < k_n + 1$ ve $k_n x_0 \leqslant nq_0 < (k_n+1)x_0$ gerçekler. O halde $\delta_n = nq_0 - k_n x_0 \in A_{q_0,x_0}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçel sayıları $0 < \delta_n < x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve ayrıca $n \neq m$ için $\delta_n \neq \delta_m$ gerçekler, çünkü $\delta_n - \delta_m = (n-m)q_0 + (k_m - k_n)x_0 \neq 0$ olur, çünkü x_0 'ın katsayısı sıfır olsun ya da olmasın q_0 'ın katsayısı sıfır değildir. Dikkat:

$$n < m \text{ ve } N \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \text{ ise } N(\delta_m - \delta_n) + kx_0 = N(m-n)q_0 + (k + N(k_n - k_m))\, x_0 \in A_{q_0,x_0}$$

gözlemi gözlenmelidir. Şimdi, herhangi iki farklı gerçel sayı arasında A_{q_0,x_0} kümesinden en az bir eleman bulunduğunu göstermek istiyoruz. Buna eşdeğer iddia aşağıdakidir:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \in A_{q_0,x_0} \neq \emptyset.$$

O halde $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ verilsin. Ünlü

$$\textbf{Arşimed İlkesi :} \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists n (= n(x,y)) \in \mathbb{N}, x < n \cdot y$$

kullanılarak $x_0 < n_\varepsilon \varepsilon$ ve $|x| < n_x x_0$ gerçekleyen n_ε ve n_x doğal sayılarını belirlersek $x - n_x x_0 < 0 < x + n_x x_0$ olur. Oysa $[0,1) = [0, \frac{1}{n_\varepsilon}) \cup [\frac{1}{n_\varepsilon}, \frac{2}{n_\varepsilon}) \cup \cdots \cup \left[\frac{n_\varepsilon - 1}{n_\varepsilon}, 1\right)$ birleşiminde, birleşime katılan aralıklar ikişerli ayrık ve sayıları tam n_ε tane, buna karşılık, hepsi pozitif olan $\dfrac{\delta_1}{x_0}, \dfrac{\delta_2}{x_0}, \ldots, \dfrac{\delta_{n_\varepsilon}}{x_0}, \dfrac{\delta_{n_\varepsilon+1}}{x_0}$ gerçel sayıları $n_\varepsilon + 1$ tanedir, üstelik $0 < \delta_n < x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ böylelikle $0 < \dfrac{\delta_n}{x_0} < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan, bunların tümü $(0,1) \subseteq [0,1) = \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \left[\frac{k-1}{n_\varepsilon}, \frac{k}{n_\varepsilon}\right)$ kümesinin elemanıdır, sonuçta bunlardan **en az iki tanesi** aynı bir $\left[\frac{k-1}{n_\varepsilon}, \frac{k}{n_\varepsilon}\right)$ aralığının elemanı olur çünkü aksi halde herbir $I_k = \left[\frac{k-1}{n_\varepsilon}, \frac{k}{n_\varepsilon}\right)$ aralığında bunlardan en fazla bir tane ve sonuçta $[0,1)$ aralığında bunlardan en fazla n_ε tane bulunurdu, oysa bu kesirler tam $n_\varepsilon + 1$ tanedir; dolayısıyla $1 \leqslant n < m \leqslant n_\varepsilon + 1$ olmak üzere $\frac{\delta_n}{x_0}, \frac{\delta_m}{x_0} \in \left[\frac{k-1}{n_\varepsilon}, \frac{k}{n_\varepsilon}\right)$ yani hem $\frac{k-1}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{\delta_n}{x_0} < \frac{k}{n_\varepsilon}$ hem de $\frac{k-1}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{\delta_m}{x_0} < \frac{k}{n_\varepsilon}$ ve böylece $\left|\frac{\delta_n}{x_0} - \frac{\delta_m}{x_0}\right| \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon}$ yani $|\delta_n - \delta_m| \leqslant \frac{x_0}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ olur.

Şimdi irdelenmesi gereken iki durum vardır:

Durum 1: $\delta_n < \delta_m$ ise $0 < \dfrac{x + n_x x_0}{\delta_m - \delta_n}$ olur, $N = \left[\dfrac{x + n_x x_0}{\delta_m - \delta_n}\right]$ tam kısmı $0 \leqslant N \leqslant \dfrac{x + n_x x_0}{\delta_m - \delta_n} < N + 1$ gerçekler ve $\xi = (N+1)(\delta_m - \delta_n) - n_x x_0 \in A_{q_0, x_0}$ için $N(\delta_m - \delta_n) \leqslant x + n_x x_0 < (N+1)(\delta_m - \delta_n)$ ve $x < \xi < x + \varepsilon$ yani $\xi \in (x, x+\varepsilon) \cap A_{q_0,x_0} \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_{q_0,x_0}$ olur, çünkü $N(\delta_m - \delta_n) - n_x x_0 \leq x$ nedeniyle $\xi = N(\delta_m - \delta_n) + (\delta_m - \delta_n) - n_x x_0 \leqslant x + (\delta_m - \delta_n) = x + |\delta_m - \delta_n| < x + \varepsilon$ geçerlidir ve $\xi > x$ apaçıktır.

Durum 2: $\delta_m < \delta_n$ ise, bu kez $x - n_x x_0 < 0$ ve $\delta_m - \delta_n < 0$ ve $0 < \dfrac{x - n_x x_0}{\delta_m - \delta_n}$ gözleyip $N' = \left[\dfrac{x - n_x x_0}{\delta_m - \delta_n}\right]$ için $(N'+1)(\delta_m - \delta_n) < x - n_x x_0 \leqslant N'(\delta_m - \delta_n)$ ve $0 \leqslant N'$ olur, $n < m$ nedeniyle, yukarda gözlendiği gibi $\xi' = (N'+1)(\delta_m - \delta_n) + n_x x_0 \in A_{q_0,x_0}$ gerçekleyen ξ' gerçel sayısı için $x - \varepsilon < x - |\delta_n - \delta_m| = x + (\delta_m - \delta_n) < N'(\delta_m - \delta_n) + (\delta_m - \delta_n) + n_x x_0 = \xi' < x$ yani $\xi' \in (x - \varepsilon, x) \cap A_{q_0,x_0} \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_{q_0,x_0}$ olur.

Her iki durumda da $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_{q_0,x_0} \neq \emptyset$ bulunmuştur, kısacası A_{q_0,x_0} kümesi yoğundur.

Sonuç 1: Her q_0 irrasyonel sayısı için, Dirichlet Teoremi $A_{2\pi, \pi q_0} = \{2n\pi + k\pi q_0 : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin gerçel sayılarda yoğun olduğunu söyler, çünkü 2π irrasyonel sayısı ile $\pi q_0 (\neq 0)$ sayısı $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsızdır (neden?). O halde bu yoğun kümenin sürekli sinüs fonksiyonu altındaki görüntüsü olan

$$E = \{\sin(2n\pi + k\pi q_0) : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\sin k\pi q_0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \mp \sin \pi q_0, \mp \sin 2\pi q_0, \ldots\}$$

kümesi de $[-1,1]$ aralığında yoğundur, böylelikle $[-1,1]$ aralığındaki **her** gerçel sayıya, bu kümeden seçilen ikişer ikişer farklı terimlerden oluşan yakınsak bir dizi **yakınsar**. Bu nedenle $\{\sin n\pi q_0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi kesinlikle

ıraksar, çünkü eğer yakınsasaydı, $\ell_0 = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi q_0$ gerçel sayısı tanımlı olur (dikkat: her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leqslant \sin n\pi q_0 \leqslant 1$ nedeniyle $\ell_0 \in [-1,1]$ gözleyiniz.) ve E kümesinin elemanlarıyla, yalnızca ℓ_0 ve $-\ell_0$ gerçel sayılarına yakınsanabilirdi, çünkü $\{\sin n\pi q_0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm alt dizileri ℓ_0 ve $\{-\sin n\pi q_0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm alt dizleri ise $-\ell_0$ sayısına yakınsar ve sonsuz terimi birinci diziden, sonsuz terimi ise ikinciden seçilmiş tüm dizilerse ıraksaktır (neden?). Benzer biçimde q_0 irrasyonel sayısı ne olursa olsun $\{\cos n\pi q_0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ıraksar, çünkü $\{\cos(2n\pi + k\pi q_0) : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos k\pi q_0 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n\pi q_0 : n \geq 0\}$ kümesi $[-1,1]$ aralığında yoğundur.

Ödev: $x_0 \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı ne olursa olsun, her $x \in [-1,1]$ gerçel sayısına karşılık, doğal sayıların öyle uygun bir artan

$$n_1(x) < n_2(x) < n_3(x) < \cdots < n_m(x) < n_{m+1}(x) < \cdots$$

dizisi vardır ki $x = \lim_{n\to\infty} \cos(n_m(x) \cdot x_0)$ gerçekleşir.

Dikkat: Yukardaki örnek 8)'in daha geneli aşağıdaki sonuçtur:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n^a} = +\infty \quad (\forall x \in (1,\infty)\,,\ \forall a \in \mathbb{R})$$

Çözüm: $a \leq 0$ için iddia apaçık olduğundan, $0 < a$ durumu irdelenecektir. Arşimet İlkesiyle $\exists m_a \in \mathbb{N}$, $1 < a+1 < m_a$ ve $1 < x$ nedeniyle $\exists \delta_x > 0$, $1 + \delta_x < x$ geçerlidir. $m_a \geq 2$ gözleyiniz. Dikkat edilirse her $n \geq m_a$ için

$$x^n > (1+\delta_x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_x^k > \binom{n}{m_a} . \delta_x^{m_a}$$

ve üstelik

$$\binom{n}{m_a} . \delta_x^{m_a} = \frac{\delta_x^{m_a}}{m_a!} . n^{m_a} \left(\frac{n\,(n-1)\,..\,(n-(m_a-1))}{n^{m_a}} \right)$$

olduğundan, kısalık amacıyla, sadece $a > 0$ sabiti ile x gerçel sayısına bağlı aşağıdaki

$$M_x = \frac{\delta_x^{m_a}}{(m_a)!} > 0$$

pozitif sabitini tanımlayıp $m_a > a+1$ nedeniyle $n^{m_a} > n^a . n$ gözleyerek kolayca

$$x^n > M_x . b_n . n^a . n \quad (\forall n \geq m_a)$$

bulunur, burada apaçıktır ki, herbir $n \geq m_a$ için

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n(n-1)..(n-(m_a-1))}{n^{m_a}} \\ &= \frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}...\frac{n-(m_a-1)}{n} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)..\left(1-\frac{m_a-1}{n}\right) \end{aligned}$$

yazılmıştır ve sağ yanda çarpıma katılan tam $m_a - 1$ tane yani sabit sayıda terim vardır. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}(M_x b_n) = M_x > 0$ ve

$$\frac{x^n}{n^a} > (M_x.b_n).n \quad (\forall n \geq m_a)$$

olduğundan istenen sonuç çıkar.

Uyarı: Bu soru daha kolay bir biçimde, bu Bölüm'de ilerde gösterilecek olan şu temel bilgiyle çözülür:

Bilgi: Eğer pozitif terimli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} &< 1 \text{ ise } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad , \\ 1 &< \underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} \text{ ise } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \end{aligned}$$

gerçekleşir.

Yukardaki soruda $1 < x$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{x^n}{n^a} > 0$ biçiminde tanımlanan dizi apaçıktır ki ikincisini gerçekler!

Uyarı: İleri düzeyde Analiz kitaplarında her $x > 0$ için, ünlü Gauss bağıntısı

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!.n^x}{x(x+1)...(x+n)} = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt$$

'nın ispatını okuyunuz! Sağ yanda yer alan özge olmayan Riemann tümlevi $\Gamma(x)$ ile yazılır, bkz Bölüm3.

Uyarılar:

1) Sürekli fonksiyonların noktasal limit fonksiyonu süreksiz olabilir, bunun için Örnek 1.1) 'e bakmak yeterlidir. Bu örnekte f_n polinomları sürekli oysa $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu $f(1-) = 0 \neq f(1)$ gerçeklendiği için süreksizdir. Bilindiği gibi, bir f fonksiyonu için, ancak ve yalnız

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in(x_0-\varepsilon_0,x_0)}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

koşulu gerçeklendiğinde, f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **sol limiti** vardır denilir ve $f(x_0-) = \ell$ yazılır.

$f(x_0+)$ **sağ limiti** benzer biçimde tanımlanır. Analiz'in en temel teoremlerinden birisi şu temel gerçeği söyler: f fonksiyonunun $x_0 \in Tan(f)$ noktasında sürekli olabilmesi için gyk $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$ eşitliklerinin geçerli olmasıdır.

2) Süreksiz fonksiyonların noktasal limit fonksiyonu sürekli olabilir. Gerçekten Örnek 1.5) 'de tanımlanan f_n fonksiyonu $r_n = \dfrac{1}{n}$ rasyonel sayısında $f_n(r_n-) = 1 - \dfrac{1}{n^2} \neq 1 + \dfrac{1}{n^2} = f_n(r_n+)$ gerçeklediği için süreksizdir. Oysa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ süreksiz fonksiyonlarının noktasal limit fonksiyonu $\forall x \in A = [0,1]$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ gerçekler, sabit fonksiyondur, süreklidir.

3) Sürekli sınırlı fonksiyonların noktasal limit fonksiyonu sınırsız olabilir. Gerçekten bilindiği gibi, ancak ve yalnız aşağıdaki eşdeğer koşullardan birisini gerçekleyen bir f gerçel değerli fonksiyonuna **sınırlı fonksiyon** denilir:

Koşul 1: $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f(Tan(f)) \subseteq [a, b]$.

Koşul 2: $\exists M > 0$, $f(Tan(f)) \subseteq [-M, M]$.

Birinci koşulun yerine $a < b$ ve $a \leqslant f(x) \leqslant b$ $(\forall x \in Tan(f))$, ikinci koşulun yerine $|f(x)| \leqslant M$ $(\forall x \in Tan(f))$ yazılabilir. Dikkat edilirse Koşul 2 geçerli ise $a = -M$ ve $b = M$ alarak Koşul 1 'in geçerli olduğu, tersine Koşul 1 geçerliyse $M = |a| \vee |b| = \max\{|a|, |b|\}$ tanımlayarak $-M \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant f(x) \leqslant b \leqslant |b| \leqslant M$ ve böylelikle $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ $(\forall x \in Tan(f))$ yani $|f(x)| \leqslant M$ $(\forall x \in Tan(f))$ bulunur kısacası Koşul 2 elde edilir. Şimdi $A = (0,1]$ ve $f_n(x) = \begin{cases} n & ; x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & ; x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ olsun. Dikkat: $f_n(\frac{1}{n}-) = n = f_n(\frac{1}{n}+)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $f_n((0,1]) \subseteq [0, n]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle tüm f_n fonksiyonları sürekli ve sınırlıdır. Oysa herbir $x \in A = (0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ için, tıpkı Örnek 1.4) 'yapıldığı gibi $\exists n_x \in \mathbb{N}$, $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $(\forall n > n_x)$ ve $f_n(x) = \frac{1}{x}$ $(\forall n > n_x)$ nedeniyle $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ $(\forall x \in A)$ bulunur. Bu noktasal limit fonksiyonu sınırsızdır, çünkü zaten $0 \leqslant f(x)$ $(\forall x \in A)$ olduğundan $f(x) \leqslant M$ $(\forall x \in A)$ gerçeklenecek biçimde $M > 0$ sabiti **yoktur**, çünkü $M > 0$ ne olursa olsun $x_M = \dfrac{1}{M+1} \in (0,1] = A$ için $f(x_M) = M + 1 > M$ olmaktadır, kısacası f noktasal limit fonksiyonu **sınırsızdır**.

Yukarıdaki Uyarı 1 ve Uyarı 3 'de görülen garipliklerin gerçekleşmediği yakınsama türü düzgün yakınsamadır.

Tanım 3: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları ve onların A kümesinde tanımlı $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu verilsin. Ancak ve yalnız

Koş1: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_\varepsilon)$

koşulu gerçeklendiğinde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisine $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ limitine **düzgün yakınsıyor** denilir ve $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ya da $f_n \overset{d}{\to} f$ yazılır. Bu tanımdaki koşul yerine ona eşdeğer olan

Koş2: $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geq n_\varepsilon)$

Koş3: $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A, \forall n \geq n_\varepsilon)$

koşullarından herhangi birisi de yazılabilirdi. Gerçekten tanımdaki koşul geçerliyse, apaçık biçimde Koş2 koşulu geçerlidir, çünkü iyi bilindiği gibi $c \leqslant d$ için gerek yeter koşul $(= gyk)$ $c < d$ ve $c = d$ bağdaşmaz iddialarından tam birisinin geçerli olmasıdır; tersine Koş2 geçerliyse, özel olarak $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ olur, buradan $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bularak Koş1 koşulu elde edilir. Koş2 ve Koş3 koşullarının eşdeğerliğini siz gösterin, çünkü aşağıdaki çıkarsama geçerlidir.

$$\forall x \in E \text{ için } x \leqslant a_0 \Longrightarrow \sup E \leqslant a_0$$

Öte yandan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinde tanımlı f gerçel değerli fonksiyonu eğer **sınırlıysa**, yani $|f(x)| \leqslant M$ $(\forall x \in A)$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $M > 0$ sabiti, eğer varsa, $\|f\|$ ya da bazen $\|f\|_A$ işaretiyle yazılan

$$\|f\| = \|f\|_A = \sup_{x\in A} |f(x)| \qquad (\leqslant M)$$

supremumu kesinlikle **var** ve iyi tanımlıdır. Özellikle $A = [a, b]$ ve f fonksiyonu bu aralıkta tanımlı, gerçel (ya da kompleks) değerli ve **sürekli** ise $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ supremumu iyi tanımlıdır, hatta $[a, b]$ kapalı-sınırlı aralığında sürekli gerçel değerli f için Weierstrass'ın ünlü teoremi ile $\exists x_0 \in [a, b], |f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ olur ve her maksimum supremum olduğundan (dikkat: $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}$ için $\max E = y_0$ tanımlıysa $y_0 = \sup E$ olur, (neden?)) $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = |f(x_0)|$ olur. f sürekli olmasa bile $\|f\|$ sayısı, negatif olmayan $|f(x)|$ gerçel sayılarının supremumu olduğu ve böylece her $x \in A$ için $0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|$ gerçekleştiğinden, kesinlikle

$$0 \leqslant \|f\|$$

geçerlidir. $\|f\|$ negatif olmayan gerçel sayısına f fonksiyonunun **supremum norm**u denilir. Dikkat: her $x \in A$ için $|f(x)| = |-f(x)| = |(-f)(x)|$ olduğundan $\|f\| = \|-f\|$ gözleyiniz.

Norm bilgisi kullanılarak, Tanım 2 yeniden ve kısa bir biçimde şöyle yazılır: Ancak ve yalnız

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \|f_n - f\|_A < \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_\varepsilon)$$

koşulu geçerliyse $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisine f fonksiyonuna A kümesinde **düzgün yakınsıyor** denilir. Dikkat edilirse

$$0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_A < \varepsilon \qquad (\forall x \in A, \forall n \geq n_\varepsilon)$$

gerçekleştiğinden, herbir $x \in A$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limitinin var ve $f(x)$ olduğu, kısacası $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in A)$ olduğu anlaşılır, yani $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi A kümesinde f fonksiyonuna eğer düzgün yakınsıyorsa öncelikle noktasal yakınsar. Başka bir söyleyişle düzgün yakınsama geçerliyse noktasal yakınsama sonucu çıkarsanır. Oysa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi eğer $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ limitine noktasal yakınsıyorsa, düzgün yakınsamanın gerçekleşmesi **gerekmez**. Örneğin, f_n fonksiyonları sürekli oysa $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu süreksiz ise, bu yakınsama kesinlikle düzgün yakınsama **olamaz**, çünkü aşağıdaki temel Teorem 1 geçerlidir. Sözgelimi $f_n(x) = x^n$ $(\forall x \in (-1,1], \forall n \in \mathbb{N})$ biçiminde tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin noktasal limit fonksiyonu

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

olup, bu fonksiyon apaçık biçimde $f(1) = 1 \neq 0 = f(1^-)$ sağladığı için $(-1,1]$ aralığında $x = 1$ sağ uç noktasında süreksizdir, dolayısıyla f fonksiyonu $A = (-1,1]$ aralığında $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin noktasal limitidir, fakat düzgün yakınsak limiti **olamaz**, çünkü f_n fonksiyonlarının hepsi A kümesinde sürekli oysa $f = \lim\limits_{n\to\infty}$ f_n noktasal limit fonksiyonu A kümesinde sürekli değildir, bu nedenle aşağıdaki Teorem1$i)$ kullanılır. Ayrıca $r_n = \frac{n-1}{n}$ rasyonel sayıları için $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$ fakat $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \dfrac{1}{e} \neq 1 = f(1)$ olduğundan Teorem $2ii)$ nedeniyle de$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin $(-1,1]$ kümesinde f noktasal limitine **düzgün yakınsamadığı** anlaşılır. Ayrıca her $x \in [0,1)$ için $f(x) = 0$ ve $f_n(1) = f(1)$ böylece $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)|$ olduğundan, $n_0 \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun aşağıdaki gözlenerek de aynı sonuca ulaşılır:

$$1 = \sup_{x\in[0,1)} x^n = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| \not< \frac{1}{2} \quad (\forall n \geq n_0).$$

Teorem 2: $i)$ Sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak limiti süreklidir.

$ii)$ Düzgün sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak limiti düzgün süreklidir.

$iii)$ Sürekli ve sınırlı fonksiyonların düzgün yakınsak limiti sürekli ve sınırlıdır.

Kanıtlama: $i)$ A kümesinde $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ geçerli ve tüm f_n fonksiyonları A kümesinde sürekli olsun. Amacımız f fonksiyonunun **herbir** $x_0 \in A$ noktasında sürekli olduğunu göstermektir. O halde uygun bir $\delta_\varepsilon > 0$ yardımıyla $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ çıkarsamasını göstermeliyiz. Oysa düzgün yakınsama nedeniyle $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \|f_n - f\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ geçerli olduğundan, keyfi seçilen bir $n_0 \geq n_\varepsilon$ doğal sayısı alınarak, f_{n_0} fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli olduğundan $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ geçerli ve üstelik $n_0 \geq n_\varepsilon$ nedeniyle $\|f_{n_0} - f\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ gözleyerek sonuçta $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ise kısacası $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ ise aşağıdakiler bulunur:

$$
\begin{aligned}
|f(x_0)-f(x)| &\leqslant |f(x_0)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f(x)| \\
&\leqslant \|f-f_{n_0}\|+|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)|+\|f_{n_0}-f\| \\
&= 2\|f_{n_0}-f\|+|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)| < \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$ii)$ Bilindiği gibi $A = Tan(f)$ kümesinde tanımlı gerçel değerli bir f fonksiyonuna, ancak ve yalnız,

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta_\varepsilon>0,\ x,y\in A \text{ ve } |x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

çıkarsama koşulunu gerçeklerse A kümesinde **düzgün süreklidir** denir. Bu tanımda $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık belirlenen δ_ε pozitif sayısına, ε sayısına karşı belirlenen **düzgün süreklilik sabiti** denilir. A kümesinde düzgün sürekli fonksiyon apaçık biçimde A kümesinin her noktasında süreklidir (neden?), oysa düzgün sürekli olmayan sürekli fonksiyonlar **vardır**. Örneğin, her $n > 1$ için $p_n(x) = x^n$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ polinomları bu niteliktedir, örneğin $p_2(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde hiçbir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir düzgün süreklilik sabiti **belirleyemez**, çünkü $\delta > 0$ ne olursa olsun,

$$\left|\left(x+\frac{\delta}{2}\right)-x\right|<\delta \quad \text{ve} \quad \varepsilon<\left|p_2(x+\frac{\delta}{2})-p_2(x)\right|$$

gerçekleyen sayılamaz sonsuz tane $x \in \mathbb{R}$ belirlemek çok kolaydır, çünkü ünlü Arşimet İlkesi nedeniyle, $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ ne olursa olsun $\varepsilon - \frac{\delta^2}{4} < \delta n_\varepsilon$ olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ belirlenebildiğinden, sonuçta $n_\varepsilon < x$ gerçekleyen her $x \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon - \frac{\delta^2}{4} < \delta n_\varepsilon < \delta x$ ve böylece $\varepsilon < \delta x + \frac{\delta^2}{4} = \left|p_2(x+\frac{\delta}{2}) - p_2(x)\right|$ bulunur. Siz $p_3(x) = x^3$ ve $p_4(x) = x^4$ polinomlarının $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli **olmadığını** benzer yöntemle gösteriniz. Buna karşılık ünlü Ortalama Değer Teoremi nedeniyla $x < y$ ise $\ell nx - \ell ny = (x-y)\cdot\dfrac{1}{\xi_{x,y}}$ olacak biçimde $x < \xi_{x,y} < y$ var olduğundan, $f(x) = \ell nx$ doğal logaritma fonksiyonu $0 < a$ ne olursa olsun $[a,\infty)$ sınırsız aralığında **düzgün süreklidir,** çünkü $M_0 = \dfrac{1}{a} > 0$ olmak üzere, $x, y \in [a,\infty)$ ne olursa olsun $|\ell nx - \ell ny| \leq M_0\,|x-y|$ gerçekler (neden?) , böylece $|x-y| < \delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M_0}$ ise $|\ell nx - \ell ny| < \varepsilon$ bulunur.

Şimdi, tüm f_n fonksiyonları A kümesinde düzgün sürekli ve $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ olsun.

İddia: f fonksiyonu da A kümesinde düzgün süreklidir; çünkü $i)$ kanıtlamasında kullanılan f_{n_0} düzgün sürekli olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\frac{\varepsilon}{3}$ sayısına karşılık uygun bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayesinde $|x-y| < \delta_\varepsilon$ ve $x, y \in A$ ise$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ve orada yapıldığı gibi $|f(x)-f(y)| \leqslant 2\|f-f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)| < \varepsilon$ bulunur. Kısacası f fonksiyonu her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir düzgün süreklilik sabiti belirleyebilmektedir.

$iii)$ Hem A kümesinde $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ oluyor ve tüm f_n fonksiyonları A kümesinde sürekli ve sınırlıysa, yani herbir $n \in \mathbb{N}$ için f_n sürekli ve $|f_n(x)| \leqslant M_0$ $(\forall x \in A)$ olacak biçimde bir $M_0 > 0$ sabiti vardır (neden?), zaten $i)$ şıkkı nedeniyle f süreklidir.

Şimdi, aşağıdaki Teorem 2' den önce sıklıkla yararlanacağımız şu temel bilgiyi görelim:

Yardımcı Teorem 4: Bir $f : A \to \mathbb{R}^1$ fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında sürekli olabilmesi için gyk bu noktada **dizisel sürekli** olması, yani terimleri A kümesinden alınıp $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gerçekleyen **her** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ koşulunun gerçeklenmesidir.

Kanıtlama: Gereklik: f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde süreklilik gereği $\exists\delta_\varepsilon > 0,\ f\left((x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\cap A\right) \subseteq \left(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right)$ olur, yani her $x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\cap A$ için $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$ kısacası $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ gerçekleşir. Oysa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ nedeniyle $x_0-\delta_\varepsilon < a_n < x_0+\delta_\varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuçta her $n \geq n_\varepsilon$ için $a_n \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\cap A$ böylelikle $f(a_n) \in f\left((x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\cap A\right)$ $\subseteq \left(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right)$ yani $|f(a_n)-f(x_0)| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ olur, buysa $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ demektir.

Yeterlik: Yeterlik varsayımı geçerliyken f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli olmasaydı, aşağıdaki süreklilik koşulu **gerçekleşmezdi**:

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0,\ f\left((x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\cap A\right) \subseteq \left(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right)$ O halde şu koşul gerçekleşirdi: **Koş:** $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0,\ f\left((x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A\right) \nsubseteq \left(f(x_0)-\varepsilon_0, f(x_0)+\varepsilon_0\right)$. Dolayısıyla $\delta_n \to 0^+$ gerçekleyen pozitif terimli herhangi bir $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri için $f\left((x_0-\delta_n, x_0+\delta_n)\cap A\right) \nsubseteq \left(f(x_0)-\varepsilon_0, f(x_0)+\varepsilon_0\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur, böylelikle aşağıdaki sonuç bulunurdu:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n^* \in (x_0-\delta_n, x_0+\delta_n)\cap A, f(a_n^*) \notin \left(f(x_0)-\varepsilon_0, f(x_0)+\varepsilon_0\right)$$

Bu sonuç ise yeterlik varsayımı ile çelişirdi, çünkü $0 \leq |a_n^* - x_0| < \delta_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ olduğundan, ünlü **Sıkıştırma Lemması** kullanılarak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n^* - x_0| = 0$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^* = x_0$ bulunarak yeterlik varsayımı nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n^*) = f(x_0)$ olması gerekirken bu gerçekleşmezdi, çünkü $f(x_0)-\varepsilon_0 < f(a_n^*) < f(x_0)+\varepsilon_0$ gerçekleyen tek bir $f(a_n^*)$ bile **yoktur**, çelişki! Demek ki yeterlik varsayımı geçerliyken f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli olmak zorundadır, bitti!

Teorem 3: $i)$ A kümesinde $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ olması ile $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$ koşulları eşdeğerdir.

$ii)$ A kümesinde $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ise ve tüm f_n fonksiyonları sürekli ve üstelik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A^\omega$ dizisi için $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$ limiti **varsa** aşağıdaki geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

$iii)$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyonlar dizisinin $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ noktasal limiti A kümesinde **tanımlı**, fakat uygun bir yakınsak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A^\omega$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) \neq f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ oluyorsa $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ yakınsaması düzgün yakınsama **değildir**.

$iv)$ A kümesinde $f \overset{d}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$ ve $g \overset{d}{=} \lim_{n\to\infty} g_n$ ise $a, b \in \mathbb{R}$ sabitleri ne olursa olsun $af_n + bg_n \overset{d}{\to} af + bg$ olur.

$v)$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sabiti ne olursa olsun $|x| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$ olur. Bu noktasal yakınsama düzgün yakınsama **değildir**.

Kanıtlama: $i)$ Düzgün yakınsama tanımından kolayca çıkarsanır.

$ii)$ $f \overset{d}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$, tüm f_n fonksiyonları A kümesinde sürekli ve $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ ise $|f_n(x_n) - f(x_0)| \to 0$ olur, çünkü $0 \leqslant |f_n(x_n) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \|f_n - f\| + |f(x_n) - f(x_0)| = \varepsilon_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$olur, burada f fonksiyon sürekli (neden?) ve $x_n \to x_0$ nedeniyle Yardımcı teorem 3 kullanılarak $f(x_n) \to f(x_0)$ olduğundan, $i)$ şıkkı kullanılarak yukarıdaki $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ negatif olmayan gerçel sayılar dizisi sıfıra yakınsar (neden?), böylelikle istenen bulunur.

$iii)$ Bir önceki şıktan çıkarsanır.

$iv)$ Öncelikle, A kümesinde tanımlı gerçel değerli ve sınırlı f ve g fonksiyonları için, kolayca

$$\|f + g\|_A \leqslant \|f\|_A + \|g\|_A$$

elde edilmelidir, oysa her $x \in A$ için $|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_A + \|g\|_A$ nedeniyle kolayca $\|f + g\| = \sup_{x\in A} |(f + g)(x)| \leqslant \|f\|_A + \|g\|_A$ bulunur. Sonuçta, bu şıktaki hipotezler altında, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|(af_n + bg_n) - (af + bg)\| = \|a(f_n - f) - b(g_n - g)\| \leqslant |a| \cdot \|f_n - f\| + |b| \cdot \|g_n - g\| = \delta_n$ gerçekleştiği ve $\delta_n \to 0$ olduğundan istenen bulunur.

$v)$ Bu şıkkı kanıtlamak için, ispatı ileride verilecek olan şu temel bilgiyi kullanalım: Pozitif terimli bir $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\omega$ dizisi için

$$(*) \quad \text{eğer } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{ise } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur, özellikle $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ geçerlidir. O halde $a_n = n^\alpha |x|^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $0 < |x| < 1$ olmak üzere $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} |x| = |x| \cdot (1 + \frac{1}{n})^\alpha \to |x| < 1$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ yani $\lim_{n\to\infty} |n^\alpha x^n| = 0$ bulunur, buysa $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$ demektir. $x = 0$ için (ayrıca $\alpha \leqslant 0$ için $x \in (-1, 1)$ ne olursa olsun) $\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$ gözleyiniz. Demek ki

$$\forall x \in (-1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$$

olmaktadır. Oysa, $\alpha > 0$ yani $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ise $f_n(x) = n^\alpha x^n$ sürekli fonksiyonlarının $A = (-1, 1)$ açık aralığında noktasal limit fonksiyonu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n = 0$ olur, fakat bu noktasal yakınsama, kesinlikle düzgün yakınsama değildir, kısacası $\|f_n - f\|_A \to 0$ koşulu **gerçekleşmez** çünkü, dikkat edilirse $\alpha > 0$

olduğunu unutmadan

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \|f_n - f\|_A = \|f_n\|_A = n^\alpha \to +\infty$$

geçerlidir. Gerçekten $\ddot{O}rnek$ 0.6'da gözlendiği gibi

$$\|f_n\|_A = \sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} n^\alpha |x|^n = n^\alpha \sup_{x\in(-1,1)} |x|^n = n^\alpha \cdot 1 = n^\alpha$$

geçerlidir.

* **Teorem 4:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli olsun. $[a,b]$ aralığında $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ olabilmesi için gyk, terimleri $[a,b]$ aralığında alınan **her** yakınsak $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi ve $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ fonksiyon dizisinin **herbir** $\{f_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ alt dizisi için $\lim\limits_{m\to\infty} f_{n_m}(x_m) = f\left(\lim\limits_{m\to\infty} x_m\right)$ eşitliğinin gerçeklenmesidir.

Kanıtlama: Gereklik Teorem 2. $ii)$ nedeniyle apaçıktır. Tersine yeterlik koşulu gerçeklendiğinde $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ başka bir yazışla **Koş:** $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n - f\| < \varepsilon \ (\forall n \geq n_\varepsilon)$ koşulu gerçeklenir, çünkü eğer gerçeklenmeseydi

$$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N > n, \varepsilon_0 \leq \|f_N - f\|$$

gerçeklenir, böylelikle tümevarımla tanımlanacak olan uygun bir kesin artan $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < n_{m+1} < \cdots$ doğal sayıları sayesinde $\varepsilon_0 \leq \|f_{n_m} - f\| \ (\forall m \in \mathbb{N})$ olurdu (neden?). Herhangi bir $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$ pozitif sayısı seçerek kolayca aşağıdakiler elde edilirdi:

$$\delta_0 < \delta_0 + \frac{\varepsilon_0 - \delta_0}{2^m} < \varepsilon_0 \leq \|f_{n_m} - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_m}(x) - f(x)| \qquad (\forall m \in \mathbb{N}).$$

Oysa $\delta_0 < \sup E$ ise $\delta_0 < x_0$ gerçekleyen en az bir $x_0 \in E$ var olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}, \exists x_m \in [a,b], \delta_0 < \delta_0 + \dfrac{\varepsilon_0 - \delta_0}{2^m} < |f_{n_m}(x_m) - f(x_m)|$ bulunurdu, oysa ünlü Heine-Borel Teoremi gereği, bu belirlenen $x_m \in [a,b]$ gerçel sayılarının uygun bir alt dizisinin yakınsadığını bildiğimizden, karışıklığa yol açmaması için, bu alt dizi yerine $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ dizisi ile çalışıp $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ dizisinin yakınsadığını ve $\xi_0 = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ gerçeklendiğini varsayalım (dikkat: $\xi_0 \in [a,b]$ olur, neden?). Sonuçta f fonksiyonu sürekli böylelikle dizisel sürekli olduğundan $f(\xi_0) = f\left(\lim\limits_{m\to\infty} x_m\right) = \lim\limits_{m\to\infty} f_{n_m}(x_m)$ olduğundan

$$\delta_0 < \lim_{m\to\infty} |f_{n_m}(x_m) - f(x_m)| = \left|\lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x_m) - \lim_{m\to\infty} f(x_m)\right| = |f_{n_m}(\xi_0) - f(\xi_0)| = 0$$

yani $0 < \delta_0 \leq 0$ çelişkisi bulunurdu, o halde yeterlik hipotezi $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ sonucunu verir, bitti!

Uyarılar

1) $f_n(x) = n^\alpha x^n$ $(\forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyon dizisi de $\alpha > 0$ ise , noktasal limitine düzgün yakınsayamaz, aksi halde her $x \in [-1,1]$ için öncelikle $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ limitinin var olması gerekirdi oysa $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(-1)$ limitleri, birer gerçel sayı değildir.

2) Yukarıdaki teoremin $v)$ şıkkının kanıtlanmasında verilen $(*)$ bilgisi kullanılarak $b_n = (n+1)^{20} \cdot (0,1)^n$ terimlerinden oluşan $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin de $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ gerçeklediği anlaşılır. Bilgisayar yardımıyla bu dizinin ilk baştaki onlarca teriminin **çok** büyük pozitif sayılar olduğu gözlenebilir, örneğin ilk terimler $b_1 = 2^{20}.(0,1)$ $= 104857,6$ ve $b_2 = 3^{20}.(0,01) = 34867844,01$ ve $b_3 = 4^{20}\,(0,001) = 1099511627,776$ olur, kısacası dizi, üçüncü terimde milyarı geçmektedir ve birkaç bin terim boyunca gittikçe artar. Bu nedenle doğru dürüst matematik bilmeyen fizikçi ve mühendislerin yaptığı gibi, bir dizinin baştan yüzlerce terimini hesaplayıp, üstelik bunların artarak olağanüstü pozitif büyüklüklere eriştiğini gözleyerek, bu dizinin $+\infty$ limitine gittiğini zannetmek, **yanlış** bir çıkarsama yapmaktır.

Artık somut örneklere geçilebilir.

Örnekler 2:

1) Aşağıdaki fonksiyonların $[0,1]$ aralığında noktasal ve düzgün yakınsaklığını araştırınız.

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}\ ,\ g_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}\ ,\ h_n(x) = x^n(1-x).$$

Çözüm: İkinci fonksiyon dizisinin noktasal limit fonksiyonu $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ $(\forall x \in [0,1])$, birinci dizinin ise $f(0) = \frac{1}{2}$ ve $f(x) = 0$ $(\forall x \in (0,1])$ gerçekleyen fonksiyondur. Birinci dizinin noktasal limit fonksiyonu $f(0) \neq f(0+)$ gerçeklediği için süreksizdir, dolayısıyla Teorem $1i)$ nedeniyle birinci dizi noktasal limitine düzgün yakınsayamaz. İkinci dizi de noktasal limitine düzgün yakınsayamaz çünkü $r_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$ rasyonel sayılar dizisinin limiti $0 = \lim\limits_{n\to\infty} r_n \in [0,1]$ oysa $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(r_n) = 1$ fakat $g(x) = 0$ $(\forall x \in [0,1])$ nedeniyle $g(\lim\limits_{n\to\infty} r_n) = g(0) = 0$ ve sonuçta $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(r_n) \neq g\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right)$ olduğundan, Teorem $2iii)$ kullanılır. Ayrıca $\|g_n\| = g_n(\frac{1}{n}) = 1$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - 0\| \neq 0$ olur. Üçüncü fonksiyon dizisinin noktasal limit fonksiyonu da sıfır sabit fonksiyonudur ve bu dizi için $h_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$ nedeniyle, h_n fonksiyonu $[0, \frac{n}{n+1}]$ aralığında artan $[\frac{n}{n+1}, 1]$ aralığında azalan olduğundan

$$\begin{aligned}\|h_n - h\| &= \|h_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} h_n(x) = h_n(\tfrac{n}{n+1}) \\ &= \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot (1 - \tfrac{n}{n+1}) = \tfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \tfrac{1}{n+1} \to \tfrac{1}{e} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

gerçekleştiğinden bu sonuncu yakınsama düzgün yakınsamadır.

2) Aynı soruyu aşağıdaki fonksiyon dizileri için çözünüz:

$$f_n(x) = nx^n(1-x)\ ,\ g_n(x) = n^2x^n(1-x)^3\ ,\ h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx},$$
$$\varphi_n\left(x\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ q_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Çözüm: İlk dizi için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$ ve her $\in [0,1)$ için Teorem $2v)$ ' de kanıtlandığı gibi $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ve sonuçta ilk fonksiyon dizisinin noktasal limit fonksiyonu $f(x) = 0$ $(\forall x \in [0,1])$ olur. Oysa $p_n = \frac{n}{n+1} \in [0,1]$ rasyonel sayılar dizisi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p_n) = p_n^n \cdot n(1-p_n) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \to \frac{1}{e}$ gerçekler buna karşılık $0 = f(1) = f(\lim\limits_{n\to\infty} p_n) \neq \dfrac{1}{e} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(p_n)$ nedeniyle birinci yakınsama düzgün yakınsama değildir. İkinci dizi sıfır sabit fonksiyonuna noktasal yakınsar ve

$$\|g_n - g\| = \|g_n\| = \max_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{n+3}\right) = \frac{3^3\cdot n^{n+2}}{(n+3)^{n+3}}$$
$$= 27\left(\frac{n}{n+3}\right)^2 \frac{1}{(1+\frac{3}{n})^n}\cdot\frac{1}{n+3} \to \frac{27}{e^2}\cdot 0 = 0$$

nedeniyle bu bir düzgün yakınsamadır. Üçüncü fonksiyon dizisi için $h_n(x) = x\cdot\dfrac{nx}{1+nx}$ $(\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N})$ ve böylece $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = x$ $(\forall x \in [0,1])$ ve $0 \leqslant \dfrac{nx^2}{1+nx} \leqslant x$ $(\forall x \in [0,1])$ gözleyerek

$$\|h_n - h\| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left(x - \frac{nx^2}{1+nx}\right) = \sup_{x\in[0,1]}\frac{x}{1+nx} = \frac{1}{1+n} \to 0$$

nedeniyle bu da bir düzgün yakınsamadır. Son fonksiyon dizisi $M > 0$ ne olursa olsun $[0,M]$ aralığında $\varphi\left(x\right) = e^x$ üstel fonksiyonuna düzgün yakınsar, çünkü

$$\|\varphi_n - \varphi\| = \max_{x\in[0,M]}\left|\varphi_n\left(x\right) - \varphi\left(x\right)\right| = \max_{x\in[0,M]}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = \max_{x\in[0,M]}\left(e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$$

$$= e^M - \left(1+\tfrac{M}{n}\right)^n = \varepsilon_n \to 0$$

olur, çünkü $h_n(x) = e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ fonksiyonu $[0,M]$ aralığında azalmayandır. Gerçekten her $x \in [0,M]$ için $h_n'(x) = e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$ $(n>1)$ geçerlidir çünkü

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{x}{n+2}\right)^{n+2} \leq \cdots \leq e^x \qquad (\forall x \in [0,\infty))\,.$$

Öte yandan $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ($\equiv \sin x$) olmak üzere $[0,1]$ aralığında $\lim_{n\to\infty} q_n(x) \overset{d}{=} s(x)$ göstermek güç değildir, çünkü

$$0 \leq |q_n(x) - s(x)| < \frac{2n+2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{n} \qquad (\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N})$$

geçerlidir, çünkü her $x \in [0,1] = I$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k > n$ için $\left|x^{2k-1}\right| = x^{2k-1} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|q_n(x) - s(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} = \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+5)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{(2n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+2)^4} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+2)^2}\right)^m = \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+2)^2}} \\
&= \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)!\left((2n+2)^2 - 1\right)} < \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} . \frac{2n+2}{(2n+1)^2} \\
&< \frac{2n+2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

bulunur, böylece $0 \leq \|q_n - s\|_I = \sup_{x\in I} |q_n(x) - s(x)| \leq \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gözlenip $\lim_{n\to\infty} \|q_n - s\|_I = 0$ istenen sonuç bulunur.

3) $p_0(x) = 0$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{x - (p_n(x))^2}{2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$) indirgene bağıntılarıyla tanımlanan p_n polinomları gözönüne alınsın. Her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = (p_n \mid [0,1])(x)$ olsun. Bu fonksiyon dizisinin $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz. **Not**: $f \mid A$ işareti kısıtlama fonksiyonunu göstermektedir.

Çözüm: Önce tümevarımla şunu gösterelim:

$$0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant \tfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} < \tfrac{2}{n} \qquad (\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}).$$

Bu gösterilirse istenen düzgün yakınsaklık iddiası elde edilecektir. Zaten $[0,1]$ aralığında çalışıldığı ve her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = p_n(x)$ olduğundan

$$0 \leqslant \sqrt{x} - p_n(x) \leqslant \tfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \qquad (\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

göstermek yeterli olur, çünkü $\frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{n\sqrt{x}} = \frac{2}{n}$ geçerlidir. Her $x \in [0,1]$ için $(2-\sqrt{x})\,(2+\sqrt{x}) = 4-x \leq 4$ ve $\dfrac{2-\sqrt{x}}{2} \leq \dfrac{2}{2+\sqrt{x}}$ böylece kolayca, $\sqrt{x} \leq 1 < 2$ ve $0 \leq \sqrt{x} - p_1(x) = \sqrt{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}(2-\sqrt{x}) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ bulunur. O halde (1) iddiası $n=1$ için gösterilmiş olunmaktadır. Bu iddia n için doğru varsayılsın. Bu varsayım altında $n+1$ için doğruluğunu gösterelim. $(*)$ iddiası n için doğru varsayıldığından hem $0 \leqslant \sqrt{x}-p_n(x)$ ve hem $\sqrt{x}-p_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x}$ ve böylece $p_n(x) \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}+p_n(x)$ $(\forall x \in [0,1])$ ve dolayısıyla $\sqrt{x}+p_n(x) \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 2$ yani $\frac{\sqrt{x}+p_n(x)}{2} \leqslant 1$ ve $0 \leqslant \sqrt{x}-p_n(x)$ bilgileriyle

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{(\sqrt{x}-p_n(x))(\sqrt{x}+p_n(x))}{2} \leqslant p_n(x) + (\sqrt{x}-p_n(x)) = \sqrt{x},$$
$$\sqrt{x}-p_{n+1}(x) = \sqrt{x}-p_n(x) - \frac{(\sqrt{x}-p_n(x))(\sqrt{x}+p_n(x))}{2} = \big(\sqrt{x}-p_n(x)\big)\left[1-\frac{\sqrt{x}+p_n(x)}{2}\right] \geq 0$$

ayrıca $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}+p_n(x)$ nedeniyle $1-\dfrac{\sqrt{x}+p_n(x)}{2} \leqslant 1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ olduğundan

$$\sqrt{x}-p_{n+1}(x) = \big(\sqrt{x}-p_n(x)\big)\left[1-\frac{\sqrt{x}+p_n(x)}{2}\right] \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \cdot \left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \qquad (\forall x \in [0,1])$$

ayrıca $\frac{\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$ gözleyip tüm bunlardan (1) eşitsizlikleri eğer n için doğru ise aşağıdakini bularak

$$0 \leqslant \sqrt{x}-p_{n+1}(x) \leqslant \tfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \cdot \left(1-\tfrac{\sqrt{x}}{2}\right) \leqslant \tfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \cdot \left(1-\tfrac{\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}\right) = \tfrac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$$

(1) eşitsizliklerinin $n+1$ için de doğru sonuçta tüm $n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için geçerli olduğu **gösterilmiş olur**. Siz, tüm p_n polinomlarının tüm katsayılarının birer **rasyonel sayı** olduğunu, indirgeme bağıntısından yararlanarak kanıtlayınız. O halde,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - p_n(\frac{1}{2})\right| = \left|f(\frac{1}{2}) - f_n(\frac{1}{2})\right| \leqslant \|f-f_n\| \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ve $\|f_n - f\| \to 0$ nedeniyle, $r_n = p_n(\frac{1}{2})$ rasyonel sayılar dizisinin $r_n \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gerçeklediği ayrıca gözlenmiş olur. Ayrıca $q_n(x) = p_n(x^2)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ polinomlarının $[0,1]$ aralığında $q(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı anlaşılır.

4) $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan süreksiz fonksiyonlar dizisinin varlığını gösterin.

Çözüm: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & ;\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & ;\ x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1])$ fonksiyonlarının herbiri tüm irrasyonellerde süreksizdir. Gerçekten, herhangi $n_0 \in \mathbb{N}$ için f_{n_0} fonksiyonu, herhangi bir $x_0 \in [0,1]-\mathbb{Q}$ irrasyonel noktasında süreksizdir, çünkü $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$ gerçekleyen, sayılamaz sonsuz tane yakınsak ve rasyonel terimli $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. (dikkat: tümevarım kullanılarak, herhangi iki farklı gerçel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı yer aldığı için, $x_0 < \cdots < r_3 < (x_0 + \frac{1}{3}) \wedge r_2 \leqslant r_2 < (x_0 + \frac{1}{2}) \wedge r_1 \leqslant r_1 < x_0 + 1$ rasyonel sayıları belirlenirse (bunun için önce $x_0 < r_1 < x_0 + 1$ rasyonel sayısını , sonra $x_0 < (x_0 + \frac{1}{2}) \wedge r_1$ gözleyerek $x_0 < r_2 < (x_0 + \frac{1}{2}) \wedge r_1$ rasyonel sayısını, ... tanımlayın) $x_0 < r_n \leqslant x_0 + \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve böylece $0 < |r_n - x_0| = r_n - x_0 < \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n - x_0| = 0$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$ elde edilir). Oysa $f_{n_0}(x_0) = \frac{1}{n_0}$ fakat $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_0}(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n_0} = \dfrac{1}{n_0} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \frac{x_0}{n_0}$ olur, kısacası $r_n \to x_0$ olmasına karşın $f_{n_0}(r_n) \to f_{n_0}(x_0)$ gerçekleşmemektedir, bu nedenle f_{n_0} fonksiyonu tüm irrasyonellerde süreksizdir. O halde n_0 herhangi bir doğal sayı olduğundan, tüm f_n fonksiyonları tüm irrasyonellerde süreksizdir. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ süreksiz fonksiyonlar dizisinin noktasal limit fonksiyonu sıfır sabit fonksiyonu olup, $A = [0,1]$ kümesinde

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1) = \tfrac{1}{n} \to 0$$

gerçekleştiği için bu yakınsama düzgündür.

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her yerde türevlenebilir ve üstelik f' türev fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli ise

$$g_n(x) = n \cdot \big(f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x)\big) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlanan $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin f' fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterin.

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, f türetilebilir olduğundan

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(\xi_{n,x}) \quad \text{ve} \quad x < \xi_{n,x} < x + \frac{1}{n}$$

koşullarını sağlayan $\xi_{n,x}$ gerçel sayılarının var olduğuna, ayrıca f' türev fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli olduğu için, $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık f' fonksiyonunun belirlediği düzgün süreklilik sabiti $\delta_\varepsilon > 0$ ise, Arşimet İlkesiyle $1 < n_\varepsilon \delta_\varepsilon$ gerçekleyen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısını belirleyip (ya da $\left[\frac{1}{\delta_\varepsilon} + 1\right] = n_\varepsilon$ tanımlayarak, her $n \geq n_\varepsilon$ için $|g_n(x) - f'(x)| = |f'(\xi_{n,x}) - f'(x)| < \varepsilon$ bulunur, çünkü $|\xi_{n,x} - x| = \xi_{n,x} - x < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \delta_\varepsilon$ geçerlidir, sonuçta

$$\forall n \geq n_\varepsilon \text{ için } \big\|g_n - f'\big\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|g_n(x) - f'(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

bulunur, bu sonuç istenendir.

$\mathbb{R}$ kümesinde $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq$ ... gerçekleyen yani $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tekdüze azalmayanlık koşulunu gerçekleyen $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme dizisi ne olursa olsun, $A^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ yazılmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_{A^*}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ gerçekleşir, fakat bu yakınsamanın düzgün yakınsama olması gerekmez. Bu örneği kavrayabilmek için önce herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi için $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ **karakteristik fonksiyonunu** tanımlamalıyız:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\ ;\ x \in A \\ 0\ ;\ x \in \mathbb{R} - A \end{cases} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona A **kümesi indisli karakteristik fonksiyon** denilir. Dikkat: $\chi_A = \chi_B$ kısacası $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ olabilmesi için gyk $A = B$ gerçeklenmesidir (neden?). Dikkat edilirse $\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$ ve $\chi_{[0,1]}\left(\frac{1}{7}\right) = 1$ gerçekleşir. Şimdi herhangi $x \in A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ alınsın, o halde $\exists n_0 \in \mathbb{N}, x \in A_{n_0} \subseteq A_{n_0+1} \subseteq A_{n_0+2} \subseteq ...$ kısacası her $n \geq n_0$ için $x \in A_n$ böylelikle $\chi_{A_n}(x) = 1$ $(\forall n \geq n_0)$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 1 = \chi_{A^*}(x)$ olur, yok eğer $x \in \mathbb{R} - A^*$ ise $x \notin A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nedeniyle hem $\chi_{A^*}(x) = 0$ hem de her $n \in \mathbb{N}$ için $x \notin A_n$ ve $\chi_{A_n}(x) = 0$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 0 = \chi_{A^*}(x)$, kısacası her $x \in \mathbb{R}$ için $\chi_{A^*}(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x)$ olmaktadır. Bu sonuç $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{A^*}$ demektir. Buna karşılık her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ aralıkları tanımlanırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)} \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \subseteq [\frac{1}{n+1}, 1] - [\frac{1}{n}, 1] = A_{n+1} - A_n$ ve ayrıca $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$ gözleyerek, her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n \notin A_n$ ve $\chi_{A_n}(r_n) = 0$ ve $r_n \in A_{n+1} \subseteq A^*$ ve $\chi_{A^*}(r_n) = 1$ nedeniyle, üstelik her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için ya $|\chi_{A_n}(x) - \chi_{A^*}(x)| = 0$ ya da $|\chi_{A_n}(x) - \chi_{A^*}(x)| = 1$ gerçeklendiği unutmadan

$$1 \geq \|\chi_{A_n} - \chi_{A^*}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\chi_{A_n}(x) - \chi_{A^*}(x)| \geq |\chi_{A_n}(r_n) - \chi_{A^*}(r_n)| = 1$$

ve böylece $\lim_{n\to\infty} \|\chi_{A_n} - \chi_{A^*}\| = 1 \neq 0$ olduğu için $\chi_{A^*}(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ noktasal yakınsamasının düzgün yakınsama olması **gerekmediği** anlaşılır. Bu yakınsamanın düzgün yakınsama olabilmesi için gyk $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme dizisinin belirli bir indisten sonra sabitlenmesi kısacası $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $A_{n_0} = A_{n_0+1} = A_{n_0+2} = \cdots$ gerçekleşmesidir, gösteriniz. Acaba $\subseteq ... \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$ gerçekleyen $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme dizisinin noktasal ve düzgün yakınsadığı karekteristik fonksiyon nedir?

6) Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \left[\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right)$ ve $f_n(x) = \sin(nx) \cdot \chi_{I_n}(x)$ $(\forall x \in [0,1])$ olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin noktasal limiti nedir? Bu noktasal limitine düzgün yakınsar mı? Neden?

Çözüm: $0 \notin I_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\sin(n0) = 0$ nedeniyle $f_n(0) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve sonuçta $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olur. Ayrıca herbir $x \in (0, 1]$ için arşimet İlkesiyle $\exists n_x \in \mathbb{N}, 1 < n_x x \leq nx < 2^n x$ $(\forall n \geq n_x)$ böylece $0 < \dfrac{1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2^n} < x$ $(\forall n \geq n_x)$ nedeniyle $x \notin I_n$ $(\forall n \geq n_x)$ ve sonuçta $\chi_{I_n}(x) = 0$ $(\forall n \geq n_x)$ ve $f_n(x) = 0$ $(\forall n \geq n_x)$ nedeniyle $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olur. O halde $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonu $f = 0$ olur. Üstelik bu yakınsama **düzgündür**, çünkü $\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x)\| = \sup_{x\in I_n} \|f_n(x)\| = \sup_{x\in I_n} \|\sin(nx)\| = \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) \to 0$ olur, çünkü her $x \in I_n$ için $0 < \dfrac{n}{2^{n+1}} \leq nx < \dfrac{n}{2^n} < 1 < \dfrac{\pi}{2}$ böylece $0 < \sin(nx) < \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur, üstelik sinüs fonksiyonu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında artandır; oysa $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} n\,(0,5)^n = 0$ ve sinüs sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$ bulunur. Bu istenendir!

7) Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in I = (0,1)$ için $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{nx}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ olduğunu, fakat bu yakınsamanın **düzgün olmadığını** gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in I$ için $0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{nx}$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(\forall x \in I)$ bulunur. Fakat ünlü $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ $(\forall x > 0)$ bilgisi kullanılırsa, kolayca $\|f_n - 0\|_I = \|f_n\|_I \geq \frac{n}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ böylelikle $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_I = +\infty$ bulmak güç değildir, çünkü yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa $f_n(x) \geq \frac{1}{nx}(n^2x - \frac{n^6x^3}{3!}) = n(1 - \frac{(n^2x)^2}{6})$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I)$ böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\|f_n - 0\|_I = \|f_n\|_I = \sup_{x\in I}|f_n(x)| \geq \sup_{x\in I_n}|f_n(x)| \geq n\left(\sup_{x\in I_n}(1 - \frac{(n^2x)^2}{6})\right) > n\left(\inf_{x\in I_n}(1 - \frac{(n^2x)^2}{6})\right) \geq \frac{n}{2}$$

burada her $n \geq 2$ için $q_n = \frac{\sqrt{3}}{n^2}$ olmak üzere $I_n = (0, q_n)$ $(\subseteq I)$ alt aralığında $1 - \frac{(n^2x)^2}{6} \geq \frac{1}{2}$ gözlenmiştir (nasıl?).

8) Yukarıdaki fonksiyon dizisi $f_n(0) = 0$ ve her $x \in (0,1]$ için yine $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{nx}$ biçiminde tanımlansın. $f_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ gerçeklendiğini oysa her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(\frac{1}{n}) = \sin n$ nedeniyle $0 = f_0(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n})$ *gerçekleşemediğini* (neden?) gözleyerek bu durumda da $f_n \overset{d}{\to} 0$ olmadığını çıkarsayınız.

Şimdi sırada yararlı ve ünlü bir Teorem var: $\mathbb{R}$ kümesinde kapalı-sınırlı kümelere **tıkız küme** denilir.
$[0,1]$ ve $[0,1] \cup [\dfrac{3}{2}, 2]$ ve C Cantor kümesi tıkız küme örnekleridir.

Teorem 5 (Dini Teoremi): A tıkız kümesinde sürekli gerçel değerli $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi, f fonksiyonuna **tekdüze yakınsıyor**, üstelik f sürekli ise, bu yakınsama düzgündür.

Kanıtlama: Önce $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots \leqslant f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ olsun, gerek tüm f_n fonksiyonları gerekse noktasal limit fonksiyonu f, A kümesinde sürekli olsun. O halde $g_n = f - f_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları hem A kümesinde sürekli ve hem de $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant f$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $0 \leqslant g_{n+1} = f - f_{n+1} \leqslant f - f_n = g_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. g_n sürekli fonksiyonu altında $(-\varepsilon, \varepsilon)$ açık aralığının ters görüntü kümesi (temel topoloji bilgisiyle) açık kümedir ve $0 \leqslant g_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan $g_n^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) = g_n^{-1}((-\varepsilon, 0)) \cup g_n^{-1}([0,\varepsilon)) = g_n^{-1}([0,\varepsilon))$ bulunur, çünkü hiçbir $x \in A$ için $g_n(x) < 0$ ve böylelikle $g_n(x) \in (-\varepsilon, 0)$ **olmadığından** $g_n^{-1}((-\varepsilon,0)) = \emptyset$ geçerlidir. Üstelik $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}([0,\varepsilon))$ olur, çünkü herhangi $x \in A$ alındığından $0 = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ nedeniyle $\exists n_x \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_x)$ ve sonuçta $0 \leqslant g_{n_x}(x) < \varepsilon$ yani $g_{n_x}(x) \in [0,\varepsilon)$ nedeniyle $x \in g_{n_x}^{-1}([0,\varepsilon)) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}([0,\varepsilon))$ bularak $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}([0,\varepsilon))$ elde edilir, ters kapsama, her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n^{-1}([0,\varepsilon)) \subseteq A$ nedeniyle apaçıktır. Oysa $A(\subseteq \mathbb{R})$ alt kümesi tıkız olduğu ve üstelik

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } g_n^{-1}([0,\varepsilon)) \subseteq g_{n+1}^{-1}([0,\varepsilon))$$

geçerli olduğundan (dikkat: $x \in g_n^{-1}([0,\varepsilon))$ ise $0 \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ bularak $g_{n+1}(x) \in [0,\varepsilon)$ yani $x \in g_{n+1}^{-1}([0,\varepsilon))$ elde ediniz), sonuçta A kümesi tıkız olduğundan, kendisini örten, açık $G_n = g_n^{-1}([0,\varepsilon)) =$

$g_n^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ kümelerinin yalnızca sonlu tanesiyle bile örtülebilir, böylece yukarıdaki $(*)$ kullanılıp

$$A = g_{n_1}^{-1}([0, \varepsilon)) \cup g_{n_2}^{-1}([0, \varepsilon)) \cup \cdots \cup g_{n_m}^{-1}([0, \varepsilon)) = g_{N_0}^{-1}([0, \varepsilon))$$

elde edilir, burada $N_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ alınmış ve her $k \leqslant m$ için $n_k \leqslant N_0$ ve $g_{n_k}^{-1}([0, \varepsilon)) \subseteq g_{N_0}^{-1}([0, \varepsilon))$ gözlenip yukarıdaki sonuç bulunmuştur. O halde her $x \in A$ için $x \in g_{N_0}^{-1}([0, \varepsilon))$ yani $g_{N_0}(x) < \varepsilon$ olur, böylece

$$\forall n \geq N_0 \text{ için } \|f_n - f\| = \|f - f_n\| = \sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in A} g_n(x) \leqslant \sup_{x \in A} g_{N_0}(x) \leqslant \varepsilon$$

olur, çünkü $n \geq N_0$ ise $g_n \leqslant g_{N_0}$ nedeniyle her $x \in A$ için $g_n(x) \leqslant g_{N_0}(x)$ gözleyip son eşitsizlikler yazılmıştır. Dikkat: her $\alpha \in \Lambda$ indisi için $a_\alpha \leqslant b_\alpha$ oluyorsa $\sup_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha \leqslant \sup_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha$ geçerlidir (neden?). Demek ki $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyon dizisi tekdüze azalmayanlık koşulunu gerçekleyerek f sürekli fonksiyonuna tıkız bir kümede noktasal yakınsıyorsa, bu yakınsama **düzgündür**. Eğer $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyon dizisi $f = \lim_{n \to \infty} f_n \leqslant \cdots \leqslant f_3 \leqslant f_2 \leqslant f_1$ gerçekleyerek f sürekli fonksiyonuna A tıkız kümesinde yakınsıyorsa bu yakınsamanın düzgün olduğunu siz gösterin.

Örnekler 3:

1) Aşağıdaki fonksiyon dizilerinin $[0, 1]$ aralığında düzgün yakınsadığını Dini Teoreminden yararlanıp gösteriniz.

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2} \quad , \quad g_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2 + x + e^n} \quad , \quad h_n(x) = arctg\frac{2x}{x^2 + n^2}$$

Çözümler: Hepsinin, tekdüze artmadan 0 noktasal limitine yakınsadığını, sözgelimi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_{n+1}(0) = f_n(0) \quad \text{ve} \quad \frac{x}{x^2 + (n+1)^2} < \frac{x}{x^2 + n^2} \quad (\forall x \in (0, 1])$$

yani $f_{n+1}(0) \leqslant f_n(0)$ ve $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ $(\forall x \in (0, 1])$ ve ayrıca $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0, 1])$ ve $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ $(\forall x \in [0, 1])$ olduğu ve bu tekdüze noktasal yakınsama tıkız $A = [0, 1]$ kümesinde geçerli olduğu için, Dini Teoreminin kullanılacağına dikkat ediniz. İkinci dizinin, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0, 1]$ için

$$1 + (n+1)e^n < ne^{n+1} \quad \text{ve} \quad \frac{n+1}{(n+1)^2x^2 + x + e^{n+1}} < \frac{n}{n^2x^2 + x + e^n}$$

böylece $0 \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1])$ ve $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ gerçeklediği için, benzer gerekçelerle düzgün yakınsadığına dikkat ediniz, yukarıdaki ilk eşitsizlik $1 + 2e < 7 < e^2$ nedeniyle $n = 1$ için doğrudur, bu iddia n için doğru olduğunda $1 + (n+2)e^{n+1} = 1 + (n+1)e^{n+1} + e^{n+1} < e(1 + (n+1)e^n) + e^{n+1} < nee^{n+1} + e^{n+1} < (n+1)e^{n+2}$ nedeniyle $n + 1$ için ve sonuçta tüm n doğal sayıları için doğru olduğu anlaşılır.

Üçüncü dizi aslında, $M > 0$ sabiti ne olursa olsun $[-M, M]$ tıkız aralığında noktasal limiti olan 0 sabit fonksiyonuna düzgün yakınsar. Gerçekten, herhangi gerçel değerli F_n fonksiyonlarının $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, şu temel eşdeğerlik kolayca gösterilir: $F_n \xrightarrow{d} 0$ için gyk $|F_n| \xrightarrow{d} 0$. Oysa gerek tangent gerekse onun ters fonksiyonu $arctg$ birer tek fonksiyon olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $|arctgx| = arctg\,|x|$ ve sonuçta $|h_n(x)| = arctg\frac{2|x|}{x^2+n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-M, M])$ olduğu ve tıpkı tangent fonksiyonu gibi onun ters fonksiyonu **artan fonksiyon** olduğundan ve $0 \leqslant \frac{2|x|}{x^2+(n+1)^2} \leqslant \frac{2|x|}{x^2+n^2}$ nedeniyle $|h_{n+1}(x)| \leqslant |h_n(x)|$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-M, M])$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} |h_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\frac{2|x|}{x^2+n^2} = arctg0 = 0$ olduğu ve bu tekdüze yakınsama, tıkız $[-M, M]$ aralığında geçerli olduğundan, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, noktasal limitine Dini Teoremi nedeniyle **düzgün yakınsar**. Aslında $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyonlar dizisi, tüm $\mathbb{R}$ kümesinde noktasal limit fonksiyonu olan 0 sabit fonksiyonuna düzgün yakınsar, çünkü bu dizi hem $[0, \infty)$ aralığında ve hem de $(-\infty, 0]$ aralığında 0 sabit fonksiyonuna düzgün yakınsar, çünkü $h_n'(x) = \frac{2(n^2-x^2)}{4x^2+(x^2+n^2)^2}$ nedeniyle h_n fonksiyonu $[0, n]$ aralığında artan $[n, \infty)$ aralığında azalandır, böylece

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |h_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\infty)} h_n(x) = \max_{x\in[0,\infty)} h_n(x) = h_n(n) = arctg\frac{1}{n} \to 0$$

ve benzer biçimde $\sup\limits_{x\in(-\infty,0]} |h_n(x) - 0| \to 0$ geçerlidir. Bir sonraki örnek kullanılır

2) Eğer A kümesi için $A = A_1 \cup A_2$ oluyor ve üstelik $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, hem A_1 kümesinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ve hem de A_2 kümesinde $f_n \xrightarrow{d} f$ oluyorsa, A kümesinde $f_n \xrightarrow{d} f$ olur.

Çözüm: Gerçekten $\delta_{i,n} = \sup\limits_{x\in A_i} |f_n(x) - f(x)|$ $(i = 1, 2)$ sayıları tanımlanır ve $\max\{\delta_{1,n}, \delta_{2,n}\}$ sayısı herzamanki gibi $\delta_{1,n} \vee \delta_{2,n}$ ile yazılırsa, herhangi $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta_{1,n} \vee \delta_{2,n}$ olduğundan (örneğin $x \in A_1$ ise $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta_{1,n} \leqslant \delta_{1,n} \vee \delta_{2,n}$ olur, $x \in A_2$ ise benzer gerekçe geçerlidir), sonuçta $\delta_{1,n} \vee \delta_{2,n} = \frac{1}{2}\,(\,\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + |\,\delta_{1,n} - \delta_{2,n}|) \to 0$ olduğundan (çünkü hipotez gereği hem $\delta_{1,n} \to 0$ hem de $\delta_{2,n} \to 0$ geçerlidir), sonuçta $0 \leqslant \|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta_{1,n} \vee \delta_{2,n} \to 0$ nedeniyle A kümesinde $f_n \xrightarrow{d} f$ sonucuna ulaşılır.

3) Aşağıdaki dizilerin, yanlarında yazılı kümede düzgün yakınsaklıklarını inceleyiniz:

$$f_n(x) = \sin^n x \cdot \cos x,\ A = [0, \pi]$$

$$g_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1),\ A = [1, 1 + M]\ (M > 0)$$

$$h_n(x) = nx^n(1 - x),\ A = [0, 1]$$

Çözümler: İlk iki dizinin, Dini Teoremi kullanılarak düzgün yakınsaklığı incelenir, örneğin

$$g(x) = \ell nx < g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+)$$

gerçeklendiği ve $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ olduğu aşağıda gösterilecektir. Aslında ikinci fonksiyon dizisinin $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $(0, \varepsilon]$ aralığında noktasal limitine düzgün **yakınsayamadığını** göstermek güç değildir. Bunun için önce aşağıdaki temel bilgileri görmeliyiz:

Temel Bilgi 1: Her $x \in (0, 1]$ için $x(1 - \ell n x) \leqslant 1 \leqslant x - \ell n x$. Gerçekten $h(x) = x(1 - \ell n x)$ fonksiyonu $(0, 1]$ aralığında azalmayan $g(x) = x - \ell n x$ ise artmayandır, çünkü $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \leqslant 0 \leqslant \ell n \frac{1}{x} = -\ell n x = h'(x)$ $(\forall x \in (0, 1])$ ve dolayısıyla $h(x) \leqslant h(1) = 1 = g(1) \leqslant g(x)$ $(\forall x \in (0, 1])$ bulunur.

Temel Bilgi 2: $f(x) = x(\sqrt[x]{a} - 1)$ $(\forall x \in [1, \infty), \forall a \in (0, 1))$ fonksiyonu artmayandır, çünkü

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt[x]{a} - 1 + x \cdot (\sqrt[x]{a})' = \sqrt[x]{a} - 1 + x\left[-\tfrac{\ell n a}{x^2} \cdot \sqrt[x]{a}\right] \\ &= \sqrt[x]{a} - 1 - \tfrac{\ell n a}{x} \cdot \sqrt[x]{a} = \sqrt[x]{a} - 1 - \left(\ell n \sqrt[x]{a}\right) \cdot \left(\sqrt[x]{a}\right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt[x]{a}(1 - \ell n \sqrt[x]{a}) - 1 \leqslant 0$$

olur, çünkü Temel Bilgi 1 ve $0 < \sqrt[x]{a} < 1$ nedeniyle $\sqrt[x]{a}(1 - \ell n \sqrt[x]{a}) \leqslant 1$ geçerlidir.

Temel Bilgi 3: $\ell n x \leqslant (n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1) \leqslant n(\sqrt[n]{x} - 1) < 0$ $(\forall x \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N})$ geçerlidir, çünkü Temel Bilgi 2 kullanılır. Aslında herbir $x \in (0, 1)$ için, tıpkı Örnek 1.6' da yapıldığı gibi

$$\sqrt[n+1]{x} = \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdots \sqrt[n]{x} \cdot 1} \leqslant \frac{n\sqrt[n]{x} + 1}{n+1} \text{ ve } 0 < n(1 - \sqrt[n]{x}) \leqslant (n+1)(1 - \sqrt[n+1]{x})$$

gözlenerek de aynı eşitsizlik bulunur, (nasıl?) O halde $g_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyon dizisi her $x \in \mathbb{R}^+$ için tekdüzedir (neden?) dolayısıyla bu fonksiyon dizisi $[\varepsilon, 1 + M]$ kapalı aralığında Dini Teoremi nedeniyle düzgün yakınsar oysa $(0, \varepsilon]$ aralığında düzgün yakınsayamaz, çünkü $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ rasyonel sayıları $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ nedeniyle $0 < \varepsilon_n^n < \varepsilon_n = \frac{1}{n} < \varepsilon < 1$ $(\forall n \geqslant N_\varepsilon)$ gerçekler ve $n_\varepsilon = N_\varepsilon + 2$ doğal sayısı aracılığıyla $n_\varepsilon \geqslant 3$ ve

$$\sup_{x \in (0, \varepsilon]} |g_n(x) - \ell n x| \geqslant n\delta_0 \qquad (\forall n \geqslant n_\varepsilon)$$

gerçekleşir çünkü $|g_n(x) - \ell n x| = |n(\sqrt[n]{x} - 1) - n\ell n \sqrt[n]{x}| = n\left[(\sqrt[n]{x} - \ell n \sqrt[n]{x}) - 1\right] \geqslant 0$ ve böylece

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, \varepsilon]} |g_n(x) - \ell n x| &= \sup_{x \in (0, \varepsilon]} n\left[(\sqrt[n]{x} - \ell n \sqrt[n]{x}) - 1\right] \geqslant n\left[(\sqrt[n]{\varepsilon_n^n} - \ell n \sqrt[n]{\varepsilon_n^n}) - 1\right] \\ &= n\left((\varepsilon_n - \ell n \varepsilon_n) - 1\right) = n\varepsilon_n - n\ell n \frac{1}{n} - n = 1 + n\ell n n - n \\ &> n\ell n n - n = n(\ell n n - 1) \geqslant n(\ell n 3 - 1) = n\delta_0 \qquad (\forall n \geqslant n_\varepsilon) \end{aligned}$$

olur, çünkü herbir $n \geqslant n_\varepsilon$ için $0 < \varepsilon_n^n < \varepsilon_n$ nedeniyle $\varepsilon_n^n \in (0,\varepsilon]$ olmaktadır. O halde $\sup\limits_{x\in(0,\varepsilon]} |g_n(x) - \ell n x| \to +\infty$ nedeniyle istenen bulunur.

İlk dizi için $f_{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ve her $[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]$ için $0 \leqslant \sin x < 1$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin x)^n = 0$ ve $|f_{n+1}(x)| = \sin^{n+1} x \cdot |\cos x| \leqslant \sin^n x \cdot |\cos x| = |f_n(x)|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve sonuçta $0 \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant |f_n(x)|$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,\pi])$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ olur. O halde Dini Teoremiyle$\|f_n - f\| = \|f_n\| \to 0$ olur. Bu sonuç ayrıca $\|f_n\| = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 0 = 0$ bularak da elde edilebilirdi, çünkü kısalık amacıyla $A = \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ yazılırsa, her $x \in I = [0,\pi]$ için $f_n'(x) = n\sin^{n-1} x \cos^2 x - sin^{n+1}x$ böylece $f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ve her $x \in A$ için $\cos x \neq 0$ ve $f_n'(x) = \sin^{n-1} x \cos^2 x \left(n - tg^2 x\right)$ bulunursa, I aralığında $f_n'(x) \geq 0$ için gyk $x \in A$ **ve** $tgx = |tgx| \leq \sqrt{n}$ yani $x \in A \cap [0, arctg\sqrt{n}] = [0, arctg\sqrt{n}]$ olmasıdır çünkü $0 < arctg\sqrt{n} < \frac{\pi}{2}$ geçerlidir, böylece aşağıdaki özdeşlikler kullanılarak $\|f_n\| = f_n(arctg\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$ bulunur:

$$\cos(arctga) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \qquad , \qquad |\sin(arctga)| = \sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}} \quad (\forall a \in \mathbb{R})\,.$$

Şimdi üçüncü fonksiyon dizisiyle uğraşalım. Üçüncü fonksiyon dizisi $0 < \varepsilon < 1$ ne olursa olsun $[0, 1-\varepsilon]$ kapalı aralığında noktasal limitine, Dini Teoremi aracılığıyla düzgün yakınsar, çünkü $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ nedeniyle herbir $x \in [0, 1-\varepsilon]$ gerçel sayısı için uygun bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayesinde $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{n_\varepsilon+1} \leq \frac{n}{n+1} < 1$ böylelikle $(n+1)\,x < n$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ ve $(n+1)\,x^{n+1} < nx^n$ ve üstelik $0 < 1 - x$ olduğundan, bu eşitsizlikleri bu pozitif sayıyla çarparak $0 \leqslant f_{n+1}(x) = (n+1)x^{n+1}(1-x) \leqslant nx^n(1-x) = f_n(x)$ $(\forall x \in [0, 1-\varepsilon]\,, \forall n \geq n_\varepsilon)$ bulunur, oysa $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ olduğundan Dini Teoremiyle $[0, 1-\varepsilon]$ tıkız aralığında $\{f_n\}_{n=n_\varepsilon}^{\infty}$ dizisinin $f(x) = 0$ noktasal limitine düzgün yakınsadığı anlaşılır. O halde $[0, 1-\varepsilon]$ aralığında $f_n \xrightarrow{d} 0$ bulunur (neden?). Bu yakınsama $[0,1]$ tıkız aralığında düzgün değildir (neden?)

4) Aynı soruyu aşağıdakiler için çözünüz:

$$f_n(x) = n\ell n\left(1 + \frac{x^2}{n}\right),\ A = \mathbb{R}$$
$$g_n(x) = n\ell n\left(1 + \frac{1}{nx}\right),\ A = (0,\infty)$$
$$h_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}},\ A = \mathbb{R}$$
$$s_n(x) = n \cdot \sin\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2},\ A = [0, M]\ (M > 0)$$

Çözümler: İlk üç dizi için, A kümesi tıkız olmadığından Dini Teoremi kullanılamaz (aşağıdaki Örnek 5) ’ e bakınız). İlk dizi için $f_n(x) = \ell n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \to \ell n e^{x^2} = x^2 = f(x)$ ve fakat

$$0 < \varepsilon_0 = 1 - \ell n 2 = |\ell n 2 - 1| < |n \cdot (\ell n 2 - 1)| = \left|f_n(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n})\right|$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

nedeniyle, düzgün yakınsaklık koşulu $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ kesinlikle **gerçekleşmez**. Dikkat: Uyarı 1.4) içindeki bilgilerle $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{x^2}{n}\right)\cdot\left(1+\tfrac{x^2}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{x^2}{n}\right)\cdot 1} \leqslant \frac{n\left(1+\frac{x^2}{n}\right)+1}{n+1} = 1 + \tfrac{x^2}{n+1}$$

ve sonuçta $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}$ olduğu ve doğal logaritma fonksiyonu artan ve böylece $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan, ilk fonksiyon dizisi, Dini Teoremi nedeniyle $[-M, M]$ tıkız aralığında $f(x) = x^2$ noktasal limit fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İkinci fonksiyon dizisi $A = (0, \infty)$ aralığında $g(x) = \dfrac{1}{x}$ noktasal limit fonksiyonuna düzgün olmadan yakınsar, çünkü her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\dfrac{x}{1+x} < \ell n(1+x) < x$ olduğundan, kolayca her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{x+n^{-1}} = n \cdot \dfrac{1}{nx+1} \leq n\ell n(1+\dfrac{1}{nx}) \leq \dfrac{1}{x}$ yani $\dfrac{1}{x+n^{-1}} \leq g_n(x) \leq \dfrac{1}{x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ geçerli olduğundan kolayca $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{1}{x}$ bulunur, ayrıca

$$0 < 1 - \ell n 2 < n(1 - \ell n 2) = |n\ell n 2 - n| = \left|g_n(\tfrac{1}{n}) - g(\tfrac{1}{n})\right| \leqslant \|g_n - g\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

geçerlidir, oysa $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, Dini Teoremi nedeniyle g noktasal limit fonksiyonuna , $\varepsilon > 0$ ve $M > 0$ ne olursa olsun $[\varepsilon, M+\varepsilon]$ tıkız aralığında düzgün yakınsar, çünkü Bernoulli eşitsizliği kullanarak $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N})$ göstermek güç değildir. (aslında bu eşitsizlik yukarıda yapıldığı gibi Geormetrik Ort. $\leq$ Aritmetik Ort. bilgisiyle de yapılabilirdi). Şimdi dikkat edilirse, her $x \in \mathbb{R}^+$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n\,(n+1+x) < n\,(n+1+x) + x = (n+1)\,(n+x)\,,$$
$$\frac{nx}{(n+1)\,(n+x)} < \frac{x}{n+1+x} = 1 - \frac{n+1}{n+1+x}$$

ve böylelikle ünlü Bernoulli eşitsizliği $1 - ny \leq (1-y)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [0,1])$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n+1+x} &< 1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)} = 1 - n\frac{x}{(n+1)(n+x)} \\ &< \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n = \left(\frac{n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}\right)^n\end{aligned}$$

yani aşağıdakiler bulunur:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1+x} < \left(\frac{n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

bu sonuçsa $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ verir. Böylece, her $x \in \mathbb{R}^+$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(1+\frac{x^{-1}}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x^{-1}}{n+1}\right)^{n+1}$ ve logaritma alıp $g_n(x) = n \cdot \ell n(1+\dfrac{1}{nx}) < (n+1)\cdot \ell n\left(1+\dfrac{1}{x(n+1)}\right) = g_{n+1}(x)$ bulunur, hem g_n fonksiyonları hem $g(x) = \frac{1}{x}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $[\epsilon, M+\epsilon]$ aralığında $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine Dini Teoremi uygulanır.

Üçüncü fonksiyon dizisinin noktasal limit fonksiyonu ise, $0 < a, b$ ne olursa olsun, ünlü $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a \vee b$ bilgisi nedeniyle aşağıdaki sürekli h fonksiyonudur:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-1,1] = A_1 \\ |x| & ; x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) = A_2 \end{cases}$$

Üstelik hem $A_1 = [-1,1]$ kümesinde $h_n \xrightarrow{d} h$ ve hem de A_2 kümesinde $h_n \xrightarrow{d} h$ gerçekleşir, çünkü $h_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artan ve üstelik çift fonksiyon ve

$$\sup_{x\in A_1} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x\in[0,1]} (h_n(x)-1) = \left(\sup_{x\in[0,1]} h_n(x)\right) - 1 = h_n(1) - 1 = \sqrt[2n]{2} - 1 \to 0$$

olduğundan, gerçekten A_1 kümesinde $h_n \xrightarrow{d} h$ olduğu anlaşılır. İkinci iddiayı göstermek için, ünlü

$$\begin{aligned} y^n - x^n &= (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}\cdot x + \cdots + y \cdot x^{n-2} + x^{n-1}), \\ y - x &= \frac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}\cdot x + \cdots + y\cdot x^{n-2} + x^{n-1}}\end{aligned}$$

özdeşlikleri ve $(h_n(x))^{2n} - x^{2n} = 1 + x^{2n} - x^{2n} = 1$ eşitliği ve herbir $x \in [1,\infty)$ için hem $1 \leqslant x^k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

hem de $1 \leqslant (h_n(x))^k$ ve hem h_n hem de h fonksiyonu çift olduklarından, $A_2 = \mathbb{R} - [-1, 1]$ kümesinde

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \sup_{x \in A_2} |h_n(x) - h(x)| &= \sup_{x \in [1,\infty)} |h_n(x) - |x|| = \sup_{x \in [1,\infty)} (h_n(x) - x) \\
&= \sup_{x \in [1,\infty)} \left[\frac{(h_n(x))^{2n} - x^{2n}}{(h_n(x))^{2n-1} + (h_n(x))^{2n-2} \cdot x + \cdots + h_n(x) \cdot x^{2n-2} + x^{2n-1}} \right] \\
&= \sup_{x \in [1,\infty)} \frac{1}{(h_n(x))^{2n-1} + (h_n(x))^{2n-2} \cdot x + \cdots + h_n(x) \cdot x^{2n-2} + x^{2n-1}} \leqslant \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

nedeniyle A_2 kümesinde $h_n \xrightarrow{d} h$ sonucu bulunur. O halde $A = \mathbb{R}$ kümesinde $h_n \xrightarrow{d} h$ sonucu elde edilmiştir. Son fonksiyon dizisi için, önce

$$\sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} = \sin \frac{x^2}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} + 2n\pi} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$$

eşitliği gözlenmelidir, gerçekten $\sin y = \sin(y - 2n\pi)$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ nedeniyle

$$\begin{aligned}
\sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} &= \sin \left(2n\pi \sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} \right) = \sin \left(2n\pi \sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} - 2n\pi \right) \\
&= \sin 2n\pi \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} - 1 \right) = \sin \frac{x^2}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} + 2n\pi}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde her $x \in [0, M]$ için $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} = \frac{x^2}{4\pi} = s(x)$ bulunur, çünkü $a_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi}$ yazıp $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0 = (a_n(0))$ ve $\sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} = \sin a_n(x)$ gözleyip, özellikle $0 < x$ için

$$\begin{aligned}
n \cdot \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} &= n \cdot a_n(x) \cdot \frac{\sin a_n(x)}{a_n(x)} = \frac{x^2}{2\pi} \cdot \frac{2n\pi}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2} + 2n\pi} \cdot \frac{\sin a_n(x)}{a_n(x)} \\
&= \frac{x^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4n^2\pi^2}} + 1} \cdot \frac{\sin a_n(x)}{a_n(x)} \to \frac{x^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{x^2}{4\pi}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $[0, M]$ aralığında $s_n \xrightarrow{d} s$ düzgün yakınsama iddiasını göstermek için, hesaplamalar yapmalıyız. Öncelikle $\forall x \in [0, M], \forall n \in \mathbb{N}$ için $na_n(x) \leqslant \frac{nx^2}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi} \leqslant \frac{nx^2}{4n\pi} = s(x)$ ve dolayısıyla $0 \leqslant s(x) - na_n(x) = \frac{x^2}{4\pi} - na_n(x)$ gözleyip, ayrıca

$$\text{her } y \in [0, \infty) \text{ için } y - \frac{y^3}{3!} \leqslant \sin y \leqslant y$$

nedeniyle $na_n(x) - \dfrac{n(a_n(x))^3}{3!} - \dfrac{x^2}{4\pi} \leqslant n\cdot\sin a_n(x) - s(x) \leqslant na_n(x) - s(x) \leqslant 0$ olduğundan

$\Rightarrow |s_n(x) - s(x)| = |n\cdot\sin a_n(x) - s(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{4\pi} - na_n(x) + \dfrac{n(a_n(x))^3}{3!}$ olur ve sağ yan $[0, M]$ aralığında **sıfıra yakınsar**, çünkü

$$0 \leqslant \frac{x^2}{4\pi} - na_n(x) = \frac{x^2}{4\pi} - \frac{x^2}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi} = \frac{x^2}{4\pi}\left(1 - \frac{4n\pi}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi}\right)$$
$$\leqslant \frac{M^2}{4\pi}\Big(1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{M^2}{4n^2\pi^2}} + 1}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ ve } 0 \leqslant n\cdot\frac{a_n^3(x)}{3!} \leqslant \frac{M^6}{3!}\cdot\frac{n}{8n^3\pi^3} = \frac{M^6}{48}\cdot\frac{1}{n^2\pi^3} \to 0$$

geçerlidir, bitti!

5) Dini Teoremindeki hipotezlerde sayılan tüm koşullar **gereklidir**, kısacası

yakınsamanın tekdüze olması,

A kümesinin tıkız olması,

tüm f_n fonksiyonlarının sürekli olması,

$f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ noktasal limit fonksiyonunun sürekli olması

koşullarının **herhangi birisinden** vazgeçilirse, yakınsamanın düzgün olması gerçekleşmeyebilir. Aşağıdaki karşı örnekler bu amaçla verilmektedir.

$i)$ A tıkız olmadığında düzgün yakınsama gerçekleşmeyebilir:

$A = (0,1)$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ olsun. Her $x \in A$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ oysa $\|f_n - f\| = \|f_n\| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{\inf\limits_{x\in(0,1)}(1+nx)} = 1$ nedeniyle $\|f_n - f\| \to 0$ olmamaktadır.

$ii)$ f_n fonksiyonlarının tümü sürekli olmadığında, düzgün yakınsama gerçekleşmeyebilir:

$A = [0,1]$ tıkız aralığında $f_n(0) = 0$ ve $f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ 1 & ; x \in (0, \frac{1}{n}) \end{cases}$ ise $f(\frac{1}{n}) = 0 \neq f(\frac{1}{n}-) = 1$ nedeniyle bu fonksiyonların hepsi süreksizdir. Aşağıdaki $iii)$ şıkkının çözümündeki gerçeklerle $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ olur ve fakat $\|f_n - 0\| = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle yakınsma düzgün değildir, neden $\|f_n\| = 1$ olur?

$iii)$ Yakınsama tekdüze değilse düzgün yakınsama gerçekleşmeyebilir: Aşağıdaki sürekli

$$(\forall x \in A = [0,1])\, g_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & ; x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ n - 2n^2(x - \frac{1}{2n}) & ; x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & ; x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

fonksiyonlarının A kümesindeki noktasal limit fonksiyonu 0 fakat $\|g_n - 0\| = \|g_n\| = n \to \infty$ nedeniyle bu yakınsama düzgün değildir, dikkat: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$ ve her $x \in (0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}, 1]$ için $x \in (\frac{1}{n_x+1}, 1] \subseteq (\frac{1}{n}, 1]$ $(\forall n > n_x)$ olduğundan $g_n(x) = 0$ $(\forall n > n_x)$ gözleyerek her $x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ elde edilir. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyonlar dizisi ne tekdüze azalmayan ne de tekdüze artmayandır. Gerçekten şunları gözleyelim: Herhangi bir $n > 1$ alındığına $n+1 < n^2$ ve $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{2n+2}$ böylece

$$\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n} < \frac{3n+2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2(2n+1)} < x < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

gerçekleyen her x gerçel sayısı için aşağıdakiler bulunur:

$$x - \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2\,(2n+1)} \quad \text{ve} \quad 1 < 2\,(2n+1)\left(x - \frac{1}{2n+2}\right).$$

Böylelikle bu x gerçel sayıları için $g_n\,(x) \leq g_{n+1}\,(x)$ **olamadığı** anlaşılır, çünkü bu x sayıları için hem $x \in (\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{n+1})$ hem de $x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$ olduğundan eğer aşağıdakiler

$$n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right) = g_n\,(x) \leq g_{n+1}\,(x) = n + 1 - 2\,(n+1)^2\left(x - \frac{1}{2n+2}\right)$$

geçerli olsaydı, sonuçta önce

$$2n^2\left(\frac{1}{2n} - x\right) \leq 1 - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n+2}\right) - 2(2n+1)\left(x - \frac{1}{2n+2}\right)$$

ve böylelikle

$$0 < 2n^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \leq 1 - 2\,(2n+1)\left(x - \frac{1}{2n+2}\right) < 0$$

çelişkisi bulunurdu. Demek ki $g_n\,(x) \leq g_{n+1}\,(x)$ olmayan x gerçel sayıları vardır, kısacası $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizis **tekdüze azalmayan olamamaktadır**i. Öte yandan $0 < x < \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2n}$ gerçekleyen her x gerçel sayısı için $g_n\,(x) \leq g_{n+1}\,(x)$ **olamadığı** apaçıktır, çünkü olsaydı, olanaksız $2\,(n+1)^2\,x \leq 2n^2 x$ bulunurdu. Demek ki $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi **tekdüze artmayan da değildir**.

iv) Noktasal limit fonksiyonunun sürekliliği, zaten sürekli bir fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsaklığı için şarttır (neden?)

6) Tüm kökleri negatif $r_k = -\frac{n^2}{k}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ rasyonel sayıları olan aşağıdaki q_n polinomları için gösteriniz:

$$q_n\,(x) = \left(1 + \frac{1x}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2x}{n^2}\right) ... \left(1 + \frac{nx}{n^2}\right), \lim_{n\to\infty} q_n\,(x) = \sqrt{e^x} \quad (\forall x > 0)$$

Çözüm: Dikkat edilirse aslında her $x > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \ell n q_n(x) = \frac{x}{2}$ gerçekleşir çünkü aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\ell n q_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kx}{n^2}\right) \leq \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{x}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right), \\
\ell n q_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{kx}{n^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{kx}{n^2}}{1+\frac{kx}{n^2}} = x.\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+kx} \geq x.\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+nx} \\
&= \frac{x}{2}\left(\frac{n(n+1)}{n^2+nx}\right)
\end{aligned}$$

Tüm bunlar isteneni kolayca verir.

Şimdi tüm Matematiğin en önemli sonuçlarından birisi olan ve tarihsel önemi bulunan **Weierstrass Yaklaşım Teoremini** kanıtlamak için iki hazırlık gereklidir: aslında aşağıdaki Teorem 6, Weierstrass Teoreminden 40 yıl sonra kanıtlanmıştır.

Önerme 1: Her $x \in [0, 1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

Kanıtlama: Her $x, y \in \mathbb{R}$ çifti için ünlü, iki terimlinin açılım bağıntısı olan

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

x değişkenine göre bir kez türetilip x ile çarpılırsa

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

iki kez türetilip x^2 ile çarparsak

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

elde edilir. Tüm bu bağıntılar $x, y \in \mathbb{R}$ ne olursa olsun geçerli olduğundan, özel olarak y yerine $1 - x \geq 0$ alınırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\ ,\ nx = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\ ,\ n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

sonuncusunu düzenleyerek

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$$

ve böylelikle

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= n(n-1)x^2 + nx - 2nx\cdot\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + (nx)^2 \\ &= n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\ &= -nx^2 + nx = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4}\end{aligned}$$

bulunur, çünkü $0 \leq (x-\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - x(1-x)$ nedeniyle $f(x) = x(1-x)$ $(\forall x \in [0,1])$ için $f(x) \leqslant f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ $(\forall x \in [0,1])$ geçerlidir.

Teorem 6 (Bernstein Yaklaşım Teoremi): $[0,1]$ aralığında sürekli gerçel değerli **her** fonksiyon, kendi **Bernstein polinomlarının** düzgün yakınsak limitidir.

Kanıtlama: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu fonksiyonun Bernstein polinomları aşağıda tanımlananlardır:

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot f(\frac{k}{n})\cdot x^k(1-x)^{n-k} \qquad (\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N})\,.$$

Amacımız $\|B_{n,f} - f\| \to 0$ gerçeklendiğini göstermektir. Dikkat edilirse $1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ bilindiğinden, sonuçta $\forall x \in [0,1]$ için $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ve

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. Kapalı-sınırlı bir aralıkta sürekli her gerçel değerli fonksiyonun düzgün sürekli olduğu bilindiğinden aşağıdaki geçerlidir:

$$\exists\delta_\varepsilon > 0,\ x_1, x_2 \in [0,1] \quad \text{ve} \quad |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Şimdi $\mathbb{N}(n) = \{0, 1, 2, \ldots n-1, n\}$ kümesini, **sabit** bir $x \in [0,1]$ verildiğinde

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N}(n) : \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta_\varepsilon\} \quad , \quad A_2 = \{k \in \mathbb{N}(n) : \delta_\varepsilon \leqslant \left|\frac{k}{n} - x\right|\}$$

ayrık alt kümelerine parçalayalım. Apaçıktır ki $\mathbb{N}(n) = A_1 \cup A_2$ ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gerçekleşir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k\in\mathbb{N}(n)} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k\in A_1} + \sum_{k\in A_2} \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\delta_\varepsilon^2}\end{aligned}$$

bulunur, burada $M = \|f\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ yazılmıştır. Gerçekten her $k \in A_1$ için, $\delta_\varepsilon > 0$ düzgün süreklilik sabitinin niteliği gereği $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta_\varepsilon$ ve sonuçta $\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| < \varepsilon$ olduğundan

$$\sum_{k\in A_1} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k\in A_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon$$

bulunur, çünkü burada toplama katılan tüm terimler negatif olmayan gerçel sayılar ve $A_1 \subseteq \mathbb{N}(n)$ olduğundan büyük indis kümesi üzerinden alınan toplam eşit büyüktür. Öte yandan herbir $k \in A_2$ için

$$\delta_\varepsilon \leqslant \left|\frac{k}{n} - x\right| \quad \text{ve} \quad 1 \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} \frac{(k-nx)^2}{n^2} = \frac{(k-nx)^2}{\delta_\varepsilon^2 \cdot n^2} \quad \text{ve} \quad \left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| \leqslant \left|f(\frac{k}{n})\right| + |f(x)| \leqslant 2M$$

ve bir önceki önerme kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A_2} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant 2M \cdot \sum_{k\in A_2} 1 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant 2M \cdot \sum_{k\in A_2} \frac{(k-nx)^2}{\delta_\varepsilon^2 \cdot n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2 n^2} \cdot \sum_{k\in A_2} (k-nx)^2 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2 n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2 n^2} \cdot \frac{n}{4}\end{aligned}$$

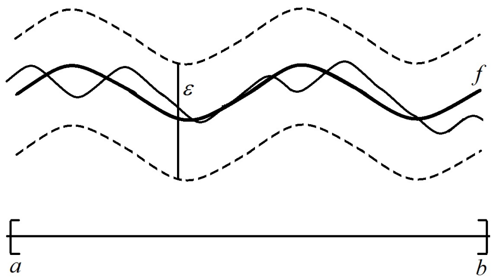
olur. Demek ki **herbir** $x \in [0,1]$ için $|B_{n,f}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\delta_\varepsilon^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve böylece $\|B_{n,f} - f\| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\delta_\varepsilon^2}$ elde ederek, uygun bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aracılığıyla $\|B_{n,f} - f\| \leqslant 2\varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bulmak kolaydır, bu istenilen $\lim\limits_{n\to\infty} \|B_{n,f} - f\| = 0$ sonucunu verir (neden?)

Teorem 7 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun öyle bir gerçel katsayılı p_ε polinomu vardır ki $\|f - p_\varepsilon\| < \varepsilon$ olur, kısacası $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in [a,b])$ gerçekleşir.

Kanıtlama: $q(x) = a + x(b-a)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ birinci derece polinomu aracılığıyla $g = (f \circ q)\,|[0,1]$ kısıtlama fonksiyonu gözönüne alınırsa $g(x) = (f \circ q)(x) = f(q(x)) = f(a + x(b-a))$ $(\forall x \in [0,1])$ olur. $g = (f \circ q)\,|[0,1]$ kısıtlama fonksiyonu süreklidir, çünkü her $x \in [0,1]$ için $a \leqslant a + x(b-a) \leqslant b$ yani $q(x) \in [a,b] = Tan(f)$ olup, $f \circ q$ bileşke fonksiyonu tanımlı süreklidir ve sürekli fonksiyonların kısıtlama fonksiyonları da süreklidir. O halde Bernstein Teoremi nedeniyle, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|g - B_{n,g}\| < \varepsilon$ olacak biçimde $B_{n,g}$ Bernstein polinomu var olduğundan

$$|f(a + x(b-a)) - B_{n,g}| = |g(x) - B_{n,g}(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [0,1])$$

bulunur. O halde $p(x) = B_{n,g}(\dfrac{x-a}{b-a})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ polinomu için (dikkat: $M = \dfrac{1}{b-a} > 0$ sayesinde $p^*(x) = M(x-a)$ ve böylelikle $p = B_{n,g} \circ p^*$ bileşkesi birer polinomdur) $[a,b]$ kapalı aralığında $|f(x) - p(x)| = \left|f(x) - B_{n,g}(\dfrac{x-a}{b-a})\right| < \varepsilon$ $(\forall x \in [a,b])$ bulunur, çünkü herbir $x \in [a,b]$ için $0 \leq x^* = \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$ aracılığıyla $x = a + x^*(b-a)$ böylece $\left|f(x) - B_{n,g}(\dfrac{x-a}{b-a})\right| = |f\,(a + x^*(b-a)) - B_{n,g}(x^*)| < \varepsilon$ olmaktadır. Bu sonuç istenendir.



Şekil 1: Weierstrass Teoremi:

Grafiği kalın çizgili f fonksiyonunun ε şeridi içinde en az bir polinomun grafiği yer alır.

Sonuç 2: $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli **her** fonksiyon, uygun bir gerçel katsayılı polinomlar dizisinin düzgün yakınsak limitidir.

Kanıtlama: $\varepsilon_n \downarrow 0^+$ gerçekleyen sabit dizisi alınsın. Weierstrass Teoremi nedeniyle , her $n \in \mathbb{N}$ için, sözü edilen f sürekli fonksiyonuna karşılık $\|f - p_n\| < \varepsilon_n$ koşulu gerçeklenecek biçimde p_n gerçel katsayılı polinomları vardır. Dikkat: $derp_n = n$ olması **gerekmez**! Sonuçta $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\| = 0$ olduğu için, bu tanımlanan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlar dizisinin aranan dizi olduğu anlaşılır.

Sonuç 3: Bir $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlar dizisinin **tüm** $\mathbb{R}$ **kümesinde**, noktasal limitine düzgün yakınsayabilmesi için gyk yinelemeli dizi olması, kısacası $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $p_{n_0} = p_{n_0+1} = p_{n_0+2} = \cdots$ gerçekleşmesidir.

Kanıtlama: Her yinelemeli fonksiyon dizisinin noktasal limitine düzgün yakınsayacağı apaçıktır. Şimdi gereklik gösterilmelidir. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlar dizisinin düzgün yakınsadığı limiti $q = \lim_{n\to\infty} p_n$ ile yazılsın. O halde kolayca

$$(1) \qquad \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \|p_n - p_m\| < \varepsilon \quad (\forall n, m \geq n_\varepsilon)$$

bulunur, bunun için $\|p_n - p_m\| \leqslant \|p_n - q\| + \|p_m - q\|$ gözlemek yeterlidir (neden?). Şimdi gerçel katsayılı bir p polinomunun derecesini kısaca $derp$ ile yazarsak, $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ dizisine karşılık

$$(2) \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \text{ için } derp_n \leqslant n_0$$

olur, çünkü böyle **olmasaydı**, $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinde, her $m \in \mathbb{N}$ için m doğal sayısı (2) iddiasındaki n_0 görevini göremeyeceğinden, $derp_{n_m} > m$ gerçekleyen bir p_{n_m} polinomu yer alırdı, böylelikle, uygun bir artan $\{n_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}^\omega$ doğal sayılar dizisi ve $derp_{n_k} = n_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ gerçekleyen bir $\{p_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ alt dizisi tümevarımla tanımlanabilir ki; önce $1 < derp_{n_1} = n_1$ gerçekleyen polinomu, sonra $2 + n_1 < derp_{n_2} = n_2$ gerçekleyen p_{n_2} polinomu, sonra $3 + n_2 < derp_{n_3} = n_3$ gerçekleyen p_{n_3} polinomu tanımlama işlemi tümevarımla sürdürülerek, istenen $\{p_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ alt dizisi tanımlanmış olur ve yeteri büyük k doğal sayısı için (1) kullanılarak

$$+\infty = \left\|p_{n_{k+1}} - p_{n_k}\right\| < \varepsilon < +\infty$$

çelişkisi elde edilirdi. Gerçekten $derp_{n_{k+1}} = n_{k+1} > n_k = derp_{n_k}$ nedeniyle $der(p_{n_{k+1}} - p_{n_k}) = n_{k+1} > n_1 > 1$ olur ve bilindiği gibi $derp \geq 1$ gerçekleyen gerçel katsayılı **her** p polinomu için ya $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$ ya da $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ ve sonuçta $\|p\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |p(x)| = +\infty$ olduğundan, yukarıdaki çelişki doğardı. Demek ki (2) iddiası doğrudur. O halde aşağıdaki doğrudur:

$$(3) \qquad \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_0 \text{ için } derp_n = m_0$$

(Bu iddia size ödevdir). (3) nedeniyle şu anlaşılır:

$$p_n(x) = a_{n,m_0}x^{m_0} + a_{n,m_0-1}x^{m_0-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} \quad (\forall n \geq m_0, \forall x \in \mathbb{R}) \quad \textbf{ve} \quad a_{n,m_0} \neq 0$$

Şimdi (1) iddiasında tanımlı n_ε ve bu m_0 aracılığıyla $N_0 = n_\varepsilon + m_0$ tanımlansın. Ünlü $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ eşitsizliği ve (1) iddiası kullanılarak, $n, m \geq N_0$ çifti ve $M > 1$ sabit pozitif sayısı ne olursa olsun

$$\begin{aligned}
\varepsilon > \|p_n - p_m\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(a_{n,m_0} - a_{m,m_0})x^{m_0} + \sum_{k=0}^{m_0-1}(a_{n,k} - a_{m,k})x^k\right| \\
&\geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left||a_{n,m_0} - a_{m,m_0}|\,|x|^{m_0} - \left|\sum_{k=0}^{m_0-1}(a_{n,k} - a_{m,k})x^k\right|\right| \\
&\geq \sup_{x\in[-M,M]} \left(|a_{n,m_0} - a_{m,m_0}|\,|x|^{m_0} - \left|\sum_{k=0}^{m_0-1}(a_{n,k} - a_{m,k})x^k\right|\right) \\
&\geq \sup_{x\in[-M,M]} \left(|a_{n,m_0} - a_{m,m_0}|\,|x|^{m_0} - c_{n,m}M^{m_0-1}\right) = |a_{n,m_0} - a_{m,m_0}|\,M^{m_0} - c_{n,m}M^{m_0-1}
\end{aligned}$$

bulunur, çünkü her $x \in [-M, M]$ ve toplamın her k indisi için $|x| \leqslant M$ ve $|x|^k \leqslant M^k \leqslant M^{m_0-1}$ olur, çünkü

$M > 1$ geçerlidir, böylece

$$\left|\sum_{k=0}^{m_0-1}(a_{n,k}-a_{m,k})x^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m_0-1}|a_{n,k}-a_{m,k}|\, M^k \leqslant M^{m_0-1}\cdot c_{n,m}$$

olur, burada kısalık amacıyla $c_{n,m} = \sum_{k=0}^{m_0-1}|a_{n,k}-a_{m,k}|\ (\geq 0)$ yazılmıştır. Demek ki, her $M > 1$ için, $n, m \geq N_0$ doğal sayı çifti ne olursa olsun

$$|a_{n,m_0}-a_{m,m_0}|\cdot M^{m_0} - c_{n,m}M^{m_0-1} < \varepsilon \quad \text{ve} \quad 0 \leqslant |a_{n,m_0}-a_{m,m_0}| < \frac{\varepsilon}{M^{m_0}} + \frac{c_{n,m}}{M} \quad (\forall M > 1)$$

bularak $M \to +\infty$ için limit alınırsa $|a_{n,m_0}-a_{m,m_0}| = 0$ yani

$$(a_{N_0,m_0}) = a_{n,m_0} = a_{m,m_0} \quad (\forall n, m \geq N_0)$$

olur. Dolayısıyla, her $n, m \geq N_0$ için $\|p_n - p_m\|$ ifadesinde x^{m_0} teriminin katsayısı sıfır olduğundan

$$\|p_n - p_m\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(a_{n,m_0-1}-a_{m,m_0-1})x^{m_0-1} + \sum_{k=0}^{m_0-2}(a_{n,k}-a_{m,k})x^k\right|$$

gözleyerek benzer işlemlerle, her $n, m \geq N_0$ için

$$a_{n,m_0-1} = a_{m,m_0-1}, a_{n,m_0-2} = a_{m,m_0-2}, \ldots, a_{n,0} = a_{m,0}$$

ve böylelikle, her $n, m \geq N_0$ için

$$a_{n,m_0} = a_{N_0,m_0}, a_{n,m_0-1} = a_{N_0,m_0-1}, \ldots, a_{n,0} = a_{N_0,0}$$

bulunur, bu ise her $n \geq N_0$ için $p_n = p_{N_0}$ demektir, kanıtlama bitmiştir.

Dikkat: Yukardaki kanıtlama şunu göstermektedir: Tüm $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsak olan bu polinomlar dizisinin düzgün yakınsadığı fonksiyon ($= p_{n_0}$) yine bir polinomdur.

Önerme 2: f_n fonksiyonları $[a, b]$ aralığında türetilebilir ve $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olabilmesi için gyk uygun en az bir $x_0 \in [a, b]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \ell_0 \in \mathbb{R}$ limitinin varolmasıdır. Bu gerçekleşirse $[a, b]$ aralığında hem $f_n \xrightarrow{d} f$ hem de $f_n' \xrightarrow{d} f'$ olur.

Kanıtlama: $\varepsilon > 0$ verilsin. Hipotez gereği $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi yakınsak ve böylelikle bir Cauchy dizisi olduğundan $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall n, m \geq n_\varepsilon)$ ve üstelik $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ türev fonksiyonları dizisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsadığından $\|f_n' - f_m'\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $(\forall n, m \geq n_\varepsilon)$ olur. O halde $x, y \in [a, b]$

ne olursa olsun, Ortalama Değer Teoremi, türetilebilir $f_n - f_m$ fonksiyonuna uygulanırsa sözgelimi $x < y$ ise uygun bir $x < \xi < y$ için, $n, m \geq n_\varepsilon$ ne olursa olsun

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| &= |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \\
&= \left|(x-y)(f_n - f_m)'(\xi)\right| \\
&= |x-y| \cdot \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right| \leqslant |x-y| \cdot \left\|f_n' - f_m'\right\| \\
&< \frac{\varepsilon\,|x-y|}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|x-y|}{b-a} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

ve böylelikle $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ bulunarak, **her** $x \in [a,b]$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu, dolayısıyla ünlü Cauchy Teoremi nedeniyle **yakınsak** olduğu bulunur. Üstelik $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ biçiminde tanımlanan noktasal limit fonksiyonu, en son sonuç kullanılıp $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $(\forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in [a,b])$ eşitsizliklerinde $m \to \infty$ için limit alarak, kolayca $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in [a,b])$ kısacası $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bulunur. Bu sonuç $[a,b]$ aralığında $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ yakınsamasının düzgün olduğunu söylemektedir. Ayrıca

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y} \quad , \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \quad (\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in [a,b] - \{y\})$$

fonksiyonları tanımlanırsa $\|\varphi_n - \varphi_m\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $(\forall n, m \geq n_\varepsilon)$ olduğu ve ayrıca $f_n'(y) = \lim\limits_{x\to y} \varphi_n(x)$ ve $f'(y) = \lim\limits_{x\to y} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(y)$ gerçeklendiği anlaşılır (nasıl?). Dikkat edilirse

$[a,b]$ aralığında hem $f_n \xrightarrow{d} f$ hem de $f_n' \xrightarrow{d} f'$ olduğu anlaşılır (nasıl?).

Önerme 3: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin üyeleri $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türetilebilir ve üstelik $|f_n'(x)| \leqslant M$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (a,b))$ olacak biçimde $M > 0$ sabiti var olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayabilmesi için gyk noktasal limitinin var olmasıdır.

Kanıtlama: Gereklilik apaçıktır. Şimdi yeterlik hipotezleri geçerli olsun. Önce $a \leq x < y \leq b$ gerçekleyen gerçel sayı çifti için uygun bir $x < \xi_{x,y} < y$ sayesinde $|f(x) - f(y)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| = \overline{\lim}\, |f_n(x) - f_n(y)| = |x-y| \cdot \overline{\lim}\, |f_n'(\xi_{x,y})| \leq M\,|x-y|$ gözlenirse, Lipschitz koşulun gerçekleyen f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olur, böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde sabit bir $0 < \delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ pozitif sayısı sayesinde $|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y| < M\delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olur. Ayrıca apaçık biçimde $[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} (x - \delta_\varepsilon, x + \delta_\varepsilon)$ olduğundan, tıkız $[a,b]$ aralığı bu açık örtülüş sayesinde uygun sonlu tane $x_1, x_2, \ldots, x_{m_0}$ noktaları aracılığıyla $[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_0} (x_k - \delta_\varepsilon, x_k + \delta_\varepsilon)$ gerçekler. Ayrıca herbir $1 \leq k \leq m_0$ doğal sayısı için $f(x_k) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_k)$ nedeniyle $\exists N_k \in \mathbb{N}$, $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n \geq N_k)$ olduğundan $\sum_{k=1}^{m_0} N_k = n_0$ doğal sayısı sayesinde, herbir $n \geq n_0$ için $\|f_n - f\| < \varepsilon$ bulmak artık kolaydır, çünkü tüm bu bilgiler yardımıyla herhangi $x \in [a,b]$ alındığında uygun bir $1 \leq k_0 \leq m_0$ sayesinde

$x \in (x_{k_0} - \delta_\varepsilon, x_{k_0} + \delta_\varepsilon)$ böylece $|f_n(x) - f_n(x_{k_0})| = |f_n'(\xi_0)| \, |x - x_{k_0}| \leq M\delta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{3}$ ve $|x - x_{k_0}| \leq \delta_\varepsilon$ nedeniyle $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olacağından

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_{k_0})| + |f_n(x_{k_0}) - f(x_{k_0})| + |f(x_{k_0}) - f(x)| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_0)$$

ve böylelikle $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geq N_0)$ bulunur.

Örnekler 4:

1) Aşağıdaki fonksiyon dizileri için $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin düzgün yakınsaklıklarını araştırınız;

$$\begin{aligned} f_n(x) &= arctg\frac{2x}{x^2+n^2},\ A = \mathbb{R} \\ g_n(x) &= \frac{\sin n\pi x}{n^2},\ A = \mathbb{R} \\ h_n(x) &= \frac{x}{1+n^2x^2},\ A = [-1,1] \end{aligned}$$

Çözümler:

Bilindiği gibi her $x, y \in \mathbb{R}$ için $||x| - |y|| \leq |x+y|$ geçerlidir, çünkü $|x| = |(x+y) + (-y)| \leq |x+y| + |y|$ yani $|x| - |y| \leq |x+y|$ benzeriyle $|y| - |x| \leq |y+x|$ böylece $-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$ geçerlidir. O halde $\left|n^2 - x^2\right| = \left|\left|n^2\right| - \left|x^2\right|\right| \leq \left|n^2 + x^2\right| = n^2 + x^2$ yani $\left|\frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}\right| \leq 1$ bulunur. Ayrıca $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ bilgisini ve Ortalama Değer Teoremini kullanıp

$$|arctgx| \leq |x| \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

bulunur, çünkü $x = 0$ için bu eşitsizlik apaçıktır, $x \neq 0$ içinse ister $x < 0$ isterse $0 < x$ olsun 0 ile x arasında yer alan uygun bir ξ için

$$arctgx = |x| \cdot \left|\frac{arctgx - arctg0}{x - 0}\right| = |x| \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \leq |x|\,.$$

Tüm bunlardan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| = \left|arctg\frac{2x}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{2|x|}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n} \text{ ve } \|f_n\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

bulunur, çünkü daima $2|a| \cdot |b| \leq |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2$ nedeniyle $2n|x| = 2|nx| \leq x^2 + n^2$ geçerlidir. O halde $0 \leq \|f_n - 0\| = \|f_n\| \leq \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - 0\| = 0$ yani $f_n \xrightarrow{d} 0$ bulunur. Ayrıca

$$f_n'(x) = \frac{2n^2 - 2x^2}{4x^2 + (x^2+n^2)^2}, \left|f_n'(x)\right| = \frac{2\left|n^2 - x^2\right|}{4x^2 + (x^2+n^2)^2} \leq \frac{2\left|n^2 - x^2\right|}{(n^2+x^2)^2} = 2\left|\frac{n^2 - x^2}{n^2+x^2}\right| . \frac{1}{n^2+x^2}$$

böylelikle $\left|\frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}\right| \leq 1$ yukarıda gözlendiğinden $|f'_n(x)| \leq \frac{2}{n^2+x^2} \leq \frac{2}{n^2}$ ve $\|f'_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty}\|f'_n - 0\| = 0$ yani $f'_n \xrightarrow{d} 0$ bulunur. Bu sonuçları bulurken $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisinin üyelerinin tanım kümesi $\mathbb{R}$ sınırlı olmadığından, gerek Önerme 3 gerekse Önerme 4 **kullanılamaz** Benzer biçimde $\|g'_n\| \leq \frac{\pi}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kullanılarak $g'_n \xrightarrow{d} 0$ elde edilir. Son fonksiyon dizisi için $|h_n(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{2|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n}$ nedeniyle $h_n \xrightarrow{d} 0$ ve $h'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{1+n^2x^2}\frac{1}{1+n^2x^2}$ ve $|h'_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2x^2}$ $(\forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N})$ bulunarak

$$\lim_{n\to\infty} h'_n(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 0; & x \in [-1,1] \text{ ve } x \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. O halde $\{h'_n\}_{n=1}^{\infty}$ tüürev fonksiyonları dizisi noktasal limitine düzgün yakınsayamaz $(neden?)$, dolayısıyla Önerme 3 kullanılamaz. Oysa $|h'_n(x)| \leq 1$ $(\forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan Önerme 4 kullanılır!

2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}(1-x)$, $g_n(x) = n\ell n(1+\dfrac{x}{n^2})$, $A = [0,1]$ için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: Dikkat edilirse $f'_n(x) = x^{n-1}\left(1 - x(1+\frac{1}{n})\right)$ $(\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N})$ böylece $f''_n(x) = x^{n-2}\big((n-1) - x(n+1)\big)$ gözleyip $\|f'_n - 0\|_{\text{sup}} = \|f'_n\|_{\text{sup}} = \max_{x\in[0,1]}|f'_n(x)| = \left|f'_n(\frac{n-1}{n+1})\right| = \frac{1}{n}(\frac{n-1}{n+1})^{n-1} = \frac{1}{n}(1-\frac{2}{n+1})^{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\dfrac{(1-\frac{2}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{2}{n+1})^2} \to 0\cdot\frac{e^{-2}}{1} = 0$ nedeniyle $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $f = 0$ sabit fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsar, üstelik $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ olduğundan Önerme 3 nedeniyle $[0,1]$ aralığında hem $f_n \xrightarrow{d} 0$ hem de $f'_n \xrightarrow{d} 0$ gerçekleşir. İkincisi ödevdir.

Bu bölümde artık bundan böyle **Fonksiyon Serileri** ile ilgilenelim:

Tanım 4: Bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin A kümesinde noktasal yakınsadığı noktalar kümesi

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

kısmi toplamlar dizisinin belirlediği

$$A_0 = \left\{x \in A : \lim_{n\to\infty} s_n(x) = S_x(= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) \in \mathbb{R}\right\}$$

kümesinden başka birşey değildir ve sözü edilen fonksiyon serisine A_0 kümesinde **noktasal yakınsar** denilir, kısacası , ancak ve yalnız $x \in A_0$ noktaları için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ limiti vardır (bir gerçel sayıdır).

Bu fonksiyon serisine ancak ve yalnız

$$\sup_{x\in A_0}\left|s_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| = \sup_{x\in A_0}|R_n(x)| = \|R_n\|_{A_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gerçeklendiğinde, **noktasal limitine** A_0 **kümesinde düzgün yakınsar** denilir, burada $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ $(\forall x \in A_0, \forall n \in \mathbb{N})$ yazılmıştır, buna n indisli **kalan toplam** denilir.

Somut pekçok örneği görelim:

Örnekler 5:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$

Çözüm: İlk iki seri, apaçık biçimde $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ kümesinde anlamlıdır. Birincisi $(-1, 1]$ aralığında ıraksar, çünkü herbir $x \in (-1, 1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n} \neq 0$ olur, çünkü $x = 1$ için bu limit $\dfrac{1}{2}$ buna karşılık $x \in (-1, 1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ nedeniyle bu limit 1 olmaktadır ve bilindiği gibi, **herhangi** bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ gerçel sayılar serisi, eğer yakınsaksa, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ geçerlidir çünkü $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \to S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ olduğundan, kolayca $0 \leq |y_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}| \to 0$ olur. Birinci seri $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ kümesinde yakınsar, çünkü herhangi $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ için $1 < |x| \leq |x|^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $0 < |x|^n - 1 = ||x|^n - 1| = ||x^n| - 1| \leq |x^n + 1|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur, çünkü $||x| - |y|| \leq |x + y|$ eşitsizliği kullanılmıştır. O halde herhangi bir $|x| > 1$ alındığında $0 < (|x| - 1)\,|x|^{n-1} = |x|^n - |x|^{n-1} < |x|^n - 1 \leq |x^n + 1|$ ve sonuçta $\frac{1}{|x^n+1|} < \frac{1}{|x|-1} . \frac{1}{|x|^{n-1}}$ ve

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x^n + 1|} < \frac{1}{|x| - 1} . \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-1} &= \frac{1}{|x| - 1} . \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n} \\
&= \frac{|x|}{(|x| - 1)^2} < +\infty
\end{aligned}
$$

bulunarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ serisinin mutlak yakınsadığı, dolayısıyla yakınsadığı anlaşılır. İkinci seri $x = 0$ için apaçık biçimde yakınsaktır ve

$$
x \neq 0 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n}
$$

nedeniyle, birinci seri için bulunan sonuç gereği, ancak ve yalnız $1 < \dfrac{1}{|x|}$ yani $-1 < x < 1$ gerçekleyen x gerçel sayıları için yakınsar, kısacası ikinci seri $(-1, 1)$ aralığında yakınsar. Üçüncü seri, apaçık biçimde $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ kümesinde yakınsar, örneğin $x \in (-1, 1)$ ise $|x| < 1$ olacağından $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} < +\infty$ gözlenmelidir. Dördüncü seri $\mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ...\}$ kümesinde anlamlıdır ve üstelik üçüncü serinin kısmi toplamları

$$
s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x + 1)(kx + 1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x + 1} - \frac{1}{kx + 1}\right)
$$

gerçeklediği ve ünlü

$$\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}-y_k)=(y_0-y_1)+(y_1-y_2)+\cdots+(y_{n-1}-y_n)=y_0-y_n$$

bağıntısı nedeniyle $s_n(x)=1-\frac{1}{nx+1}\to 1$ gerçekler, kısacası $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},...\}$ için $1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ bulunur, böylelikle sadece yakınsama iddiası değil toplamın değeri bile bulunmuştur.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ fonksiyon serileri için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: İlk ikisi ve ayrıca sonuncusu için gerekli olan ünlü

$$\textbf{Abel Bağıntısı:}\ \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1})+B_na_n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

gösterilmelidir, burada $B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ yazılmıştır ve bu bağıntıyı göstermek kolaydır, çünkü her $k\in\mathbb{N}$ için $b_k=B_k-B_{k-1}$ gözleyip, $B_0=0$ alınarak

$$\sum_{k=1}^{n}a_kB_{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}B_k=a_1B_0+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k=\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k$$

ve böylece aşağıdaki bulunur:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}a_kB_k-\sum_{k=1}^{n}a_kB_{k-1}\\&=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kB_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}B_k=B_na_n+\sum_{k=1}^{n-1}B_k(a_k-a_{k+1}).\end{aligned}$$

Birinci seri $x\in\{\mp2\pi,\mp4\pi,\mp6\pi,...\}$ gerçel sayısı için apaçık biçimde yakınsar, çünkü sözgelimi $x=2\pi$ ise $\sin nx=\sin 2n\pi=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ olur. Şimdi $x\in\mathbb{R}-\{\mp2\pi,\mp4\pi,\mp6\pi,...\}$ olsun. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ serisi **yine yakınsaktır.** Gerçekten

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\sin kx=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_k(x)}{k(k+1)}+\frac{B_n(x)}{n}$$

kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır, burada $a_k=\frac{1}{k}$, $b_k=\sin kx$ alınarak Abel bağıntısı kullanılmıştır ve

$$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\quad(\forall x\in\mathbb{R}-\{\mp2\pi,\mp4\pi,\mp6\pi,...\})$$

eşitliğinin geçerli olduğu gözlenmiştir, çünkü dikkat edilirse aşağıdaki toplam için

$$2\sin\tfrac{x}{2}\cdot B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}2\sin\tfrac{x}{2}\cdot\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x\right)=2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right)$$

olur, çünkü 1) örneğinde kullandığımız

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)=a_0-a_n \text{ ve } 2\sin ax\sin bx=\cos(b-a)x-\cos(b+a)x$$

bilgileri yardımıyla $2\sin\frac{x}{2}\cdot B_n(x)=\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x=2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$ bulunur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n(n+1)}+\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(x)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n(n+1)}+0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n(n+1)}$$

bulunur ve bu son seri mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır, çünkü $|\sin y|\le 1$ $(\forall y\in\mathbb{R})$ nedeniyle $|B_n(x)|\le\dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ eşitsizlikleri her $n\in\mathbb{N}$ ve her $x\notin\{\mp2\pi,\mp4\pi,...\}$ için geçerlidir, böylelikle

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{B_n(x)}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|B_n(x)|}{n(n+1)}\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

bulunur, çünkü

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

geçerlidir. İkinci seri için, Abel bağıntısından ve

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\quad(\forall x\notin\{\mp2\pi,\mp4\pi,...\})$$

eşitliğinden yararlanın, dikkat: bu serinin, $\cos n\pi=(-1)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ bilgisi nedeniyle her $n\in\mathbb{N}$ için $\cos 2n\pi=1$ olduğunu anımsayıp $\{\mp2\pi,\mp4\pi,...\}$ kümesinde **ıraksadığına** özellikle dikkat edilmelidir, kısacası ikinci seri $\mathbb{R}-\{\mp2\pi,\mp4\pi,\mp6\pi,...\}$ kümesine ait gerçel sayılarda yakınsaktır. Son seri ise $x\notin\{-1,1\}$ için anlamlı ve yakınsaktır, çünkü

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}=\frac{1}{x(1-x)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x^k}-\frac{1}{1-x^{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

olup sonuçta şu bulunur:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\right)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2} & ;x\in(-1,1)\\ \frac{1}{x(1-x)^2} & ;x\in\mathbb{R}-[-1,1]\end{cases}$$

Sonuncu seride $a_k=\frac{1}{\ln(k+1)}$, $b_k(x)=\sin(kx)$ alınırsa her $k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}0 &< a_k-a_{k+1}=\frac{\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\,.\ln(k+2)}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\,.\ln(k+2)}\\ &< \frac{1}{(k+1)\,.(\ln(k+1))^2}<\frac{1}{k.\,(\ln(k+1))^2}\end{aligned}$$

ve $k\to\infty$ için $\frac{1}{k.(\ln(k+1))^2}\downarrow 0^+$ gerçeklediği için Cauchy Sıklaştırma Teoremi nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.(\ln(n+1))^2}$ serisi yakınsaktır, böylece tıpkı ilk örnekteki gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(x)}{\ln(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x)\,.\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)\,.\ln(n+2)}$$

gözleyip ilk limit 0 ve her $x\notin\{2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$ için

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}|B_n(x)|\,.\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)\,.\ln(n+2)}<\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.\,(\ln(n+1))^2}<+\infty$$

olduğundan son seri tüm $\mathbb{R}$ kümesinde noktasal yakınsaktır.

3) Aynı soruyu aşağıdaki fonksiyon serileri için çözünüz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell nn}{n}\right)^x,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{\ell nn}$$

Çözüm: Birinci seri $x\notin\{-1,1\}$ için anlamlıdır ve bu x 'ler için aşağıdakileri

$$x^{2^{n-1}}-x^{2^n}=x^{2^{n-1}}\left(1-x^{2^{n-1}}\right),\quad \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-x^{2^n}}$$

gözleyerek, toplamın $x\in(-1,1)$ için, tıpkı 2) örneğindeki gibi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-x^{2^k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}\right)=\frac{x}{1-x}$$

ve $x\in\mathbb{R}-[-1,1]$ içinse $\dfrac{1}{1-x}$ olduğu görülür. İkinci seriyse herbir $x\in(-\infty,0]$ için ıraksar, çünkü bu durumda $x = -|x|$ nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell nn}{n}\right)^x = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ell nn}{n}\right)^x = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{\ell nn}\right)^{|x|} \geq \frac{1}{2^{|x|}}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n})^{|x|} = +\infty$$

gerçekleşir, burada her $n \geq 2$ için $\ell nn = 2\ell n\sqrt{n} < 2\ell n(1+\sqrt{n}) < 2\sqrt{n}$ ve $\frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{n}{2\sqrt{n}} < \frac{n}{\ell nn}$ gözlenmiştir. İkinci seri, buna karşılık yalnızca $(1,\infty)$ aralığında yakınsar, çünkü Cauchy Sıklaştırma Ölçütü nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell nn}{n}\right)^x$ ile $(\ell n2)^x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{2^n}\right)^x = (\ell n2)^x\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{2^{n(x-1)}}$ serileri aynı karakterdedir ve kök testi uygulanırsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{2^{n(x-1)}}$ serisinin $x\in(0,1)$ için ıraksak $x\in(1,\infty)$ için yakınsadığı anlaşılır, bu son seri $x=1$ için de apaçık biçimde ıraksar; demek ki ikinci seri yalnızca $(1,\infty)$ aralığında yakınsamaktadır, aslında ikinci seri $1<a$ ise $[a,\infty)$ aralığında düzgün yakınsar çünkü herhangi $x\in[a,\infty)$ alındığında, her $k\in\mathbb{N}$ için $0\leq\frac{\ell nk}{k}<1$ ve böylece $a\leq x$ nedeniyle $\left(\frac{\ell nk}{k}\right)^x\leq\left(\frac{\ell nk}{k}\right)^a$ ve sonuçta $|R_n(x)| = R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\ell nk}{k}\right)^x \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\ell nk}{k}\right)^a = \varepsilon_n$ böylece $\sup\limits_{x\in[a,\infty)}|R_n(x)| \leq \varepsilon_n \to 0$ olur, çünkü az önce gözlendiği gibi, $1<a$ nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ell nn}{n}\right)^a$ serisi yakınsak olduğundan, kalan terimleri sıfıra yakınsar.

Üçüncü seri apaçık biçimde $(-\infty,0]$ aralığında anlamsız ve tanımsızdır, çünkü $x<0$ ise $\exists n_x\in\mathbb{N}$, $1<n_x|x| \leq n|x|$ $(\forall n\geq n_x)$ yani $-x = |x| > \frac{1}{n}$ $(\forall n\geq n_x)$ ve sonuçta $1+nx<0$ $(\forall n\geq n_x)$ olmaktadır. Bu seri $(0,1]$ aralığında da ıraksar, çünkü bu durumda $\ell n(1+nx) > \frac{nx}{1+nx} > \frac{nx}{n+nx} = \frac{x}{1+x}$ $(\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in(0,1])$ ve böylece $1\leq\frac{1}{x}$ ve sonuçta $1\leq\left(\frac{1}{x}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ unutmadan

$$+\infty \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n} \geq \frac{x}{1+x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{n} \geq \frac{x}{1+x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

bulunur. Ayrıca bu serinin $(0,1]$ aralığında ıraksak olduğunu $0<\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ gözleyip şu bilgi ile çıkarsayabilirdik:

Bilgi: Pozitif terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi yakınsak ise $\underline{\ell im}(na_n)=0$ olur. Dikkat edilirse, bu bilginin gereği olarak üçüncü seri herbir $x\in(0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\cdot\ell n(1+nx) = +\infty$$

gerçeklediğinden kesinlikle yakınsak olamaz.

Oysa $x\in(1,\infty)$ ise bu kez $\ell n(1+nx) < \ell n(1+\sqrt{nx})^2 = 2\ell n(1+\sqrt{nx}) < 2\sqrt{nx}$ ve böylece $0<\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n} < \frac{2\sqrt{nx}}{nx^n} = \frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} < 2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$ olur ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$ nedeniyle, Kıyaslama ölçütü ile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n}$ serisinin yalnızca $(1,\infty)$ aralığında yakınsadığı anlaşılır; dikkat: son irdelemede $x \in (1,\infty)$ olduğundan $n-1 < n-\dfrac{1}{2}$ ve $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ nedeniyle $(\frac{1}{x})^{n-\frac{1}{2}} < (\frac{1}{x})^{n-1}$ gerçeğine özellikle dikkat edilmiştir.

Dördüncü seriyi incelemeden önce, $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $a^{\ell nb} = e^{\ell na \cdot \ell nb} = e^{\ell nb \cdot \ell na} = b^{\ell na}$ gözleyerek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\ell nn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ell nx} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\ell n\frac{1}{x}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ell n\frac{1}{x}}}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ bulunur, dikkat $a^{\ell nn}$ ancak ve yalnız $a > 0$ için anlamlıdır. O halde, bu son seri, ancak ve yalnız $1 < \ell n\frac{1}{x}$ yani $e < \dfrac{1}{x}$ kısacası $x \in (0, \dfrac{1}{e})$ gerçekleyen gerçel sayılar için yakınsar.

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{e^{n^2|x|}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{e^{n|x|}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ell n(1+\frac{x^2}{n\ell n^2 n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$$

fonksiyon serileri için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: İlk seri, ancak ve yalnız $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ aralığında yakınsar (neden?). Öte yandan her $a > 0$ için $\dfrac{a^4}{4!} < \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!} = e^a$ yani $\dfrac{a^4}{16} < e^a$ olduğundan, her $x \neq 0$ için $\dfrac{nx^2}{e^{n^2|x|}} < \dfrac{nx^2}{e^{n|x|}} < \dfrac{n^2x^2}{e^{n|x|}} < \dfrac{16}{n^2\,|x|^2}$ nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{e^{n^2|x|}} < \dfrac{16}{|x|^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{8\pi^2}{3x^2} < +\infty$ bulunarak, (dikkat: Bölüm 2'de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ eşitliği kanıtlanacaktır) ikinci serinin gerek $x = 0$ gerekse $x \neq 0$ gerçekleyen tüm gerçel sayılarda yakınsadığı anlaşılır. Üçüncü seri kök testi nedeniyle $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak yakınsar (neden?).

Cauchy Sıklaştırma Ölçütü nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ell n^2 n}$ serisi yakınsaktır, üstelik dikkat edilirse

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ell n(1+\frac{x^2}{n\ell n^2 n}) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^2}{n\ell n^2 n} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ell n^2 n}$$

olduğundan, dördüncü seri de ikinci gibi $\mathbb{R}$ kümesinde yakınsaktır. Beşinci serinin $|x| \geq 1$ için ıraksadığı gözlenmelidir.

<u>**Dikkat:**</u> Yukarda 3) örneğindeki serinin incelenmesi sırasında yararlanılan $(*)$ bilgisinin bir yeter koşul sunduğuna dikkat edilmelidir. Eğer pozitif terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak **ise** $\underline{\ell im}\; na_n = 0$ olur. Buna karşılık $\underline{\ell im}\; na_n = 0$ **ve** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ koşullarını gerçekleyen pozitif terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serileri vardır. Örneğin,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n\ell n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)} = 0 \quad \textbf{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ell n(n+1)} = +\infty$$

gözleyiniz, burada son serinin, eğer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif terimli dizisi $a_n \downarrow 0^+$ gerçekliyorsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisiyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ serisinin aynı karakterde oldoğunu söyleyen **Cauchy Sıklaştırma Ölçütü** ile ıraksak

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ell n(2^n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(2^n+1)} \left(> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(2^n+2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(2^{n+1})} = \frac{1}{\ell n2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \right)$$

serisiyle aynı karakterde olduğuna dikkat ediniz.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2})$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n \sin nx}{n!}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(x^n+\frac{1}{x^n})}{\sqrt{n!}}$ fonksiyon serileri için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: İlk iki seri, $\mathbb{R}$ kümesinde noktasal yakınsar, birincisi

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2}) \leq 4\pi^2 x^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

gerçekler, çünkü

$$\begin{aligned}
\sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2}) &= \left[\sin\left(2n\pi\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2n\pi\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} - 2n\pi\right)\right]^2 \\
&= \left[\sin\left(2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} - 1\right)\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2n\pi \cdot \frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}+1}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sin\left(2n\pi \cdot \frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}+1}\right)\right|^2 \\
&\leq \left(2n\pi \cdot \frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}+1}\right)^2 \leq \left(2n\pi \cdot \frac{x^2}{n^2}\right)^2 = \frac{4\pi^2 x^4}{n^2}
\end{aligned}$$

olur, çünkü $|\sin x| < x$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ geçerlidir. İkinci seri herbir $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsak ve sonuçta yakınsaktır, çünkü

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n \sin nx}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} < +\infty$$

olur. Üçüncü seri, apaçıktır ki $x \neq 0$ için anlamlıdır ve böyle her x için mutlak yakınsaktır. Önce, ilerde gösterilecek olan şu bilgiyi kullanalım: Pozitif terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi , eğer $\overline{\lim} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ gerçeklerse yakınsaktır, dolayısıyla $0 < a$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 a^n}{\sqrt{n!}}$ **yakınsar**, çünkü $\dfrac{(n+1)^2 a^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \dfrac{\sqrt{n!}}{n^2 a^n} \to 0$ gerçeklenir. Bu nedenle herhangi bir $0 < x$ alındığında, bağdaşmaz $i)$ $0 < x \leq 1$ ve $ii)$ $1 < x$ koşullarından tam birisi geçerlidir., $i)$ geçerliyse $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_0+1} < \dfrac{1}{n_0} < x \leq 1 < n_0+1$ ve böylelikle $\exists M_0 > 0$, $\dfrac{1}{M_0} < x < M_0$ ve $x^n + \frac{1}{x^n} < M_0^n + M_0^n = 2M_0^n$ ve $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(x^n+\frac{1}{x^n})}{\sqrt{n!}} \leq 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 M_0^n}{\sqrt{n!}} < +\infty$ bulunur. $ii)$ geçerli olduğunda, Arşimet İlkesi ile yine benzer bir $M_0 > 0$ bulunup aynı kanıtlama verilir. Demek ki üçüncü seri her $x \in \mathbb{R}^+$ için yakınsamaktadır. O halde her $x < 0$ için üçüncü seri mutlak yakınsar, çünkü aşağıdaki geçerlidir:

$$x < 0 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x^n+\frac{1}{x^n})}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2(|x|^n+\frac{1}{|x|^n})}{\sqrt{n!}}.$$

6) $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ serisinin yakınsaklığını ve $\zeta(x)$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

Not: Bu ünlü fonksiyona **Riemann zeta fonksiyonu** denilir. Dikkat edilirse $x \le 0$ için bu fonksiyon serisinin ıraksadığı apaçıktır. Bu seri herbir $x \in (0,1]$ $i$çin de ıraksar, gerçekten herhangi bir $0 < x \le 1$ alınsın ve sabit tutulsun

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

kısmi toplamlar dizisi ıraksar, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \dfrac{1}{2^x} \le |S_{2n}(x) - S_n(x)|$ nedeniyle $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir Cauchy dizisi **olamaz**, gerçekten $1 - x \ge 0$ nedeniyle

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)| = S_{2n}(x) - S_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^x} \ge \frac{n}{(n+n)^x} = \frac{n^{1-x}}{2^x} \ge \frac{1}{2^x}$$

olur. Buna karşılık bu fonksiyon serisi herbir $x \in (1,\infty)$ için yakınsaktır, çünkü

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} &= 1 + \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}\right) + \left(\frac{1}{4^x} + \cdots + \frac{1}{7^x}\right) + \left(\frac{1}{8^x} + \cdots + \frac{1}{15^x}\right) + \cdots \\ &< 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{4}{4^x} + \frac{8}{8^x} + \cdots = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^n}{2^{nx}} = \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^n \end{aligned}$$

ve bu son seri yakınsak bir geometrik seridir, üstelik $0 < \zeta(x) < \sum\limits_{n=10}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)^n = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}} = \dfrac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} = \dfrac{2^x}{2^x - 2}$ $(\forall x \in (1,\infty))$ geçerlidir.

Zeta fonksiyonunun sürekliliği ve üstelik $(1,\infty)$ aralığında her noktada sonsuz mertebeden türetilebilir olduğu ilerde anlaşılacaktır.

Artık fonksiyon serilerinin **düzgün yakınsaklığıyla** ilgilenilebilecek denli olgunlaştık. Aslında sözgelimi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ell n}{n}\right)^x$ fonksiyon serisinin herhangi $1 < a$ için $[a,\infty)$ aralığında düzgün yakınsadığı Örnekler 5.3) içinde kanıtlanmıştı.

Örnekler 6:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x(x^n - 1)}{x - 1}\right)$ fonksiyon serisi yalnızca $(-1,1)$ aralığında noktasal yakınsar çünkü $\frac{x}{x-1}\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^n - 1\right)$ limiti ancak ve yalnız $|x| < 1$ için vardır. Bu fonksiyon serisi $0 < \varepsilon < 1$ ne olursa olsun $[\varepsilon, 1)$ aralığında asla **düzgün yakınsamaz**, çünkü dikkat edilirse $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[\varepsilon,1)} |R_n(x)|\right) = +\infty$ olur, çünkü

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[\varepsilon,1)} |R_n(x)| > n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (\forall n \ge n_\varepsilon) \tag{1}$$

geçerlidir, çünkü herhangi $x \in [\varepsilon, 1)$ için $0 < x < 1$ böylece $\sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m = \dfrac{1}{1-x}$ ve

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \cdots) = x^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{x^{n+1}}{1-x} > 0$$

gözleyip herhangi $x_0 \in [\varepsilon, 1)$ için

$$\sup_{x\in[\varepsilon,1)} |R_n(x)| = \sup_{x\in[\varepsilon,1)} R_n(x) \geq R_n(x_0) = \frac{x_0^{n+1}}{1-x_0}$$

bulunur, sonuçta $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ nedeniyle $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < r_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ olduğundan

$$\sup_{x\in[\varepsilon,1)} |R_n(x)| \geq R_n(r_n) = \frac{r_n^{n+1}}{1-r_n} = (n+1)r_n^{n+1} > nr_n^{n+1} = n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad (\forall n \geq n_\varepsilon)$$

kısacası (1) eşitsizliği bulunup limit alınırsa $n \to \infty$ ve $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}$ olduğundan istene çıkar. Oysa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ fonksiyon serisi $0 < \varepsilon < 1$ ne olursa olsun $[-\varepsilon, \varepsilon]$ aralığında düzgün yakınsar, çünkü her $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|x| \leq \varepsilon$ nedeniyle

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^k = \frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon} = \delta_n$$

ve $\delta_n \downarrow 0^+$ olduğundan $0 \leq \sup\limits_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} |R_n(x)| \leq \delta_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bularak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} |R_n(x)|\right) = 0$ elde edilir.

2) Zeta fonksiyonunun tanımında kullanılan fonksiyon serisinin düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Bilindiği gibi $\zeta(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$ ve sonuçta, her $n \in \mathbb{N}$ için $+\infty = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+N}\right)$ olduğundan

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists N_n \in \mathbb{N}, 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+N_n}$$

bulunur, çünkü eğer her $N \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+N} \leq 1$ **olsaydı** bu kısmi toplamların limiti için $+\infty = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \leq 1 < +\infty$ gerçeklenirdi. Bu gözlemin ardından $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ fonksiyon serisinin, noktasal yakınsadığı $(1, \infty)$ aralığında **düzgün yakınsamadığı** çıkarsanır. Gerçekten Tanım 3 ' te görüldüğü gibi $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^x}$ pozitif kalan toplamı için, $\sup\limits_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| = \sup\limits_{x\in(1,\infty)} R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ gerçeklenmesi gerekirken

$$1 < \sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

nedeniyle, istenen koşulu gerçekleyemez, çünkü herhangi $x_0 \in (1,\infty)$ için $\sup\limits_{x\in(1,\infty)} R_n(x) \geq R_n(x_0)$ olduğundan, özellikle $\varepsilon_n \downarrow 0^+$ gerçekleyen $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif terimli dizi aracılığıyla tanımlanan $x_m = 1 + \varepsilon_m \in (1,\infty)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ gerçel sayıları sayesinde

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| \geq R_n(x_m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{x_m}} > \sum_{k=n+1}^{n+N_n} \frac{1}{k^{x_m}} \\ = \frac{1}{(n+1)^{x_m}} + \frac{1}{(n+2)^{x_m}} + \cdots + \frac{1}{(n+N_n)^{x_m}} (\forall m \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

ve sonuçta $m \to \infty$ için limit alınarak (dikkat: bu limit işleminden $\sup\limits_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)|$ etkilenmez)

$$\begin{aligned}1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+N_n} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^{x_m}} + \frac{1}{(n+2)^{x_m}} + \cdots + \frac{1}{(n+N_n)^{x_m}}\right] \\ \leq \sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)|\end{aligned}$$

bulunur. Siz aslında , **her** $M > 0$ sayısı için

$$M < \sup_{x\in(1,\infty)} R_n(x) \quad (\forall M \in \mathbb{R}^+)$$

göstererek, aslında $\sup\limits_{x\in(1,\infty)} R_n(x) = +\infty$ gerçeğini **gösterebilmelisiniz**. Buna karşılık $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ fonksiyon serisi, her $\varepsilon > 0$ için $[1+\varepsilon, \infty)$ kapalı ve sınırsız aralığında **düzgün yakınsar,** çünkü dikkat edilirse $1 < x < y$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $n^x < n^y$ ve böylece $\frac{1}{n^y} < \frac{1}{n^x}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle

$\zeta(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$ olduğundan (dikkat: $0 < a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve fakat tek bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için bile $a_{n_0} < b_{n_0}$ ve üstelik hem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hem de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri yakınsak **ise**, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ kısmi toplamları, her $k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq b_k - a_k$ unutmadan

$$0 < b_{n_0} - a_{n_0} \leq (b_{n_0} - a_{n_0}) + \sum_{k=1}^{n_0-1}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n_0}(b_k - a_k) = s_{n_0} \leq s_n \leq s_{n+1} \quad (\forall n \geq n_0)$$

gerçeklendiğinden, sonuçta $0 < s_{n_0} \leq \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bulunduğuna, özellikle **eğer** $a_n < b_n$ $(\forall n \geq n_0)$ ise bu yakınsak serilerin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ gerçeklediğine dikkat ederek) , $1 < x < y \Rightarrow 0 < \zeta(y) < \zeta(x)$ bulunacağını gözleyiniz. Yukarıdaki nedenlerle her $x \in$

$[1+\varepsilon,\infty)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^x}\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}=r_n\Rightarrow 0\leq\sup_{x\in[1+\varepsilon,\infty)}|R_n(x)|=\sup_{x\in[1+\varepsilon,\infty)}R_n(x)\leq r_n$$

ve $r_n\to 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[1+\varepsilon,\infty)}|R_n(x)|\right)=0$ bulunarak, $[1+\varepsilon,\infty)$ aralığındaki düzgün yakınsama iddiası gösterilmiş olur, burada x'den bağımsız yakınsak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ serisinin kalan toplamı r_n için

$$0<r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}=\left|\zeta(1+\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

gerçeği kullanılımıştır. Demek ki $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ fonksiyon serisi $(1,\infty)$ aralığında noktasal ve $1<a$ gerçekleyen her $a\in\mathbb{R}^+$ için $[a,\infty)$ aralığında düzgün yakınsamaktadır.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\sin nx}{n!}$ fonksiyon serileri için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: Birinci serinin, herbir $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-[-1,1]$ için yakınsadığını biliyoruz. Kısalık amacıyla $A=\mathbb{R}-[-1,1]$ yazalım. Birinci fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsayamaz, çünkü **herhangi** $x_0\in(1,\infty)\subseteq A$ ve $k_0>n$ için

$$\sup_{x\in A}|R_n(x)|\geq|R_n(x_0)|=R_n(x_0)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+x_0^k}>\frac{1}{1+x_0^{k_0}}$$

dolayısıyla, her $n\in\mathbb{N}$ alındığında, herbir $m>n$ ve $x_m=1+\frac{1}{m}\in A$ için

$$\sup_{x\in A}|R_n(x)|>\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\ (\forall m\geq n)$$

yazılır ve $m\to\infty$ için limit alarak $0<\frac{1}{2e}<\frac{1}{1+e}\leq\sup\limits_{x\in A}|R_n(x)|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ bulunur, bu sonuç, asla $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in A}|R_n(x)|\right)=0$ **olamadığını** söylemektedir. Buna karşılık, birinci seri her $\varepsilon>0$ için $A_\varepsilon=(-\infty,-(1+\varepsilon)]\cup[1+\varepsilon,\infty)$ kapalı kümesinde düzgün yakınsar, çünkü her $x\in A_\varepsilon$ için $1+\varepsilon\leq|x|$ ve sonuçta $0<(1+\varepsilon)^k-1\leq|x|^k-1$ ve

$$|R_n(x)|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{|x^k+1|}\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{|x|^k-1}\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon)^k-1}=r_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$$

olur, böylelikle $0\leq\sup\limits_{x\in A_\varepsilon}|R_n(x)|\leq r_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ bulunur, oysa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon)^n-1}$ pozitif terimli serisinin yakınsadığı, Örnek 5.1) içinde (nerede?) gösterildiğinden $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon)^k-1}$

$\to 0$ geçerli sonuçta $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A_\varepsilon}|R_n(x)|\right)=0$ bulunur. İkinci fonksiyon serisi tüm $\mathbb{R}$ kümesinde noktasal yakınsar ama düzgün yakınsayamaz, çünkü $I=[0,\pi]$ aralığında bile **düzgün yakınsayamaz**, çaba gerektiren bu kanıtlamayı aşağıda verelim: Herzamanki gibi $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$ $(\forall x\in I,\forall n\in\mathbb{N})$ yazalım ve şunu kanıtlayalım:

$$\|R_n\|_I \geq \frac{2}{5} \quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Gerçekten N doğal sayısı $N>>n$ ve $x_N=\frac{\pi}{2N}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subseteq I$ olmak üzere şunu gösterebiliriz:

$$\|R_n\|_I \geq |R_n(x_N)| = R_n(x_N) > \frac{2}{5} \ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Dikkat edilirse, öncelikle $\sin(2Nx_N)=0=\sin(4Nx_N)$ olduğu için, toplama katılan terimleri yazmadan

$$R_n(x_N)=\left(\sum_{k=n+1}^{N}+\sum_{k=N+1}^{2N-1}+\sum_{k=2N+1}^{3N}+\sum_{k=3N+1}^{4N-1}\right)+R_{4N}(x_N)$$

olur, burada gerek parantezin içi gerekse $R_{4N}(x_N)$ kalan toplamı pozitifdir. Gerçekten biraz ilerde gösterileceği gibi, her $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ için $\frac{2x}{\pi}\leq\sin x$ olduğundan, herbir $n<k\leq N$ için $0<nx_N<kx_N\leq Nx_N=\frac{\pi}{2}$ ve böylece yukardaki eşitsizlik ile

$$\frac{\sin(kx_N)}{k}\geq\frac{2kx_N}{k\pi}=\frac{1}{N}\ ,$$
$$\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\sin(kx_N)}{k}\geq\frac{N-n}{N}=1-\frac{n}{N}>1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

bulunur, oysa

$$\left|\sum_{k=2N+1}^{3N}\frac{\sin(kx_N)}{k}\right|\leq\sum_{k=2N+1}^{3N}\frac{1}{k}<\frac{N}{2N+1}<\frac{1}{2}$$

ve böylece

$$\sum_{k=2N+1}^{3N}\frac{\sin(kx_N)}{k}\geq-\left|\sum_{k=2N+1}^{3N}\frac{\sin(kx_N)}{k}\right|>-\frac{1}{2}$$

bulunur, ayrıca dikkat edilirse

$$\sum_{k=N+1}^{2N-1}\frac{\sin(kx_N)}{k}+\sum_{k=3N+1}^{4N-1}\frac{\sin(kx_N)}{k}>0$$

geçerlidir, çünkü bu toplamlar sırasıyla

$$\sum_{k=N+1}^{2N-1} \frac{\sin(kx_N)}{k} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sin\left((N+i)\frac{\pi}{2N}\right)}{N+i} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos(ix_N)}{N+i}$$
$$\sum_{k=3N+1}^{4N-1} \frac{\sin(kx_N)}{k} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sin\left((3N+i)\frac{\pi}{2N}\right)}{3N+i} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos(ix_N)}{3N+i}$$

ve böylece bunların toplamı

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \cos(ix_N)\left(\frac{1}{N+i} - \frac{1}{3N+i}\right) &= 2N.\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos(ix_N)}{(N+i)(3N+i)} \\ &> 2N.\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos(ix_N)}{(3N+i)^2} > 0 \end{aligned}$$

bulunur, burada, herbir $1 \leq i \leq N-1$ indisi için

$$0 \leq ix_N \leq \frac{\pi(N-1)}{2N} < \frac{\pi}{2}, \ \cos(ix_N) > 0$$

ve ayrıca şunlar gözlenmiştir:

$$\begin{aligned} (N+i)\frac{\pi}{2N} &= \frac{\pi}{2} + ix_N \\ \sin\left((N+i)\frac{\pi}{2N}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + ix_N\right) = \cos(ix_N) , \\ \sin\left((3N+i)\frac{\pi}{2N}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + ix_N\right) = -\cos(ix_N) . \end{aligned}$$

Tüm bunlardan kolayca

$$R_n(x_N) \geq \frac{9}{10} - \frac{1}{2} + R_{4N}(x_N) = \frac{2}{5} + R_{4N}(x_N) > \frac{2}{5}$$

bulunacaktır. Son aşamada artık

$$R_{4N}(x_N) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=4Nn+1}^{k=4N(n+1)} \frac{\sin(kx_N)}{k}\right) > 0$$

göstermeliyiz; yukarda

$$S_n = \sum_{k=4Nn+1}^{k=4N(n+1)} \frac{\sin(kx_N)}{k} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçekleştiğine dikkat edilmiştir. Gerçekten $x_N = \frac{\pi}{2N}$ unutmadan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sin\left(\left(4Nn + 2N\right) x_N\right) = \sin\left(\left(2n+1\right)\pi\right) = 0\ ,$$
$$\sin\left(\left(4Nn + 4N\right) x_N\right) = \sin\left(\left(2n+2\right)\pi\right) = 0$$

geçerli ve üstelik kısalık amacıyla toplama katılan terimleri yazmadan

$$S_n = \sum_{k=4Nn+1}^{4Nn+N} + \sum_{k=4Nn+N+1}^{4Nn+(2N-1)} + \sum_{k=4Nn+2N+1}^{4Nn+3N} + \sum_{k=4Nn+3N+1}^{4Nn(n+1)-1}$$

bulunur, yukarda N terimden oluşan birinci ve üçüncü toplamlar sırasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4Nn+1}^{4Nn+N} \frac{\sin\left(kx_N\right)}{k} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\left(4Nn+i\right)\frac{\pi}{2N}\right)}{4Nn+i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(ix_N\right)}{4Nn+i} \\
\sum_{k=4Nn+2N+1}^{4Nn+3N} \frac{\sin\left(kx_N\right)}{k} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\left(4Nn+2N+i\right)\frac{\pi}{2N}\right)}{4Nn+2N+i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\left(2N+i\right)x_N\right)}{4Nn+2N+i} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(ix_N\right)}{4Nn+2N+i}
\end{aligned}$$

olup bunların toplamı

$$\begin{aligned}
&= 2N.\sum_{i=1}^{N} \sin\left(ix_N\right) \frac{1}{\left(4Nn+i\right)\left(4Nn+2N+i\right)} \\
&> 2N.\sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(ix_N\right)}{\left(4Nn+2N+i\right)^2} > 0
\end{aligned}$$

gerçekler, çünkü herbir $1 \leq i \leq N$ indisi için $0 < ix_N \leq \frac{\pi}{2}$ böylece $\sin\left(ix_N\right) > 0$ geçerlidir. Okuyucu S_n toplamında $N-1$ terimden oluşan ikinci ve dördüncü toplamların toplamınınsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=4Nn+N+1}^{4Nn+2N-1} \frac{\sin\left(kx_N\right)}{k} + \sum_{k=4Nn+3N+1}^{4N(n+1)-1} \frac{\sin\left(kx_N\right)}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos\left(ix_N\right)}{\left(4Nn+N+i\right)\left(4Nn+3N+i\right)} \\
&> \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\cos\left(ix_N\right)}{\left(4Nn+3N+i\right)^2} > 0
\end{aligned}$$

gerçeklediğini gözlemelidir. Tüm bunlardansa şu istenen sonuç bulunur:

$$\|R_n\|_I \geq \frac{2}{5} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad , \quad \underline{\lim} \|R_n\|_I \geq \frac{2}{5} \,.$$

Buna karşılık, ikinci fonksiyon serisi, $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ kapalı aralığında **düzgün yakınsar**. Gerçekten, tıpkı Abel bağıntısında yapıldığı gibi $B_k = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ olmak üzere

$$\sum_{k=n+1}^{N} a_k b_k = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (a_N B_N - a_n B_n) + \sum_{k=n}^{N-1} B_k (a_k - a_{k+1}) \quad (n < N)$$

eşitliği geçerli olduğundan, yine

$$B_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$$

olduğundan, herhangi $n \in \mathbb{N}$ ve $N > n$ için

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \cdot \sin kx = \left(\frac{B_N(x)}{N} - \frac{B_n(x)}{n} \right) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{B_k(x)}{k(k+1)}$$

ve böylece $N \to \infty$ için limit alarak

$$R_N(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = -\frac{B_n(x)}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k(k+1)},$$
$$|R_N(x)| \leq \frac{|B_n(x)|}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|B_k(x)|}{k(k+1)} \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{n} \right]$$

üstelik $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan

$$0 \leq \sup_{x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} |R_n(x)| \leq \frac{2}{\sin \frac{x}{2} \cdot n} \leq \frac{2}{\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$$

bulunur, çünkü her $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ için $\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ $(< \pi)$ ve sinüs fonksiyonu, $\delta > 0$ ne olursa olsun $[\delta, \pi - \delta]$ aralığında en küçük değerine δ ve $\pi - \delta$ noktalarında erişir (dikkat: $\sin(\pi - \delta) = \sin \pi \cdot \cos \delta - \cos \pi \cdot \sin \delta = -\cos \pi \cdot \sin \delta = \sin \delta$ unutmayın) kısacası her $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ için $0 < \sin \frac{\varepsilon}{2} \leq \sin \frac{x}{2}$ nedeniyle $\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$ yazılmıştır. O halde kolayca, istenen sonuç $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]} |R_n(x)| \right) = 0$ bulunur.
Siz aşağıdakini gösteriniz:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{2}{n \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$$

Üçüncü seri $(1,\infty)$ aralığında noktasal yakınsar ama düzgün yakınsayamaz, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in (1,\infty)$ için, $N > n$ ise aşağıdakiler

$$\sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| \geq |R_n(x_0)| = R_n(x_0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ell n(1+kx_0)}{kx_0^k} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ell n(1+kx_0)}{kx_0^k}$$

bulunur, bu eşitsizlikleri özel olarak $r_m = 1+\frac{1}{m} \in (1,\infty)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ rasyonel sayıları için yazarsak

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ell n(1+kr_m)}{kr_m^k} \leq \sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

olur, $m \to \infty$ için $r_m \to 1$ olduğundan, gerek N doğal sayısı gerekse sağ yukarıdaki supremum m doğal sayısından bağımsız olduğu için $m \to \infty$ için limit alıp

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ell n 2}{k} \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ell n(1+kr_m)}{kr_m^k} \leq \sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)|$$

eşitsizlikleri her $N > n$ için doğru olur, $N \to \infty$ için limit alıp

$$+\infty = \ell n 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \leq \sup_{x\in(1,\infty)} |R_n(x)| \leq +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur, bu sonuç $(1,\infty)$ aralığında fonksiyon serisinin düzgün **yakınsamadığını** söylemektedir. Üçüncü seri $[1+\varepsilon,\infty)$ aralığında düzgün yakınsar, çünkü her $x \in [1+\varepsilon,\infty)$ için $\frac{\ell n(1+nx)}{nx^n} \leq \frac{nx}{nx^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-1}$ ve sonuçta

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \tfrac{\ell n(1+kx)}{kx^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^{k} = r_n$$

ve $0 \leq \sup\limits_{x\in[1+\varepsilon,\infty)} R_n(x) \leq r_n \to 0$ nedeniyle istenen bulunur. Dördüncü seri her kapalı-sınırlı aralıkta, özellikle $M > 0$ ne olursa olsun $[-M, M]$ aralığında düzgün yakınsar, neden?

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2})$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\dfrac{1}{3^n x}$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell n(1+\dfrac{x^2}{n\ell n^2 n})$, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(n+x)}$ fonksiyon serileri için aynı soruyu çözünüz.

İlk seri $\mathbb{R}$ kümesinde noktasal yakınsar, düzgün yakınsayamaz, çünkü birinci fonksiyon serisinin kalan toplamları için

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\sin(2\pi\sqrt{k^2+x^2})\Big)^2 > \Big(\sin(2\pi\sqrt{m^2+x^2})\Big)^2 > 0$$

eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için geçerli, sonuçta $x_m = m$ alınarak $R_n(x) > \sin^2(2\pi\sqrt{m^2+m^2}) = \sin^2(2\sqrt{2}\pi m)$ bulunur, oysa sonsuz sayıda $m(> n)$ doğal sayısı için, ünlü Dirichlet Teoremiyle $\sin(2\sqrt{2}\pi m) > \dfrac{1}{2}$ gerçeklendiğinden (neden?) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} R_n(x) > \dfrac{1}{4}$ bulunarak $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \to 0$ olmadığı anlaşılır.

Oysa bu seri, $M > 0$ ne olursa olsun $[-M, M]$ aralığında düzgün yakınsar, çünkü

$$0 < \sin^2\left(2\pi\sqrt{n^2+x^2}\right) < \frac{4\pi^2 x^4}{n^4} \leq 4\pi^2 M^4 \cdot \frac{1}{n^4} (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-M, M])$$

olduğundan birazdan kanıtlanacak olan Weierstrass Teoremi kullanılır.

İkinci fonksiyon serisi $x \neq 0$ için anlamlı ve her $x \neq 0$ için yakınsaktır, çünkü $|\sin y| < y$ $(\forall y \in \mathbb{R}^+)$ bilgisiyle

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|2^n \cdot \sin\frac{1}{3^n x}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left|\sin\frac{1}{3^n x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n < +\infty \quad (\forall x \neq 0)$$

nedeniyle bu seri mutlak yakınsak ve sonuçta yakınsaktır, oysa bu seri değil $(0,\infty)$ aralığında $(0,1)$ aralığında bile **düzgün yakınsayamaz**, çünkü bu andan itibaren $(0,1)$ aralığında çalıştığımızı unutmadan

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \|R_n\| = \sup_{x\in(0,1)} |R_n(x)| \geq \frac{4}{3\pi}$$

gerçekleşir, çünkü $q_n = \dfrac{2}{3^n\pi}$ irrasyonel ve $r_n = \dfrac{1}{3^n}$ rasyonel sayıları aracılığıyla, herbir $x \in (q_n, 1) \subseteq (0,1)$ gerçel sayısı ve herbir $k > n$ doğal sayısı için $q_n = \dfrac{2}{3^n\pi} < x < 1$ nedeniyle $0 < \dfrac{1}{3^k x} < \dfrac{1}{3^n x} < \dfrac{\pi}{2}$ böylece $0 < \sin\left(\dfrac{1}{3^k x}\right) < 1$ $(\forall k > n)$ gözleyerek, aşağıdaki pozitif terimli yakınsak toplam için

$$\sup_{x\in(0,1)} |R_n(x)| \geq \sup_{x\in(q_n,1)} |R_n(x)| = \sup_{x\in(q_n,1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k \sin\left(\frac{1}{3^k x}\right)$$

$$\geq \sup_{x\in(q_n,1)} 2^{n+1}\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}x}\right) \geq 2^{n+1}\left(\frac{2}{3^{n+1}r_n}\right)$$

bulunur, çünkü $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\left(\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ fonksiyonu için $\varphi'(x) \leq 0$ $\left(\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ olduğundan $\varphi(\dfrac{\pi}{2}) \leq \varphi(x)$ böylece aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \qquad \left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

sonuçta $r_n \in (q_n, 1) \subseteq \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$$\sup_{x\in(q_n,1)} 2^{n+1}\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}x}\right) \geq 2^{n+1}\sin\left(\frac{1}{3^{n+1}r_n}\right) \geq 2^{n+1}\sin\left(\frac{1}{3}\right) > 2\cdot\frac{2}{3\pi} = \frac{4}{3\pi}$$

bulunur. Demek ki $I = (0,1)$ aralığında çalışılırsa $\underline{\lim}\|R_n\|_I \geq \dfrac{4}{3\pi}$ nedeniyle, yukarıdaki seri $I = (0,1)$ aralığında böylece $(0,\infty)$ aralığında düzgün yakınsamaz. Oysa bu seri *her* $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = [\varepsilon, \infty)$ aralığında düzgün yakınsar, çünkü her $x \in A_\varepsilon$ için $\varepsilon \leq x = |x|$ böylece

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| 2^k \sin\left(\frac{1}{3^k x}\right)\right| \leq \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \delta_n$$

ve sonuçta $0 \leq \|R_n\|_{A_\varepsilon} < \delta_n$ $(\forall \in \mathbb{N})$ ve $\delta_n \downarrow 0^+$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_n\|_{A_\varepsilon} = 0$ bulunur, buysa istenendir. Üçüncü fonksiyon serisi pozitif terimlidir ve

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell n\left(1 + \frac{x^2}{k\ell n^2 k}\right) > \ell n\left(1 + \frac{x^2}{(n+1)\ell n^2(n+1}\right) \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+\right)$$

ve böylece aşağıdaki bulunarak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,\infty)} R_n(x) &\geq \sup_{x\in(0,\infty)} \ell n\left(1 + \frac{x^2}{(n+1)\cdot \ell n^2(n+1)}\right) > \ell n\left(1 + \frac{(n+1)^2}{(n+1)\ell n^2(n+1)}\right)\\ &= \ell n\left(1 + \frac{(n+1)}{\ell n^2(n+1)}\right) > \ell n\frac{10}{9} > 0\end{aligned}$$

üçüncü serinin $(0,\infty)$ aralığında düzgün yakınsayamadığı anlaşılır, burada dikkat edilirse $\ell n(n+1) < \ell n(1+\sqrt[3]{n})^3 = 3\ell n(1+\sqrt[3]{n}) < 3\sqrt[3]{n}$ **ve** $\ell n^2(n+1) < 9\sqrt[3]{n^2}$ **ve** $\dfrac{n+1}{\ell n^2(n+1)} > \dfrac{n}{9\sqrt[3]{n^2}} = \dfrac{n^{1/3}}{9} \geq \dfrac{1}{9} > 0$ gözlenmiştir. Üçüncü seri, $M > 0$ ne olursa olsun $[-M, M]$ aralığında düzgün yakınsar, bunu gösterebilmelisiniz.

Sonuncu seri $[0, M]$ aralığında düzgün yakınsar oysa $[0,\infty)$ aralığında düzgün yakınsayamaz, çünkü $n < N$ gerçekleyen doğal sayı çifti ve $M > 0$ pozitif sabiti ne olursa olsun

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{M}{k\,(k+M)} < R_n\,(M) < \sup_{x\in[0,\infty)} R_n\,(x)$$

geçerli olduğundan (neden?) , önce $M \to \infty$ limiti alınıp $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \leq \sup\limits_{x\in[0,\infty)} R_n\,(x)$ ve sonra $N \to \infty$ limiti alınıp $+\infty = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \leq \sup\limits_{x\in[0,\infty)} R_n\,(x)$ sonucu bulunur.

Şimdi sırada çok kullanışlı üç tane , düzgün yakınsama üzerine yeterlik bildiren teorem var. Bu teoremlerde *ise* koşuluna dikkat ediniz.

Teorem 8 (Weierstrass): A kümesinde tanımlı $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ koşulunu gerçekliyor *ise* A kümesinde düzgün yakınsaktır.

Kanıtlama: Her $x \in A$ için $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| = r_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur, çünkü $|f_k(x)| \leq \sup\limits_{x\in A} |f_k(x)| = \|f_k\|$ geçerlidir. Fakat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ serisi yakınsak olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ ve $0 \leq \sup\limits_{x\in A} |R_n(x)| \leq r_n \to 0$ nedeniyle $\|R_n\| = \sup_{x\in A} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| = \sup_{x\in A} |R_n(x)|$ olmak üzere $\|R_n\| \to 0$ bulunur.

Sonuç 4: A kümesinde tanımlı $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi c_n'ler sabit olmak üzere eğer $|f_n(x)| \leq c_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ gerçekliyor ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi yakınsıyor *ise* düzgün yakınsaktır.

Kanıtlama: Hipotezler altında $0 \leq \|f_n\| \leq c_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ serisi yakınsak olduğundan önceki teorem kullanılır.

Örnekler 7: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ fonksiyonu bir önceki sonuç nedeni ile *tüm* $\mathbb{R}$ *kümesinde düzgün yakınsar*, çünkü $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ alınırsa $0 \leq |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2} = c_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} (= \zeta(2))$ serisinin yakınsaklığını gözlemek yeterlidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n|x|}}$$

fonksiyon serileri benzer niteliktedir. $[-M, M]$ aralığında düzgün yakınsayan neredeyse tüm fonksiyon serileri için yine yukarıdaki sonuç kullanılır. Bu arada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2(x^n + \frac{1}{x^n})}{\sqrt{n!}}$ fonksiyon serisi her $\varepsilon > 0$ ve $M > \varepsilon$ için $[-M, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, M]$ kümesinde düzgün yakınsar, çünkü $c_n = \dfrac{2\left(M + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n . n^2}{\sqrt{n!}}$ alınır.

Not: Teorem 8 çoğunlukla **Weierstrass $M-$Ölçütü** (=*Büyükçe (majorant) Ölçütü*) olarak bilinir.

Sırada Dirichlet ve Abel'in yeter koşulları var:

Teorem 9 (Dirichlet Yeterlik Teoremi): $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları gerçekliyor *ise* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsar.

i) $\forall x \in A$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tekdüzedir,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$,

iii) $\exists M > 0$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$.

Kanıtlama: $i)$ koşulu altında $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ fonksiyon serisi A *kümesinde düzgün yakınsadığı* için, bir sonraki **Önerme 4** kullanılır ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsadığı çıkarsanır. Gerçekten sözü edilen ilk seri için, $i)$ hipotezi nedeniyle,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \pm f_{n+1}(x) \quad (\forall x \in A\ ,\ \forall n \in \mathbb{N})$$

olur, sözgelimi $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tekdüze azalmayan, yani $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için

$0 \leq f_{k+1}(x) - f_k(x)$ böylece bu durumda $R_n = -f_{n+1}(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ olur, çünkü

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{N} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} (((f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)) + (f_{n+3}(x) - f_{n+2}(x)) + \ldots + (f_{N+1}(x) - f_N(x)))) \\
&= \lim_{N\to\infty} (f_{N+1}(x) - f_{n+1}(x)) = \left(\lim_{N\to\infty} f_{N+1}(x) \right) - f_{n+1}(x) = 0 - f_{n+1}(x) \\
&= -f_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

bulunur, çünkü

$$0 \leq |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x)| = \|f_n\| \; (\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$$

ve $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \lim_{N\to\infty} f_{N+1}(x)$ geçerlidir, eğer $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tekdüze artmayansa yani $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ ise bu kez $R_n(x) = f_{n+1}(x)$ olur. Sonuçta $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \|f_{n+1}\|$ $(\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N})$ ve böylelikle $\|R_n\| = \sup_{x\in A} |R_n(x)| \leq \|f_{n+1}\| \to 0$ olduğundan bu sonuç $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsadığını söylediği için, aşağıdaki önerme kullanılır, istenen sonuç çıkarsanır.

Önerme 4: $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar geçerli ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsar:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsar.

ii) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$,

iii) $\exists M > 0, \left| \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$.

Not: Bu önerme aslında Dirichlet Teoremi'nden daha sonra, onu biraz olsun genelleştimek amacıyla verilmiştir.

Kanıtlama: Verilen hipotezler altında $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisinin kalan toplamları için şunlar geçerlidir:

Kısalık amacıyla $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ yazılırsa *iii)* koşulu nedeniyle $|G_n(x)| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ gözleyip genelleştirilmiş Abel bağıntısıyla

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).g_k(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} f_k(x).g_k(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(f_N(x).G_N(x) - f_n(x).G_n(x) \right) + \left(\sum_{k=n}^{\infty} G_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) \right) \\ &= \left(\sum_{k=n}^{\infty} G_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) \right) - f_n(x).G_n(x) \end{aligned}$$

bulunur, çünkü $\{G_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi *sınırlı*, oysa $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$ nedeniyle, $\forall x \in A$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi böylelikle $\{f_n(x).G_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsar. Böylece $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x)G_N(x) = 0$ olur ve

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |G_k(x)| \, . \, |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_{n+1}(x)| \, . \, |G_n(x)| \\ &\leq M. \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_{n+1}(x)| \right] \\ &\leq M. \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + \|f_{n+1}\| \right] \end{aligned}$$

ve sonuçta $0 \leq \|R_n\| = \sup\limits_{x\in A} |R_n(x)| \leq M.\sup\limits_{x\in A} \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + \|f_n\| \right)$ olur, sağ yanı hipotezler nedeni ile $n \to \infty$ için sıfıra yakınsadığından $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisinin kalan toplamları $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_n\| = 0$ gerçeklediğinden, sözü edilen serinin A kümesinde düzgün yakınsadığı anlaşılır.

Sonuç 5: Eğer aşağıdakiler geçerli *ise* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.f_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsar:

i) $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$

Kanıtlama: $g_n(x) = (-1)^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ alarak Dirichlet Teoremi kullanılır, çünkü $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ gözleyiniz, çünkü dikkat edilirse $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) = \begin{cases} 0; & n \text{ çift ise} \\ 1; & n \text{ tek ise} \end{cases}$ geçerlidir.

Örnekler 8: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 + x^2} + x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sin x}$ fonksiyon serilerinin tüm $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm: Hepsi için, yukarıdaki Sonuç kullanılır, Örneğin

$f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2}$ için $n + 1 + x^2 > n + x^2 > 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n + 1 + x^2} \leq \dfrac{1}{n + x^2} = f_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\dfrac{1}{n+x^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ olur. Benzer biçimde ikinci seri için $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}+x^2}$ alınırsa
$(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \sqrt{(n+1)^2+x^2} > \sqrt{n^2+x^2} \Rightarrow$
$\sqrt{(n+1)^2+x^2}+x^2 > \sqrt{n^2+x^2}+x^2 \Rightarrow f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+x^2}+x^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}+x^2} = f_n(x),$
$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, üçüncü seri için $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sin x}$
$(\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R})$ yazılırsa

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \leq \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \text{ ve } 0 < f_n(x) \text{ ve } \sqrt{n+1}+\sin x \leq \sqrt{n+2}+\sin x$$

nedeniyle $0 < f_{n+1}(x) < f_n(x)$ $(\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R})$ ve ayrıca $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sin x}\right) = \dfrac{1}{\inf\limits_{x\in A}(\sqrt{n+1}+\sin x)}$
$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} \to 0$ yani $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = 0$ bulunur.
Burada, gerekli olduğundan şu temel bilgiyi verelim:

Bilgi: Eğer φ gerçel değerli fonksiyonu için $\inf\limits_{x\in A}\varphi(x) > 0$ **ise** $\sup\limits_{x\in A}\dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{1}{\inf\limits_{x\in A}\varphi(x)}$ eşitliği geçerlidir.
(Dikkat: eğer $\inf\limits_{x\in A}\varphi(x) = 0$ ise $\sup\limits_{x\in A}\frac{1}{\varphi(x)} = +\infty$ geçerlidir). Gerçekten kısalık amacıyla $\inf\limits_{x\in A}\varphi(x) = \alpha_0$ yazılırsa, hipotez gereği $0 < \alpha_0$ ve infimum tanımı gereği $\alpha_0 \leq \varphi(x)$ $(\forall x\in A)$ bulunur. Üstelik
Koş: $\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \dfrac{1}{\alpha_0} - \varepsilon < \dfrac{1}{\varphi(x_\varepsilon)}$ koşulu gerçekleşir, gerçekten eğer $\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon \leq 0$ ise $\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon \leq 0 < \frac{1}{\varphi(x)}$ $(\forall x\in A)$ nedeniyle herhangi bir $x_0 \in A$ seçilerek $\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon < \frac{1}{\varphi(x_0)}$ bulunur; yok eğer $0 < \frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon$ ise $0 < \varepsilon < \frac{1}{\alpha_0}$ ve $\varepsilon\alpha_0 < 1$ ve $0 < \alpha_0 < \frac{\alpha_0}{1-\varepsilon\alpha_0}$ böylece infimum tanımı gereği

$$\exists\delta_\varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ \varphi(x_\varepsilon) < \alpha_0 + \delta_\varepsilon < \frac{\alpha_0}{1-\varepsilon\alpha_0}$$

ve sonuçta $0 < \alpha_0 < \varphi(x_\varepsilon)$ unutmadan bölme yaparak $\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon\alpha_0}{\alpha_0} < \frac{1}{\varphi(x_\varepsilon)}$ istenen sonucuna ulaşılır, yani yukarıdaki **Koş** koşulu yerine gelmiş olur. Tüm bunlar $\frac{1}{\inf\limits_{x\in A}\varphi(x)} = \sup\limits_{x\in A}\frac{1}{\varphi(x)}$ eşitliğini verir. Bu bilgi nedeniyle

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sin x}\right) = \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}(\sqrt{n+1}+\sin x)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$$

elde edilir.

2) Aşağıdaki serilerin yanlarındaki kümede düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^2x\sin nx}{n+x^2},\quad A=\mathbb{R}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx\arctan nx}{n},\quad I_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^x},\quad A=[\varepsilon,\infty)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}},\quad A=[0,\infty)$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\dfrac{\sin(nx)}{n(n+x)},\quad A=[0,M]\ (M>0)$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n\big(\ln(\sqrt{n+1}+x)\big)},\quad A=[0,M]\ (M>0).$

Çözüm: Hepsi için , Dirichlet Teoremi kullanılır. örneğin birinci fonksiyon serisi için $f_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$, $g_n(x)=\sin n^2x\sin nx$ alınırsa $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(x)\right|\le 1\ (\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R})$ gözlenir, çünkü

$$\begin{aligned}2.\left|\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin k^2x\sin kx\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\big(\cos(k-1)kx-\cos k(k+1)x\big)\right|\\ &= |\cos 0x-\cos n(n+1)x|\le 2\end{aligned}$$

ve her $n\in\mathbb{N}$ için $0<f_{n+1}(x)<f_n(x)$ ve $\|f_n\|=\frac{1}{n}$ geçerlidir.

Şimdi ikinci fonksiyon serisi ile uğraşalım.

Bu seri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\left(\arctan nx-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ serisine eşit olup burada toplama katılan her iki seri de $I_\varepsilon=[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ kapalı aralığında düzgün yakınsar ikincisi bilindiğinden birincisinin düzgün yakınsaklığı gösterilmelidir, oysa Abel bağıntısı ve $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{(k+1)}\right)+\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}$ nedeniyle $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{B_k(x)}{k(k+1)}+\dfrac{B_n(x)}{n}\right|\le\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\dfrac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ olduğundan Dirichlet Teoremi kullanılırsa $f_n(x)=\arctan nx-\dfrac{\pi}{2}$ ve $g_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I_\varepsilon)$.alınarak $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(x)\right|\le\dfrac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}=M$ olur ve arctanjant artan olduğundan $f_n(x)<f_{n+1}(x)<0\ (\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I_\varepsilon)$ ve $\|f_n\|=\sup\limits_{x\in I_\varepsilon}|f_n(x)|=\sup\limits_{x\in I_\varepsilon}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan nx\right)=\dfrac{\pi}{2}-\inf\limits_{x\in I_\varepsilon}(\arctan nx)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan n\varepsilon\to 0$ olur, çünkü iyi bilindiği gibi her $a>0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan na=\dfrac{\pi}{2}$ geçerlidir.

O halde yukarda toplanan her iki fonksiyon serisi de I_ε aralığında düzgün yakınsadığından toplamları da düzgün yakınsar (neden?). Üçüncüsünü de Dirichlet Teoremi ile çözelim.

Gerçekten Dirichlet Teoremini uygulayabilmek için $f_n(x)=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n+1}+x)}$ ve $g_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$ alıp $0\le f_{n+1}(x)\le f_n(x)\ (\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,M])$ gözleyerek ve f_n azalan bir fonksiyon olduğundan $\|f_n\|=f_n(0)=\dfrac{2}{\ln(n+1)}\to 0$ bulunur. Ayrıca

$$\left|\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|<5\sqrt{\pi}\ \ (\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R})$$

gösterilmelidir. Bu eşitsizliği $[-\pi,\pi]$ aralığında göstermek yeterlidir, (neden?), oysa g_k fonksiyonları tek fonksiyon ve $\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(-x)=(-1)\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(x)$ gerçeklendiğinden aslında $[0,\pi]$ aralığında göstermek yeterlidir. Bu eşitsizlik $x = 0$ ve $x = \pi$ için apaçıktır, şimdi $x \in (0, \pi)$ alınıp $0 < \frac{\sqrt{\pi}}{x}$ gözlenip $n_x = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right] + 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{x} \geq 0$ tanımlanırsa şunlar bulunur: $n_x \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{x} + 1 = \dfrac{\sqrt{\pi} + x}{x}$ böylece $x < \pi < 2\sqrt{\pi}$ unutmadan $x \cdot n_x < \sqrt{\pi} + x < 3\sqrt{\pi}$, üstelik $|\sin y| \leq |y|$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ nedeniyle , eğer $n \leq n_x$ ise

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\sin kx}{k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{k} = n.x \leq n_x.x \leq 3\sqrt{\pi}$$

olur, buna karşılık eğer $n_x < n$ ise

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \left|\sum_{k \leq n_x} \frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=n_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq 3\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi}$$

bulunur, çünkü her $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\frac{2y}{\pi} \leq \sin y$ olduğundan (dikkat: bu son eşitsizlik $y = 0$ için apaçıktır ve $y \in (0, \frac{\pi}{2}]$ için $\varphi(y) = \frac{\sin y}{y}$ fonksiyonu $\varphi'(y) \leq 0$ gerçeklediğinden tekdüze artmayandır ve böylece $\dfrac{2}{\pi} = \varphi(\frac{\pi}{2}) \leq \varphi(y) = \dfrac{\sin y}{y}$ bulunur), sonuçta $0 < \frac{x}{\pi} \leq \sin\frac{x}{2}$ $(\forall x \in (0, \pi))$ ve böylece $\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \dfrac{\pi}{x}$ $(\forall x \in (0, \pi))$ olur üstelik $\dfrac{\sqrt{\pi}}{x} < n_x$ ve $\dfrac{1}{n_x} < \dfrac{x}{\sqrt{\pi}}$ geçerlidir. O halde $n < N$ ve $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ne olursa olsun geçerli olan

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{2}{n_x \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

eşitsizliğinden yararlanarak $\left|\sum\limits_{k=n_x+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \dfrac{2}{n_x \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)} < \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}}.\dfrac{\pi}{x} = 2\sqrt{\pi}$ $(\forall x \in (0, \pi))$ bulunarak yukarıdakiler elde edilir. Böylece $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tekdüzeliği $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(x)\| = 0$ ve $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)\right| < 5\sqrt{\pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \infty))$ nedeni ile Dirichlet Teoremi uygulanarak istenen bulunur, bitti.

Teorem 10 (Abel Yeterlik Teoremi): $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları **eğer**

i) $\forall x \in A$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tekdüzedir,

ii) $\exists M > 0, |f_n(x)| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$,

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsaktır.

koşullarını gerçekler ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsaktır.

Kanıtlama: Bir sonraki önermeden elde edilir (nasıl?)

Önerme 5: $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları eğer

i) $\sup\limits_{x \in A} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|\right) < +\infty$

ii) A kümesinde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsar.

iii) $\exists M > 0, |f_1(x)| \leq M$ $(\forall x \in A)$

koşullarını gerçeklerse $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsaktır.

Kanıtlama: Kısalık amacıyla $M^* = \sup\limits_{x\in A}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x) - f_n(x)|\right)$ yazarsak her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x)| \le M^* + M = M^{**}$ bulunur, çünkü,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1}(x) - f_k(x)) + f_1(x)$$

ve böylece

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\le \sum_{k=1}^{n-1}|f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_1(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| + M \\ &\le \sup_{x\in A}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x) - f_n(x)|\right) + M = M^* + M = M^{**}\end{aligned}$$

bulunur. O halde $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ ve $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$yazarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ serisinin kalan toplamları için, aşağıdakiler bulunur:

$$\sum_{k=n+1}^{N} f_k(x).g_k(x) = f_N(x).G_N(x) - f_n(x).G_n(x) + \sum_{k=n}^{N-1} G_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right)$$
$$= f_N(x).\left(G_N(x) - g(x)\right) + f_n(x).\left(g(x) - G_n(x)\right) + \sum_{k=n}^{N-1}\left(\left(G_k(x) - g(x)\right).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right)\right)$$

çünkü dikkat edilirse aşağıdakiler geçerlidir:

$\sum\limits_{k=n}^{N-1} G_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) = \sum\limits_{k=n}^{N-1}\left(G_k(x) - g(x)\right).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) + g(x).\sum\limits_{k=n}^{N-1}\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right)$
$= \sum\limits_{k=n}^{N-1}\left(G_k(x) - g(x)\right).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right) + g(x).\left(f_n(x) - f_N(x)\right)$

O halde her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için $h_n(x) = G_n(x) - g(x)$ yazılırsa $\sup\limits_{x\in A}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)\right| = M_n \to 0$ unutmadan $|h_n(x)| = |G_n(x) - g(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)\right|$ ve böylece $\|h_n\| = \sup\limits_{x\in A}|h_n(x)| \le \sup\limits_{x\in A}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)\right| = M_n$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to\infty}\|h_n\| = 0$ bulunur. Sonuçta $0 \le \lim\limits_{N\to\infty}|h_N(x).f_N(x)| \le \lim\limits_{n\to\infty}(\|h_n\|.M^{**}) = 0$ ve üstelik

$R_n(x) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{N} f_k(x).g_k(x) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(f_N(x)h_N(x) - f_n(x).h_n(x) + \sum\limits_{k=n}^{N-1} h_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right)\right)$
$= -f_n(x).h_n(x) + \sum\limits_{k=n}^{\infty} h_k(x).\left(f_k(x) - f_{k+1}(x)\right)$

olur. Oysa $\lim\limits_{n\to\infty}\|h_n\| = 0$ nedeniyle $0 \le \|h_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2(M^{**}+1)}$ $(\forall n \ge n_0)$ olduğundan her $n \ge n_0$ için aşağıdaki toplamda $k \geq n+1 > n \geq n_0$ ve

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq |f_n(x)| \,.\, |h_n(x)| + \sum_{k=n}^{\infty} |h_k(x)| \,.\, |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \\
&\leq \|f_n\| \,.\, \|h_n\| + \sum_{k=n}^{\infty} \|h_k\| \,.\, |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \\
&\leq M^{**}.\frac{\varepsilon}{2(M^{**}+1)} + \frac{\varepsilon}{2(M^{**}+1)} \sup_{x\in A} \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

olur, çünkü $\sup\limits_{x\in A} \sum\limits_{k=n}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq \sup\limits_{x\in A} \left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| \right) = M < M^{**}$ olmaktadır.

O halde $0 \leq \|R_n\| = \sup\limits_{x\in A} |R_n(x)| \leq \varepsilon \, (\forall n \geq n_0)$ kısacası $\|R_n\| \to 0$ bulunur, buysa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x).g_n(x)$ fonksiyon serisinin A kümesinde düzgün yakınsaması demektir.

Uyarı: Abel Teoremi Artık Önerme 5 dan kolayca elde edilir, çünkü Abel teoremindeki $i)$ ve $ii)$ koşulları gerçekleniyorsa

$$\sup_{x\in A} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \right) \leq 2M < +\infty$$

bulmak kolaydır, örneğin $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tekdüze dizisi azalmayansa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

$$= \overline{\lim} \sum_{k=1}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) = \overline{\lim} \, (f_{n+1}(x) - f_1(x)) = \overline{\lim} \, |f_{n+1}(x) - f_1(x)|$$

$$\leq \overline{\lim} \, (|f_{n+1}(x)| + |f_1(x)|) \leq 2M \text{ olur.}$$

Örnekler 9: 1) Pozitif terimli olması **gerekmeyen** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi eğer yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsar.

Çözüm: Öncelikle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsadığından $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ kalan toplamlarının $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ gerçeklediği gözlenmelidir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = a_n$ tanımlanırsa $|f_n(x)| = |x|^n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A)$ olur. Bu fonksiyonlar apaçık biçimde Abel Teoreminin $i)$, $ii)$ ve $iii)$ koşulunu gerçekler çünkü $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)$ toplamı x değişkenine bağlı olmayan $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$ kalan toplamı olduğundan $\sup\limits_{x\in A} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| = |R_n| \to 0$ olmaktadır. O halde Abel teoremi nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ fonksiyon serisi $[0,1]$

aralığında düzgün yakınsar. Bu şıktaki gerçeğe **Abel Toplanabilme Teoremi** denilir, çünkü $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1)$ olur, burada $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ $(\forall x \in [0,1])$ yazılmıştır.

2) Aşağıdaki fonksiyon serilerinin yanlarında yazılı kümelerde düzgün yakınsadığını gösteriniz:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \arctan nx, \quad A = \mathbb{R}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cos\frac{x}{n}}{\sqrt{n+1}+\cos x}, \quad A = [-M, M]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad A = [0, \infty)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n n^x}, \quad A = [0, \infty)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-nx}, \quad A = [0, \infty)$

Hepsi Abel Teoremi nedeni ile düzgün yakınsaktır. Birinci seride $g_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ alınırsa, arctangent artan ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ fonksiyon serisi Örnek 8.1) de kanıtlandığı gibi $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsak olduğundan, $|\arctan y| \leq \frac{\pi}{2}(\forall y \in \mathbb{R})$ nedeniyle Abel Toremindeki tüm koşullar yerine gelir. İkinci seri için, tıpkı Örnek 8.1)'de yapıldığı gibi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\cos x}$ serisi tüm $\mathbb{R}$ kümesinde, bu arada $[0, M]$ aralığında düzgün yakınsar ve Arşimet İlkesiyle $2M < n_0\pi$ gerçekleyen $n_0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq n_0$ ve $x \in (0, M]$ için $0 < \dfrac{x}{n+1} < \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{x}{n_0} \leq \dfrac{M}{n_0} \leq \dfrac{\pi}{2}$ ve cosinüs $(0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında azalan olduğundan, $g_n(x) = \cos\frac{x}{n}$ fonksiyonu için $0 \leq g_n(x) = \cos\frac{x}{n} \leq \cos\frac{x}{n+1} = g_{n+1}(x)$ $(\forall n \geq n_0)$ olur, bu eşitsizlikler $x = 0$ için apaçıktır, böylece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cos\frac{x}{n}}{\sqrt{n+1}+\cos x}$ fonksiyon serisi $[0, M]$ aralığında ve böylece $[-M, 0]$ aralığında ve sonuçta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cos\frac{x}{n}}{\sqrt{n+1}+\cos x}$ fonksiyon serisi $[-M, M]$ aralığında Abel Teoremi nedeni ile düzgün yakınsar.

3) Abel Teoremini kullanarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(nx)}{n^2+x^2}$ fonksiyon serisinin $I_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ aralığında düzgün yakınsadığını kanıtlayınız.

Çözüm: Bu fonksiyon serisini $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} . \frac{\sin(nx)}{n}$ biçimde yazıp her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ ve $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ alırsak $0 \leq f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} \leq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+x^2} = f_{n+1}(x) \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1])$ gözleyip üstelik $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ serisinin I_ε aralığında düzgün yakınsadığını hatırlayacak olursak, Abel teoremi nedeniyle çözüm biter.

Aşağıdaki teorem gerçi Teorem 1 i)'den kolayca elde edilir ama biz bağımsız bir kanıtlama verelim:

Teorem 11 : $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları sürekli, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi A kümesinde düzgün yakınsak ise $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in A)$ toplam fonksiyonu A kümesinde süreklidir.

Kanıtlama: $x_0 \in A$ alınsın. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$,$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ve $x \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ göstermek istiyoruz. Düzgün yakınsaklık nedeniyle $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ için $\|R_n\| = \sup\limits_{x \in A} |R_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ ve böylelikle, uygun bir $\delta_\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ise $f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{n_\varepsilon} (f_n(x) - f_n(x_0)) + \sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x) - \sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_n(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{n_\varepsilon} (f_n(x) - f_n(x_0)) + R_{n_\varepsilon}(x) - R_{n_\varepsilon}(x_0)$ böylece

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} |f_n(x) - f_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)| < \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} |f_n(x) - f_n(x_0)| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

istenen sonnucu bulunur, çünkü herbir $n \leq n_\varepsilon$ indisi için f_n fonksiyonlarının herbiri $x_0 \in A$ noktasında sürekli olduğundan $\exists \delta_{n,\varepsilon} > 0, |x - x_0| < \delta_{n,\varepsilon}$ ve $x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3(n_\varepsilon + 1)}$ olduğundan gelişigüzel bir $0 < \delta_\varepsilon = \min\{\delta_{1,\varepsilon}, \delta_{2,\varepsilon}, ..., \delta_{n_\varepsilon,\varepsilon}\}$ seçilirse $0 < \delta_\varepsilon < \delta_{n,\varepsilon} (n \leq n_\varepsilon)$ olduğundan $|x - x_0| < \delta_\varepsilon (< \delta_{n,\varepsilon}) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3(n_\varepsilon + 1)}$ ve böylelikle aşağıdaki bulunarak, istenen elde edilir.

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{n_\varepsilon} |f_n(x) - f_n(x_0)| < n_\varepsilon . \dfrac{\varepsilon}{3(n_\varepsilon + 1)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Daha kısa bir kanıtlama: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ yazıp $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k = f - s_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gözleyip $\|f - s_n\|_A = \|R_n\|_A$ yani $f \overset{d}{=} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ bulunur ve Teorem 1i) uygulanır.

Sonuç 6: $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları sürekli, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak ise $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ $(\forall x_0 \in [a, b])$ olur.
Bu bir önceki teoremden elde edilir (nasıl?)

Örnekler 10:
1) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n = \ell n\, 2 = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ gösterin.

Çözüm: Leibniz Teoremi'ni anımsayalım: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif terimli serisi azalarak sıfıra yakınsarsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ almaşık serisi yakınsaktır.

[Gerçekten $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kısmi toplamları yakınsar, çünkü $0 < s_{2n} < s_{2n+2} < ... < s_{2n+1} < s_{2n-1} \leq s_1 = a_1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklenir, çünkü $0 < a_{n+1} < a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle toplama katılan parantezler pozitif olduğundan $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0$ ve $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > s_{2n}$ geçerlidir, buna karşılık $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < s_{2n-1} \leq s_1 = a_1$, olduğundan, artan ve üstten sınırlı $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ile azalan ve s_2 ile alttan sınırlı $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır, üstelik limitleri aynıdır, çünkü $|s_{2n+1} - s_{2n}| = s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ geçerlidir, bu nedenle $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsar, çünkü iyi bilindiği gibi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi, ancak ve yalnız $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ gerçeklenirse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ gerçekler.] O halde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ yakınsaktır ve Örnek 9.1) nedeniyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ kuvvet serisi $[0, 1]$ aralığında düzgün yakınsar ve yukarıdaki sonuç nedeniyle

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.x^n=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ell n\, 2$$

olur, çünkü ileride gösterileceği gibi

$$\ell n(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.x^n \qquad (\forall x\in(-1,1])$$

geçerlidir. İkinci fonksiyon serisi, sözgelimi $[\frac{1}{2},\infty)$ ve böylece $[\frac{1}{2},1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan, bir önceki sonuç kullanılır.

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=1=\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$ gösterin.

Çözüm: İkinci seri için bir önceki Sonuç'u kullanın . İlk seri ise bir Analiz I sorusudur, çünkü her $x\in[0,1)$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=(1-x)\dfrac{x}{(1-x)}=x$ oysa $x=1$ için apaçık biçimde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{n+1}\right)=0$ olur, dolayısıyla ilk fonksiyon serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsamaz, aksi halde toplam fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} x; & x\in[0,1)\\ 0: & x=1\end{cases}$ sürekli olması gerekirdi, oysa değildir. Fakat $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in[0,1)}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in[0,1)}}x=1$ olur.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ fonksiyon serisi nerede düzgün yakınsar?

Çözüm: Bu fonksiyon serisi $[\varepsilon,\infty)$ aralığında mutka ve düzgün yakınsar, Teorem 6 dan sonra gelen Sonuç'u kullanın. Bu fonksiyon serisi eğer $[0,\infty)$ aralığında düzgün yakınsasaydı $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ toplam fonksiyonu her $x\in[0,\infty)$ için tanımlı ve $f(x)\in\mathbb{R}(\forall x\in[0,\infty))$ olurdu, oysa $f(0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^{n.0}}=+\infty$ bulunurdu! Bu seri $(-\infty,0]$ aralığında noktasal ve dolayısyla düzgün yakınsayamaz (neden?). Ayrıca bkz. Sayfa56, Örnek4.

Önemli Not: Bazen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak serilerinin toplamını hesaplamada, aşağıdaki ünlü ve kullanışlı teorem çok işe yarar. Bu ünlü sonucu Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber 1897 yılında göstermiştir:

Tauber Toplanabilme Teoremi: Eğer aşağıdaki koşullar gerçeklenirse:

$i)$ $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ ise,

$ii)$ $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ kuvvet serisi $(-1,1)$ aralığında yakınsaksa,

$iii)$ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\ell$ limiti tanımlı ise

bu durumda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\ell$ geçerlidir, yani $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ toplamı hesaplanabilir.

İspat: Her zamanki gibi $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ yazarak kolayca her $x \in (-1, 1)$ için şunlar bulunur:

$$s_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 - x^k\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

ve bilindiği gibi, herbir $0 < a < 1$ için $1 - a^k = (1 - a)\left(1 + a + a^2 + ... + a^{k-1}\right) \leq k(1 - a)$ olduğundan, sonuçta

$$|s_n - f(x)| \leq (1 - x) \,.\, \sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| \;+\; \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, x^k$$

bulunur, oysa $i)$ hipotezi nedeniyle $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $0 \leq n\,|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ böylece $|a_k| \leq \frac{\varepsilon}{3k}$ $(\forall k \geq n_\varepsilon)$ olur. Herhangi bir $n > n_\varepsilon$ alındığında

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, x^k < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{3n\,(1 - x)}$$

bulunur. Özel olarak $r_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ rasyonel sayıları için $r_n \to 1$ ve $1 - r_n = \frac{1}{n}$ unutmadan

$$|s_n - f(r_n)| \leq \frac{1}{n} . \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| \;+ \frac{\varepsilon}{3}$$

bulunur. Oysa $\lim\limits_{n\to\infty} n\,|a_n| = 0$ olduğundan, bu son dizinin aritmetik ortalamalar dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} . \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| \right) = 0$$

olduğundan, sonuçta tüm bu bildiler nedeniyle, yeteri büyük herbir n doğal sayısı için

$$|s_n - \ell| \leq |s_n - f(r_n)| + |f(r_n) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f(r_n) - \ell| < \varepsilon$$

bulunur, buysa aşağıdaki istenen sonucu verir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \ell .$$

Şimdi de fonksiyon serilerinde türetilmeye ve tümlevlenebilmeye ilişkin bilgileri edinelim.

Önerme 6: Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları türetilebilir olsun. Eğer

$i)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ fonksiyon serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak

$ii)$ $\exists x_0 \in [a, b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ serisi yakınsak koşulları gerçeklenirse $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ fonksiyon serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve üstelik aşağıdaki geçerlidir:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \; (\forall x \in [a, b])$$

Kanıtlama: Her $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ omak üzere önerme 3'deki tüm koşulları gerçekleyen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ türetilebilir fonksiyonlar dizisine, her $x \in [a, b]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ olduğu ve hipotez gereği $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0)$ limiti var olduğundan, Önerme 3 uygulanarak istenenler elde edilir.

Örnekler 11:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(nx^2\right)}{n^3+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\arctan \frac{x}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ fonksiyon serilerinin toplam fonksiyonlarının nerede türetilebilir olduğunu belirleyin.

Çözüm: Birinci serinin hem kendisi ve hem de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+x^2}\right)' = (-1) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{\left(n^2+x^2\right)^2}$ fonksiyon serisi tüm $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsaktır ve bir önceki önermeyle $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{\left(n^2+x^2\right)^2}$ olur. İkinci seri içinde benzer şeyler geçerlidir. Üçüncü seride $g_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ yazılırsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin nx}{n^2+1}$ fonksiyon serisi sözgelimi $[0, \frac{\pi}{6}]$ aralığında düzgün yakınsayamaz. Çünkü dikkat edilirse Abel bağıntısı kullanılırsa her $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.\sin nx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}.\sin kx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^2+n-1\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\left(n^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)}\right]$$

geçerli olup, burada köşeli parantez içinde yazılı fonksiyon serisi $\mathbb{R}$ kümesinde düzgün yakınsar, çünkü apaçık biçimde $n^2+n-1 < (n+1)^2+1$ ve

$$\left|\frac{\left(n^2+n-1\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\left(n^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right)}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = c_n \;\; (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$$

olmaktadır, o toplama $g(x)$ denilirse (dikkat: $|g(x)| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ gözleyiniz), sonuçta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin nx}{n^2+1} = \dfrac{g(x)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir, çünkü bu noktada $\frac{0}{0}$ türünde kaldırılamayan süreksizliğe sahiptir. Oysa üçüncü seri Dirichlet Teoremiyle $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ aralığında düzgün yakınsar (neden?) ve üçüncü seri,

$$\forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2+1}$$

gerçekler. Son iki serinin Önerme 7 yardımıyla sırasıyla $\mathbb{R}$ kümesinde ve $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ aralığında türetilebilir olduğunu gösteriniz.

2) Zeta fonksiyonu $(1,\infty)$ aralığında sonsuz mertebeden türetilebilirdir, çünkü öncelikle $1<a$ gerçekleyen herhangi bir sabit a gerçel sayısı sayesinde $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ fonksiyon serileri $[a,\infty)$ aralığında düzgün yakınsarlar, her iki iddia da Weierstrass M-Ölçütünden kolayca elde edilir, gerçekten $\exists\delta_a>0,\ 1+\delta_a<a-\delta_a$ böylece $1<1+\delta_a<1+2\delta_a<a\leq x$ nedeniyle

$$\frac{\ln n}{n^x}=\frac{1}{\delta_a}.\frac{\ln n^{\delta_a}}{n^x}\leq\frac{n^{\delta_a}}{\delta_a.n^x}\leq\frac{n^{\delta_a}}{\delta_a n^{1+2\delta_a}}=\frac{1}{\delta_a.n^{1+\delta_a}}=c_n$$

geçerli olur. O halde her iki seri de $(1,\infty)$ aralığında terim terime türetilebilir, çünkü herhangi $x\in(1,\infty)$ alındığında $\exists a>0,\ 1+a<x-a<x$ olur ve $I_a=[1+a,\infty)$ aralığında her iki seride düzgün yakınsak olduğundan terim terime türetilebilir ve

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}\quad,\quad\zeta''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^x}\quad(\forall x\in(1,\infty))$$

ve benzer biçimde, $\zeta^{(m)}(x)=(-1)^m\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^m n}{n^x}$ $(\forall x\in(1,\infty),\forall m\in\mathbb{N})$ geçerli olduğu görülür.

Önerme 7: Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları $f_n\xrightarrow{d}f$ gerçeklesin. $\forall x\in[a,b]$ için $g_n(x)=\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ ve $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ ise $g_n\xrightarrow{d}g$ olur.

Kanıtlama: $\forall x\in[a,b]$ için $|g_n(x)-g(x)|=\left|\displaystyle\int_a^x(f_n(t)-f(t))\,dt\right|\leq\displaystyle\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\,dt\leq(x-a).\|f_n-f\|\leq(b-a).\|f_n-f\|$ olur, çünkü her $t\in[a,x]$ için apaçık biçimde $|f_n(t)-f(t)|\leq\|f_n-f\|=\delta_n$ (sabit) olmaktadır. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $0\leq\|g_n-g\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g_n(x)-g(x)|\leq(b-a).\delta_n\to 0$ nedeni ile istenen bulunur.

Sonuç ve Örnekler: Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ fonksiyon serisi $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsaksa $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ gerçekleşir, çünkü aslında $\forall x\in[a,b]$ için $\displaystyle\int_a^x f(x)dx\overset{(*)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(x)dx\right)$ geçerlidir ve bu son sonuç, bir önceki önermede g_n yerine $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$ kısmi toplamlarına uyarlanarak kolayca elde edilir. ve hatta $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ ve $F_n(x)=\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ fonksiyon serisinin $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsadığı ve $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ gerçekleştiği anlaşılır. Bu nedenle sözgelimi her $x\in(-1,1)$ için (ve dolayısıyla her $x\in[0,1)$ için) $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ve $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ olduğundan $(*)$ eşitliği kullanılarak

$$\arctan x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int\limits_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$-\ln(1-x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x t^n dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int\limits_0^x t^n dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

açılımları her $x \in (-1,1)$ için bulunur. Ayrıca ilerde Örnek 12.11'de gösterileceği gibi, her $x \in (-1,1)$ için aşağıdaki ilk açılım geçerli olduğunda benzer yöntemle ikincisi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad (\forall x \in (-1,1)) \\ \arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad (\forall x \in (-1,1)). \end{aligned}$$

Kuvvet Serileri kavramına geçmeden önce, aşağıdaki ilginç Teorem 12 kanıtlanacaktır. Bu teoremin Matematik tarihinde önemli bir yeri vardır. Önce hazırlanmalıyız:

Önerme 8: Gerçel değerli bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sıfır sabit fonksiyonu kısacası $f(x) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ olabilmesi için gerek ve yeter koşullar şunlardır:
$i)$ f' türevi $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı ve süreklidir,
$ii)$ Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+1) = f(x)$ **ve** $f(2x) = f(x) + f(x+\frac{1}{2})$ olur.

Kanıtlama: Gereklik apaçıktır, çünkü sıfır sabit fonksiyonu tüm bu koşulları gerçekler. Şimdi yeterlik göstermelidir. f fonksiyonu $i)$ ve $ii)$ koşullarını gerçeklerse öncelikle

$$\begin{aligned} f(2^n x) &= \sum_{0 \le k < 2^n} f(x + \frac{k}{2^n}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}) \qquad (1) \\ f(x) &= \sum_{0 \le k < 2^n} f(\frac{x+k}{2^n}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}) \qquad (2) \end{aligned}$$

bağıntıları geçerlidir, çünkü (2) kolayca (1) bağıntısında, (1) ise tümevarım yardımıyla gösterilir, çünkü $n = 1$ için

$$f(2^1 x) = f(2x) \overset{ii)}{=} f(x) + f(x + \frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{1} f(x + \frac{k}{2^1}) = \sum_{0 \le k < 2} f(x + \frac{k}{2^1})$$

olur, (1) bağıntısı n için doğru varsayılırsa, yani her $x \in \mathbb{R}$ için $f(2^n x) \overset{(*)}{=} \sum_{0 \le k < 2^n} f(x + \frac{k}{2^n})$ geçerliyse,

(1) bağıntısının $n+1$ için doğru olduğunu söyleyen, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}x) &= f(2^n.2x) \overset{(*)}{=} \sum_{0\le k<2^n} f(2x+\frac{k}{2^n}) = \sum_{0\le k<2^n} f(2(x+\frac{k}{2^{n+1}})) \\ &\overset{ii)}{=} \sum_{0\le k<2^n} \left[f(x+\frac{k}{2^{n+1}}) + f(x+\frac{k+2^n}{2^{n+1}})\right] = \sum_{0\le k<2^n} f(x+\frac{k}{2^{n+1}}) + \sum_{0\le k<2^n} f(x+\frac{k+2^n}{2^{n+1}}) \\ &= \sum_{0\le k<2^n} f(x+\frac{k}{2^{n+1}}) + \sum_{2^n\le i<2^{n+1}} f(x+\frac{i}{2^{n+1}}) = \sum_{0\le k<2^{n+1}} f(x+\frac{k}{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (1) ve (2) bağıntıları doğrudur, üstelik f heryerde türetilebilir olduğundan, (2) bağıntısının her iki yanı türetilip

$$f'(x) = \frac{1}{2^n}.\sum_{0\le k<2^n} f'(x+\frac{k}{2^n}) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}) \qquad (3)$$

ve $ii)$ koşullarının birincisi yardımıyla

$$f'(x+1) = f'(x) \ \ (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (4)$$

bulunur. Yeterlik hipotezi nedeniyle heryerde **sürekli** olan f' türevinin 1 periyotlu olduğu anlaşıldığından

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f'(x) = \sup_{x\in[0,1]} f'(x) = M = f'(\xi_0) = \max_{x\in[0,1]} f'(x)$$

olacak biçimde bir $\xi_0 \in [0,1]$ vardır, çünkü kapalı-sınırlı bir aralıkta tanımlı, gerçel değerli sürekli bir fonksiyon, bu aralığın uygun bir noktasında maximumuna erişir. O halde **her** $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) \le M$ olduğundan aşağıdakiler elde edilir:

$$f'(\frac{\xi_0+k}{2^n}) \le M(k=0,1,..,2^n-1) \text{ ve } M = f'(\frac{\xi_0+k}{2^n})(k=0,1,..,2^n-1)$$

çünkü eğer bir tek k_0 indisi için bile $f'(\frac{\xi_0+k_0}{2^n}) < M$ olsaydı $M = f'(\xi_0) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{0\le k<2^n} f'(\frac{\xi_0+k}{2^n}) < \frac{1}{2^n}(2^n.M) = M$ yani $M<M$ bulunurdu.
Demek ki **her** k indisi için $f'(\frac{\xi_0+k}{2^n}) = M$ bulunarak aşağıdaki şaşırtıcı

$$f'(x) = M \ \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

sonucu bulunur, çünkü her $x \in [0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n x < 2^n$ gözleyip $0 \le k_n = [2^n x](\le 2^n x < 2^n)$ tanımlayıp $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[2^n x]}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi_0+k_n}{2^n}$ bulunur ve f' türevi sürekli ve $\frac{\xi_0+k_n}{2^n} \to x$ olduğundan $f'(x) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} f'(\frac{\xi_0+k_n}{2^n}) = M$ ve böylelikle 1 periyotluluk nedeniyle $f'(x+i) = f'(x+1) = f'(x) = M \quad (\forall x \in [0,1), \forall i \in \mathbb{Z})$ elde edilir. O halde istenen $f'(x) = M \quad (\forall x \in \mathbb{R}$ bulunur (nasıl?). Buradan $f(x) = Mx + c \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ve $ii)$ koşulları kullanılarak $M = 0 = c$ ve sonuçta $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ istenen sonucu bulunur.

Önerme 9: Pozitif terimli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Bu durumda $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2...a_n)$ limitinin var ve pozitif olabilmesi için gyk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell n a_n$ serisinin yakınsaklığıdır.

Kanıtlama: $\sum\limits_{k=1}^{n} \ell n a_k = \ell n(a_1a_2...a_n)$ gözleyiniz.

Önerme10: Her $x \in \mathbb{R}$ için $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2})$ sonsuz çarpımı yakınsaktır, yakınsadığı fonksiyon $[0,1)$ aralığında türetilebilirdir.

Kanıtlama: $x = 0$ ve $x = k \in \mathbb{Z}$ için yakınsama iddiaları apaçıktır, çünkü $x = k_0(\neq 0) \in \mathbb{Z}$ ise $x^2 = n_0^2$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, her $n \geq n_0$ için $(1-\frac{x^2}{1^2})(1-\frac{x^2}{2^2})...(1-\frac{x^2}{n^2}) = 0$ olur (neden?). Şimdi $F(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})(\forall x \in \mathbb{R}$ yazıp, gerçekten bu sonsuz çarpımın **yakınsadığını** gösterelim. Önce $x \in (-1,1)$ yani $|x| < 1$ durumunu irdeleyelim. Dikkat edilirse

$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad (\forall a > 1)$$

olmak üzere

$$0 \leq g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}.\zeta(2k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}})(= g(-x)$$

kuvvet serisi mutlak ve düzgün yakınsar, çünkü

$$0 < \frac{\zeta(2k)}{k} \leq \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

olmaktadır, böylelikle yakınsak, non-negatif terimli çift indisli bu seri için

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{x^2}{n^2})^k}{k}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ell n(1 - \frac{x^2}{n^2})$$

ve sonuçta, her $x \in (-1,1)$ için

$$0 < e^{-g(x)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2}) = F(x) \text{ ve } F'(x) = -g'(x).e^{-g(x)}$$

bulunur çünkü $|x| < 1$ ve $\frac{x^2}{n^2} = \frac{|x^2|}{n^2} \leq |x|^2 < 1$ nedeniyle, $0 < e^{-g(x)} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$ sonsuz çarpımının yakınsaklığı için gerek yeter koşul olan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell n(1-\frac{x^2}{n^2})$ serisinin yakınsaklığı yerine gelmekte ve $0 < 1-\frac{x^2}{n^2} \leq 1$

nedeniyle, negatif terimli bu son seri için $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n(1-\frac{x^2}{n^2}) = -g(x) \leq 0$ bulunmaktadır, üstelik F fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığında türetilebilir olduğu anlaşılır. Çünkü $(-1,1)$ aralığında g fonksiyonu türetilebilirdir, çünkü

$$g'(x) = \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)' = 2x.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2} \ (\forall x \in (-1,1))$$

geçerlidir, burada, aşağıdaki

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2-x^2}\right)$$

serisi Weirstrass M-Ölçütü sayesinde $(-1,1)$ aralığında düzgün yakınsar çünkü $n \geq 2$ ve her $x \in (-1,1)$ için $0 \leq x^2 < 1$ böylece $2x^2 < 2 < n^2$ ve

$$0 \leq \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2-x^2}\right) \leq \frac{x^2}{n^2-x^2} < \frac{1}{n^2-x^2} < \frac{2}{n^2} = c_n$$

geçerlidir, böylelikle $\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ serisi $(-1,1)$ aralığında terim terime türetilebilirdir. Şimdi, $|x| < 1$ ise, aşağıdakiler

$$\begin{aligned} x.F(x) &= \lim_{n\to\infty} x.\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} x.\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x}{n}).\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n x}{(n!)^2}.\prod_{k=1}^{n}(x+(-k)).\prod_{k=1}^{n}(x+k) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}.\prod_{k=-n}^{n}(x+k) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)F(x+1)}{x.F(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=-n}^{n}(x+1+k)}{\prod_{k=-n}^{n}(x+k)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(x+n+1)(x+n)...(x+1)x(x-1)...(x-(n-1))}{(x+n)(x+n-1)...x(x-1)...(x-(n-1))(x-n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x+n+1}{x-n} = -1 \end{aligned}$$

ve böylece

$$(x+1).F(x+1) = -x.F(x) \qquad (\forall x \in (-1,1))$$

bulunarak hem **her** $x \in \mathbb{R}$ için $-F(x)$ sonsuz çarpımının yakınsadığı anlaşılır(nasıl?), hem de F fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığında ve özel olarak $[0,1)$ aralığında sürekli ve türetilebilir olduğu anlaşılır.

Önerme 11: $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı, sürekli ve 1 periyotlu olan ve $[0,1)$ aralığında türetilebilir bir fonksiyon, tüm $\mathbb{R}$ kümesinde türetilebilirdir.

Kanıtlama: f fonksiyonu bu koşulları yerine getirsin, o halde her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+1) = f(x)$ gerçeklendiğinden, f fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısında türetilebilir olduğu anlaşılır, sözgelimi

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) \ \text{ ve aslında} \\ f'(1+x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+x+h)-f(1+x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \end{aligned}$$

$(\forall x \in [0,1))$ olduğu görülür. O halde **her** $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x)$ vardır(neden?).

Teorem 12: Her $x \in \mathbb{R}$ için **Euler özdeşliği** $\sin \pi x = \pi x. \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ geçerlidir.

Kanıtlama: Son iki önermeden yararlanacağız. Önerme 9'da tanımlanan $F(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})(\forall x \in \mathbb{R})$ fonksiyonu aracılığıyla

$$f(x) = \pi x.F(x) \ \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

tanımlansın. Amacımız $f(x) = \sin \pi x(\forall x \in \mathbb{R})$ kanıtlamaktır. Dikkar edilirse $f(x+1) = -f(x)$ **ve** $f(x).f(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})f(2x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ eşitlikleri, Önerme9'daki gibi gösterilir. Şimdi

$$G(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\sin \pi x} = \frac{F(x)}{(\frac{\sin \pi x}{\pi x})} & ; x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayıp, her $x \in \mathbb{R}$

$$G(x+1) = G(x),\ G(\frac{1}{2})G(2x) = G(x),\ G(x+\frac{1}{2}),\ 0 < G(x)$$

bulunur, sonuncu için $0 < G(x)(\forall x \in (0,1))$ gözlemek yeterlidir. Hem F fonksiyonu, hem de $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}(\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z})$ ve $\varphi(x) = 1$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu $[0,1)$ aralığında türetilebilirdir, örneğin $\varphi(0) = 1$ olduğundan

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin \pi h - \pi h}{\pi h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos \pi h - 1}{2h} = 0$$

geçerlidir. O halde G fonksiyonu $[0,1)$ aralığında ve sonuçta Önerme10 nedeniyle **tüm $\mathbb{R}$ kümesinde türetilebilirdir**. Dolayısıyla

$$h(x) = \ln\frac{G(x)}{G(\frac{1}{2})} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

fonksiyonu $h(x+1) = h(x)$ **ve** $h(2x) = h(x) + h(x+\frac{1}{2})(\forall x \in \mathbb{R})$ koşullarını gerçekler, h' türevi tanımlı ve süreklidir (neden?) dolayısıyla Önerme7 nedeniyle $0 = h(x)(\forall x \in \mathbb{R})$ bularak

$$G(x) = G(\frac{1}{2})(= G(0) = 1)(\forall x \in \mathbb{R}) \text{ yani } f(x) = \sin \pi x(\forall x \in \mathbb{R})$$

istenen sonucuna ulaşılır.

Sonuç 7: Aşağıdaki özdeşliklerin birincisi her $x \in \mathbb{R}$ ikincisi ise her $x \in \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için geçelidir:

$$\sin x = x.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad \text{ve} \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

İkincisi için ünlü $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ özdeşliğini kullanın. Bu sonuçların benzeri her $z \in \mathbb{C}$ için geçerlidir ve Kompleks Analiz'de büyük önemi ve uygulamaları olan genelleştirmeleri vardır.

Dikkat: Sırasıyla $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{3}$ alınırsa aşağıdaki ünlü eşitlikler elde edilir, birincisine **Wallis Bağıntısı** denir:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots$$
$$\frac{1}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4}{9(2n-1)^2}\right) = \left(1 - \frac{4}{9\cdot 1^2}\right)\left(1 - \frac{4}{9\cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{4}{9\cdot 5^2}\right)\cdots$$

Şimdi **Kuvvet Serileri**'ni gereğince kavrayabilmek için herhangi bir gerçel sayı dizisinin alt ve üst limitlerini tanımlayıp, bu konuda gerekli bilgileri edinmeliyiz.

Tanım 5: Herhangi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi için

$$\underline{\lim} x_n = \sup_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\})$$

$$\overline{\lim} x_n = \inf_n(\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\})$$

genişletilmiş gerçel sayılarına, bu dizinin **alt limiti** ve **üst limiti** denilir. Bunlar bir gerçel sayı olabildiği gibi $+\infty$ ya da $-\infty$ olabilir. Bunlar konusunda temel bilgiler aşağıdaki önermede yer alır:

Önerme12: Herhangi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için, şunlar geçerlidir:

$$-\infty \leq \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n \leq +\infty,$$

Daima, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi ne olursa olsun

$$\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} x_{n_m} \leq \overline{\lim} x_{n_m} \leq \overline{\lim} x_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell(\in \mathbb{R}) \text{ için gyk } \underline{\lim} x_n = \ell = \overline{\lim} x_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ için gyk } \underline{\lim} x_n = -\infty = \overline{\lim} x_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ için gyk } \underline{\lim} x_n = +\infty = \overline{\lim} x_n,$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ pozitif terimli } \textbf{ve } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsar },$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ pozitif terimli ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsaksa } \underline{\lim} n a_n = 0 \text{ olur},$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ dizisinde } x_{n_m} \neq 0 (\forall m \in \mathbb{N}), \text{ tüm öteki terimler sıfırsa}$$

$$\underline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_{n_m} \textbf{ ve } \overline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_{n_m} \text{ olur},$$

$$\overline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_{2n} \vee \overline{\lim} x_{2n-1} \text{ ve } \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_{2n} \wedge \underline{\lim} x_{2n-1} \text{ daima geçerlidir },$$

Kanıtlama: $n, m \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leq x_{n+m} = x_{m+n} \leq \sup\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...\}$$

ve böylece m doğal sayısı sabit tutulup, her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} \leq \sup\{x_m, x_{m+1}, ...\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan

$$\Rightarrow \underline{\lim} x_n = \sup_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) \leq \sup\{x_m, x_{m+1}, ...\}$$

ve sonuçta $\overline{\lim} x_n \leq \sup\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...\}$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ olduğundan infimum tanımı gereği $\underline{\lim} x_n \leq \inf_m(\sup\{x_m, x_{m+1}, ...\}) = \inf_n(\sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}) = \overline{\lim} x_n$ bulunur. Şimdi $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$ olsun. O halde

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon_n \ (\forall n \geq n_\varepsilon) \text{ olur ve}$$

$$\ell - \varepsilon \leq \inf\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1}, x_{n_\varepsilon+2,...}\} \leq \sup_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) = \underline{\lim} x_n$$

ve benzer biçimde

$$\overline{\lim} x_n \leq \sup\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1}, x_{n_\varepsilon+2}, ...\} \leq \ell + \varepsilon$$

ve böylece $-\infty < \ell - \varepsilon \leq \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n \leq \ell + \varepsilon < +\infty$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^4)$ bulunur, hem $\underline{\lim} x_n$ hem $\overline{\lim} x_n$ birer gerçel sayı olur ve $\ell \leq \underline{\lim} x_n + \varepsilon$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)$ nedeniyle $\ell \leq \underline{\lim} x_n (\leq \overline{\lim} x_n \leq \ell)$ bulunur, çünkü $\boldsymbol{\ell_1 \leq \ell_2 + \varepsilon}$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)$ ise $\ell_1 \leq \ell_2$ olur, çünkü olmasa $\ell_2 < \ell_1$ olur ve herhangi $0 < \varepsilon_0 < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$ için $2\varepsilon_0 < \ell_1 - \ell_2$ nedeniyle $\ell_2 + \varepsilon_0 < \ell_1 - \varepsilon_0 < \ell_1$ bulunurdu, oysa hipotez nedeniyle aslında $\ell_1 \leq \ell_2 + \varepsilon_0$

geçerlidir, çelişki! Tersine $\underline{\lim} x_n = \ell = \overline{\lim} x_n$ ise, supremum tanımı gereği

$$\ell = \sup_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) \text{ ve } \ell - \varepsilon < \inf\{x_{N_\varepsilon}, x_{N_\varepsilon+1}, ...\}$$

yani $\ell - \varepsilon < x_n$ $(\forall n \geq N_\varepsilon)$ ve benzer biçimde $x_n < \ell + \varepsilon$ $(\forall n \geq N_\varepsilon^*)$ bularak, $n_\varepsilon = N_\varepsilon + N_\varepsilon^*$ tanımlanırsa, her $n \geq n_\varepsilon$ için hem $\ell - \varepsilon < x_n$ ve hem de $x_n < \ell + \varepsilon$ bulunur, yani

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon\ (\forall n \geq n_\varepsilon) \text{ olur, bu } \lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

demektir. Son olarak, pozitif terimli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ olsun. Dikkat, zaten $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $0 \leq \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell = \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ olur ve uygun bir ε_0 aracılığıyla $\ell + \varepsilon_0 < 1 - \varepsilon_0$ ve $\ell = \inf_n(\sup_n\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n41}}, \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}, ...\})$ olduğu için, infimum tanımı gereği

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \sup\left\{\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}, \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}, ...\right\} < \ell + \varepsilon_0 < 1 - \varepsilon_0 < 1$$

ve sonuçta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon_0 < 1\ (\forall n \geq n_0) \text{ yani } a_{n+1} < a_n(\ell + \varepsilon_0)\ (\forall n \geq n_0)$$

ve tümevarımla $a_{n_0+n} < a_{n_0}(\ell + \varepsilon_0)^n (\forall n \in \mathbb{N})$ ve böylece $a_n < a_{n_0}(\ell + \varepsilon_0)^{n-n_0}(n \geq n_0)$ olduğundan, $M_0 = \frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon_0)^{n_0}} > 0$ sabiti sayesinde $0 < a_n < M_0.(\ell + \varepsilon_0)^n$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bulunur ve $0 < \ell + \varepsilon_0 < 1$ unutmadan, ünlü Sıkıştırma Lemması ile $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gerçeklenir, demek ki pozitif terimli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ iddiası da gösterilmiş olur. Tüm öteki iddialar ödevdir.

Ek Bilgi: Sağ yandaki toplam anlamlıysa daima $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$ olur.

Son iddiada söylenen şudur: Analizde $+\infty + (-\infty)$ ve $(-\infty) + (+\infty)$ toplamları tanımsız ve anlamsız olduğundan $\overline{\lim} x_n = +\infty$ ve $\overline{\lim} y_n = -\infty$ ya da tersi **olmadıkça, daima** $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$ eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten, eğer $\overline{\lim} x_n = +\infty$ ise, zorunlu olarak $-\infty < \overline{\lim} y_n \leq +\infty$ ve sonuçta $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq +\infty = (+\infty) + \overline{\lim} y_n = \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$ bulunur; eğer $\overline{\lim} x_n = -\infty$ ise, zorunlu olarak $-\infty \leq \overline{\lim} y_n < +\infty$ olur ve $-\infty \leq \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n = -\infty$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} = -\infty = \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$ bulunur(nasıl?); eğer hem $\overline{\lim} x_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ hem de $\overline{\lim} y_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$ ise, bu kez **her** $\varepsilon > 0$ için $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon$ bulup istenen $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \ell_1 + \ell_2$ eşitsizliği kolayca elde edilir, çünkü gerek ℓ_1 gerekse ℓ_2 birer infimum olduklarından

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \sup\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1}, x_{n_\varepsilon+2}, ...\} < \ell_1 + \varepsilon \text{ ve } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \sup\{y_{N_\varepsilon}, y_{N_\varepsilon+1}, y_{N_\varepsilon+2}, ...\} < \ell_2 + \varepsilon$$

bulunup $m_\varepsilon = n_\varepsilon + N_\varepsilon$ yazılırsa, her $n \geq m_\varepsilon (> n_\varepsilon)$ için hem $x_n < \sup\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1}, x_{n_\varepsilon+2}, ...\} < \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ve $y_n \leq \sup\{y_{N_\varepsilon}, y_{N_\varepsilon+1}, y_{N_\varepsilon+2}, ...\} < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ve sonuçta $x_n + y_n < \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon \ (\forall n \geq m_\varepsilon)$ ve böylece $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \sup\{x_{m_\varepsilon} + y_{m_\varepsilon}, x_{m_\varepsilon+1} + y_{m_\varepsilon+1}, ...\} \leq \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon$ bulunur.

Önerme13: Bir gerçel sayı dizisinin alt limiti, bu dizinin tüm yığılma noktalarının en küçüğüdür, üst limiti ise en büyüğüdür.

Kanıtlama: Bilindiği gibi, bir $y \in \mathbb{R}$ gerçel sayısına, ancak ve yalnız

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N > n,\ y - \varepsilon < x_N < y + \varepsilon$$

koşulunu sağlarsa, yani her $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ aralığında, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, verilen her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısından **büyük numaralı** en az bir terimi bulunuyorsa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir **yığılma noktası** denir. Buna karşılık, ancak ve yalnız

$$\forall M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N > n,\ x_n < -M$$

koşulu gerçeklendiğinde $-\infty$ bu dizinin yığılma noktasıdır denir. $+\infty$'un yığılma noktası olma koşuu benze biçimde verilir. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm yığılma noktalarından oluşan küme Yığ$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ ile yazılır, bu kümede, dikkat edilirse, en az bir gerçel sayı ya da $-\infty($ ya da $+\infty)$ yer alır. **Daima**

$$\underline{\lim} x_n = \min \text{Yığ}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \ \ , \ \ \overline{\lim} x_n = \max \text{Yığ}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \text{ geçerlidir.}$$

Örneğin $\underline{\lim} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $\ell = \sup_n(\inf\{x_n, x_{n+1}, ...\})$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\ell - \varepsilon < \inf\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_{\varepsilon+1}}, x_{n_{\varepsilon+2}}, ...\}$ olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi keyfi $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer $\exists N \geq n + n_\varepsilon,\ x_N < \ell + \varepsilon$ koşulu geçerli olmasaydı her $N \geq n + n_\varepsilon$ için $\ell + \varepsilon \leq x_N$ olur, $\ell + \varepsilon \leq \inf\{x_{n+n_\varepsilon}, x_{n+n_\varepsilon+1}, x_{n+n_\varepsilon+2}, ...\} \leq \underline{\lim} x_n = \ell < \ell + \varepsilon$ çelişkisi bulunurdu, demek ki $\exists N \geq n + n_\varepsilon$ için, üstelik $N > n_\varepsilon$ nedeniyle $\ell - \varepsilon < \inf\{x_{n_\varepsilon}, x_{n_\varepsilon+1,...}\} \leq x_N$ gözleyip $\ell - \varepsilon < x_N < \ell + \varepsilon$ bularak $\ell = \underline{\lim} x_n$ gerçel sayısının $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir yığılma noktası olduğu anlaşılır. Üstelik $y < \underline{\lim} x_n$ gerçekleyen hiçbir $y \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktası olamaz çünkü $\exists \delta_0 > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ y + \delta_0 < \underline{\lim} x_n = \delta_0 < \inf\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, ...\} \leq x_n\ (\forall n \geq n_0)$ olur.

Tanım 6: x_0 sabit bir gerçel sayı ise a_n'lerin sonsuz tanesi sıfır olmamak koşulu geçerli olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ fonksiyon serisine bir **kuvvet serisi** denir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n.n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

kuvvet serisi örnekleridir, bunlarda sırasıyla $x_0 = 0, x_0 = 1, x_0 = 0$ alındığına dikkat ediniz. Kuvvet serilerinin temel teoremi şudur:

Teorem13: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi verilsin. Bu durumda aşağıdakileri gerçekleyen bir $0 \leq R \leq +\infty$ **vardır**:

1) Bu kuvvet serisi $|x - x_0| < R$ gerçekleyen x'ler için mutlak yakınsar, $R < |x - x_0|$ gerçekleyenler için ıraksar.

2) $R = \sup\{r \in [0, \infty) : \sup_n(|a_n|r^n) < +\infty\}$ geçerlidir.

3) $0 < R \in \mathbb{R}$ ise $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ geçerlidir.

4) $0 = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ ise, **her** $x \in \mathbb{R}$ için kuvvet serisi mutak yakınsar.

Kanıtlama: Önce 2) iddiasını gösterelim, kısacası (1) iddiasında belirtilen nitelikteki $0 \leq R$ için $R = \sup\{r \in [0, \infty) : \sup_n(|a_n|r^n) < +\infty\}$ gösterelim. Kısalık amacıyla $A = \{r \in [0, \infty) : \sup_n(|a_n|r^n) < +\infty\} \subseteq [0, \infty)$ yazılırsa $0 \in A \neq \emptyset$ gözlenir. Şimdi 1) iddiasında sözü edilen $R \geq 0$ için $R = \sup A$ gösterelim. Önce $R \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$$r \leq R \ (\forall r \in A) \ \textbf{ve} \ \forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon \in A, \ R - \varepsilon < r_\varepsilon$$

iddialarını kanıtlayalım. Eğer $R < r_0$ gerçekleyen bir $r_0 \in A$ varolsaydı $\sup(|a_n|r_0^n) = M_0 < +\infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n|r_0^n \leq M_0$ yani $|a_n| \leq \frac{M_0}{r_0^n}$ gözleyip (neden $r_0 > 0$ olur?) $\xi_0 = x_0 + \rho_0$ tanımlayıp (burada $R < \rho_0 < r_0$ alınmıştır) $|\xi_0 - x_0| = \rho_0 > R$ nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\xi_0 - x_0|^n \leq +\infty$ **olamayacağından** (çünkü R sayısı 1) iddiasındaki özelliklere sahiptir) sonuçta

$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||\xi_0 - x_0|^n \leq M_0. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_0 - x_0|^n}{r_0^n} = M_0. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{r_0}\right)^n < +\infty$$

çelişkisi bulunacağından, $R < r_0$ gerçekleyen hiçbir $r_0 \in A$ sayısının var olmadığı anlaşılır, böylelikle $r \leq R(\forall r \in A)$ iddiası gösterilmiş olur. Şimdi $\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon \in A, R - \varepsilon < r_\varepsilon$ iddiasını gösterelim, eğer $R - r < 0$ ise, zaten her $r \in A$ için $0 \leq r$ olduğundan $R - \varepsilon < 0 \leq r$ bulunur, yok eğer $0 \leq R - \varepsilon$ ise $r_\varepsilon = R - \frac{\varepsilon}{2}$ için $R - \varepsilon < R - \frac{\varepsilon}{2} = r_\varepsilon$ ve $0 < r_\varepsilon \in A$ olur çünkü $x_\varepsilon = x_0 + r_\varepsilon > x_0$ ve $|x_\varepsilon - x_0| = (x_\varepsilon - x_0) = r_\varepsilon = R - \frac{\varepsilon}{2} < R$ ve R'nin (1)'de belirtilen niteliği gereği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_\varepsilon - x_0)^n$ serisi mutlak yakınsar, dolayısıyla $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_\varepsilon - x_0|^n < +\infty$ olur, bu yakınsak serinin genel terimi sıfıra yakınsar, kısacası $\lim_{n\to\infty}(|a_n||x_\varepsilon - x_0|^n) = 0$ olur, oysa **her** yakınsak gerçel sayı dizisi sınırlı olduğundan $0 \leq |a_n|r_\varepsilon^n = |a_n||x_\varepsilon - x_0|^n = |a_n|(x_\varepsilon - x_0)^n \leq M_\varepsilon < +\infty$ nedeniyle $r_\varepsilon \in A$ sonucu bulunur. Şimdi (1) iddiasındaki R için $R = +\infty$ olsun. Bu durumda $\sup A = +\infty = R$ gösterelim. Bunun için, hiçbir pozitif gerçel sayının A kümesinin bir üst sınırı olamadığı yani

$$\forall r > 0,\ \exists \rho > r, \rho \in A$$

gösterilmelidir. Gerçekten her $r > 0$ için $2r \in A$ göstermek kolaydır, çünkü $x_r = x_0 + 2r$ için $|x_r - x_0| = x_r - x_0 = 2r < +\infty = R$ olduğundan, R'nin niteliği gereği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_r - x_0)^n$ mutak yakınsar ve yukarda yapıdığı gibi $\sup_n(|a_n|(2r)^n) = \sup_n(|a_n||x_r - x_0|^n) < +\infty$ bularak $2r \in A$ ve böylelikle $\sup A = +\infty = R$ bulunur.

Şimdi de tersine $R = \sup A$ sayısının, ister $R \in \mathbb{R}$ isterse $R = +\infty$ olsun, (1)'de belirtilen özelliğe sahip olduğunu gösterelim. Önce $R \in \mathbb{R}$ olsun ve $|x - x_0| < R$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alınsın. O halde $\exists \delta_x > 0, |x - x_0| + \delta_x < R - \delta_x$ ve supremum tanımı gereği $\exists r_x \in A, R - \delta_x < r_x$ ve böylelikle $0 < \delta_x \leq |x - x_0| + \delta_x < R - \delta_x < r_x$ nedeniyle r_x pozitif ve üstelik $r_x \in A$ nedeniyle $0 < M_x = \sup_n(|a_n|r_x^n) < +\infty$ olur, dikkat: sonsuz tane $n \in \mathbb{N}$ için, kuvvet serisinin tanımı gereği $a_n \neq 0$ yani $0 < |a_n|$ ve sonuçta $0 < |a_n|r_x^n \leq M_x$ olduğundan kesinlikle $0 < M_x$ olduğuna dikkat ediniz. Sonuçta $|a_n|.r_x^n \leq M_x(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $|a_n| \leq \frac{M_x}{r_x^n}(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.|x - x_0|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_x.\frac{|x-x_0|^n}{r_x^n} = M_x.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{|x-x_0|}{r_x})^n < +\infty$ olur çünkü $|x - x_0| < |x - x_0| + \delta_x < R - \delta_x < r_x$ yani $0 \leq \frac{|x-x_0|}{r_x} < 1$ nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{|x-x_0|}{r_x})^n$ geometrik serisi yakınsar, kısacası $|x - x_0| < R = \sup A$ gerçekleyen herbir x için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a - a_0)^n$ kuvvet serisi mutlak yakınsamaktadır. Buna karşılık $R < |y - x_0|$ gerçekleyen her $y \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y - x_0)^n$ kuvvet serisi **ıraksar,** çünkü $\lim_{n\to\infty}(a_n(y - x_0)^n) \neq 0$ olur, böylelikle genel terimi sıfıra yakınsamayan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y - x_0)^n$ serisi kesinlikle yakınsayamaz, burada $\lim_{n\to\infty} a_n(y - x_0)^n \neq 0$ olmasının nedeni $\sup_n(|a_n||y - x_0|^n) = +\infty$ olmasıdır, çünkü eğer $\sup_n(|a_n||y - x_0|^n) < +\infty$ olsaydı $\delta_y = |y - x_0|$ yazarak ve $0 \leq R < |y - x_0| = \delta_y$ ve $\sup_n(|a_n|\delta_y^n) < +\infty$ gözleyerek $\delta_y \in A$ bulup $\delta_y \leq \sup A = R < \delta_y$ çelişkisi doğardı. Dikkat: bir $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\sup_n |b_n| = +\infty$ oluyorsa, bu dizinin yakınsaması söz konusu olamaz, çünkü yakınsasaydı bu dizi sınırlı olur ve $|b_n| \leq M_0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ gerçekleşir ve $+\infty = \sup_n |b_n| \leq M_0 < +\infty$ çelişkisi doğardı.

Demek ki $\sup A = R \in \mathbb{R}$ için (1)'deki nitelikler geçerlidir. $\sup A = +\infty$ ise, siz **her** $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ serisinin mutak yakınsaklığını gösterin.

Son olarak $\sup A = R > 0$ ise $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ yani $\frac{1}{R} = \inf_n(\sup\{\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, ...\})$ olduğunu gösterelim. Bunlar için şunlar gösterilmelidir:

$$i)\quad \frac{1}{R} \leq \sup\{\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, ...\}\quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$ii)\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \sup\{\sqrt[n_\varepsilon]{|a_{n_\varepsilon}|}, \sqrt[n_\varepsilon+1]{|a_{n_\varepsilon+1}|}, ...\} < \frac{1}{R} + \varepsilon$$

Gerçekten eğer $i)$ **doğru olmasaydı**, uygun bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\sup\{\sqrt[n_0]{|a_{n_0}|}, \sqrt[n_0+1]{|a_{n_0+1}|}, \sqrt[n_0+2]{|a_{n_0+2}|}, ...\} < \frac{1}{R}$$

bulunur ve uygun bir $\delta_0 > 0$ aracılığıyla $0 < \delta_0 \leq \sup\{\sqrt[n_0]{|a_{n_0}|}, \sqrt[n_0+1]{|a_{n_0+1}|}, ...\} + \delta_0 < \frac{1}{R} - \delta_0 < \frac{1}{R+\delta_1}$ olurdu, burada $0 < \frac{1}{R} - \delta_0 = \frac{1-R\delta_0}{R}$ gözleyip $0 < \delta_1 < \frac{R^2\delta_0}{1-R\delta_0}$ seçilmiş, $\delta_1 < \frac{R^2\delta_0}{1-R\delta_0} = \frac{R}{1-R\delta_0} - R$ ve $R+\delta_1 < \frac{R}{1-R\delta_0}$ ve böylelikle $\frac{1}{R} - \delta_0 < \frac{1}{R+\delta_1}$ bulunmuştur. $\sup\{\sqrt[n_0]{|a_{n_0}|}, \sqrt[n_0+1]{|a_{n_0+1}|}, ...\} < \frac{1}{R+\delta_1}$ ve böylece $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sup\{\sqrt[n_0]{|a_{n_0}|}, \sqrt[n_0+1]{|a_{n_0+1}|}, ...\} < \frac{1}{R+\delta_1}$ $(\forall n \geq n_0)$ nedeniyle $\sqrt[n]{|a_n|}.(R+\delta_1) < 1$ $(\forall n \geq n_0)$ ve $|a_n|.(R+\delta_1)^n < 1$ $(\forall n \geq n_0)$ ve böylece $\sup_n(|a_n|(R+\delta_1)^n) = \max_{n<n_0}(|a_n|(R+\delta_1)^n) \vee \sup_{n_0 \leq n}(|a_n|(R+\delta_1)^n) < +\infty$ bulunarak sonuçta $R + \delta_1 \in A$ ve $R + \delta_1 \leq \sup A = R < R + \delta_1$ çelişkisi bulunurdu! Demek ki $i)$ doğrudur. Şimdi $ii)$ gösterilmelidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. Oysa sayfa72 deki gibi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sup A} = \inf\{\frac{1}{r} : r \in A \cap \mathbb{R}^+\}$$

olduğundan $\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf\{\frac{1}{r} : r \in A \cap \mathbb{R}^+\} + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{r_\varepsilon}$ gerçeklenecek biçimde bir $r_\varepsilon \in A \cap \mathbb{R}^+$ vardır. Şimdi $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon r_\varepsilon}{2}$ seçilirse $\frac{1+\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} = \frac{1}{r_\varepsilon} + \frac{\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} < \frac{1}{r_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{R} + \varepsilon$ ve ayrıca $r_\varepsilon \in A$ nedeniyle $0 < \sup_n(|a_n| r_\varepsilon^n) = \ell_\varepsilon < +\infty$ olur, oysa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ell_n} = 1$ olduğundan $\sqrt[n]{\ell_\varepsilon} < 1 + \delta_\varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ geçerlidir. $|a_n|.r_\varepsilon^n \leq \ell_\varepsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\sqrt[n]{|a_n|}.r_\varepsilon \leq \sqrt[n]{\ell_\varepsilon}$ gözleyip, her $n \geq n_\varepsilon$ için $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{\ell_n}}{r_\varepsilon} < \frac{1+\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon}$ yani

$$\sup\{\sqrt[n_\varepsilon]{|a_{n_\varepsilon}|}, \sqrt[n_\varepsilon+1]{|a_{n_\varepsilon+1}|}, ...\} \leq \frac{1+\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} < \frac{1}{R} + \varepsilon$$

kısacası $ii)$ koşulunun geçerli olduğu görülür.

(4) Size ödevdir.

Not: $R = \sup A \geq 0$ genişletilmiş gerçel sayısına $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı** denir. Dikkat: Teorem11.4) nedeniyle $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ise, bu kuvvet serisi herbir $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar, en önemlisi, bu üst limit pozitif **ise**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi somut örneklerle uğraşalım.

Örnekler12:

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n . x^{n^2}$$

kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm: Hepsi için $x_0 = 0$ gözleyiniz. Birinci kuvvet serisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = n^2$ ve $\sqrt[n]{|a_n|} =$

$(\sqrt[n]{n})^2$ ve sonuçta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1$ olur, çünkü bilindiği gibi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ geçerlidir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$ geçerlidir, son iki limiti hesaplamak için şu temel ve yararlı bilgiyi gösterin(aşağıya bakınız):

Bilgi: Pozitif terimli $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi **ne olursa olsun** şu sıkıştırma geçerlidir:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Böylelikle eğer $\lim\limits_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ oluyorsa $\ell \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \le \ell$ bularak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ elde edilir. Bu bilgiyle yukardaki iki limiti hesaplamak kolayıdır, çünkü sözgelimi $b_n = \frac{n^n}{n!}(\forall n \in \mathbb{N})$ ise $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$ nedeniyle $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = e$ bulunur. O halde birinci kuvvet serisi için $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ olduğundan Önerme11'de gösterildiği $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ve böylece $R = 1$ bulunur. İkinci seri için $\lim\limits_{n\to} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = 2.\lim\limits_{n\to} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.\frac{1}{n} = e.0 = 0$ olduğundan bu seri heryerde mutlak yakınsar. Üçüncü seri için $R = \frac{1}{2}$ ve sonuncusu için $R = 1$ olur. Dikkat, dördüncü seride $a_{n^2} = 2^n(\forall n \in \mathbb{N})$ ve indisi **tam kare olmayan** tüm a_n katsayıları sıfırdır ve Önerme11'de son iddiada belirtildiği gibi $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n^2]{a_{n^2}} = \overline{\lim}(2^n)^{\frac{1}{n^2}} = \overline{\lim}2^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ geçerlidir.

Yukardaki **Bilgi**'nin kanıtlanması: Yalnızca $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$ eşitsizliğini gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n$ ve $0 < \sqrt[n]{a_n}$ böylelikle $0 \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$ olduğundan, eğer $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ ise gösterilecek birşey yoktur; yok eğer $0 < \ell = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ise bu kez $\ell \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$ gösterilmelidir. Bunun içinse, **herbir** $0 < \varepsilon < \ell$ için $\ell \le \varepsilon + \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$ göstermek yeterlidir, (neden?), oysa supremum tanımı gereği

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ A_\varepsilon = \left\{\frac{a_{n_\varepsilon+1}}{a_{n_\varepsilon}}, \frac{a_{n_\varepsilon+2}}{a_{n_\varepsilon+1}}, \frac{a_{n_\varepsilon+3}}{a_{n_\varepsilon+2}}, ...\right\} \quad , \quad 0 < \ell - \varepsilon < \inf A_\varepsilon \le \frac{a_{n+1}}{a_n}\ (\forall n \ge n_\varepsilon)$$

ve böylece $(\ell-\varepsilon)a_n \le a_{n+1}$ $(\forall n \ge n_\varepsilon)$ olur, sonuçta $(\ell-\varepsilon)^{n-n_\varepsilon}.a_{n_\varepsilon} \le a_n$ $(\forall n \ge n_\varepsilon)$ yani $M_\varepsilon = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(\ell-\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$ pozitif sabiti sayesinde $M_\varepsilon(\ell-\varepsilon)^n \le a_n$ $(\forall n \ge n_\varepsilon)$ ve dolayısıyla $\sqrt[n]{M_\varepsilon}.(\ell-\varepsilon) \le \sqrt[n]{a_n}$ $(\forall n \ge n_\varepsilon)$ bulunur, alt limit alırsak istenen

$$\ell - \varepsilon = (\ell-\varepsilon).\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_\varepsilon} = (\ell-\varepsilon)\underline{\lim}\sqrt[n]{M_\varepsilon} = \underline{\lim}\left((\ell-\varepsilon)\sqrt[n]{M_\varepsilon}\right) \le \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$$

sonucu kolayca bulunur. Şimdi yine kuvvet serilerine dönelim.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n.n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}})^n x^n$ kuvvet serileri için aynı soruyu çözünüz.

Çözüm: Birinci kuvvet serisi için $x_0 = 1$ ve $R = \sqrt{2}$ olur, çünkü bu seride katsayılar $a_{2n} = \frac{1}{2^n.n^3}$ ve $a_{2n-1} = 0(\forall n \in \mathbb{N})$, böylece $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n.n^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dikkat, birinci seri $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ aralığında mutlak yakınsar, fakat uç noktalarda da mutlak yakınsar, sözgelimi $x_1 = 1-\sqrt{2}$ için, pozitif terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1-1)^2 n}{2^n.n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n.n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisi yakınsaktır, sonuçta birinci seri $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ kapalı aralığında mutlak yakınsar.İkinci seri için $R=\frac{1}{3}$, üçüncü seri için $R=\frac{4}{3}$ gözleyiniz, üçüncü seride katsayılar $a_n = (\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n-1}})^n$ ve sonuçta $a_{2n} = (\frac{3}{4})^{2n}, a_{2n-1} = (\frac{1}{6})^{2n-1}, \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[2n]{a_{2n}} \vee \overline{\lim}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \frac{3}{4} \vee \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$ bulunur. Üçüncü seri $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ aralığının her kapalı alt aralığında mutlak yakınsar, sözgelimi

$$x \in [a,b] \subseteq (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) \text{ ise } |x| < \frac{4}{3} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n-1}})^n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n-1}})^n||x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3|x|}{4})^n < +\infty$$

çünkü $||x|-|y|| \leq |x-y|$ nedeniyle $4 = ||5|-|(-1)^n|| \leq |5-(-1)^n| = |5+(-1)^{n+1}|$ ve böylece $\frac{1}{|5+(-1)^{n+1}|^n} \leq \frac{1}{4^n}$ ve $0 < \frac{3|x|}{4} < 1$ geçerlidir.

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{x+1}{x})^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(\frac{2x+1}{x})^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n(1-x)^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}(\tan x)^n$$

serilerinin yakınsadığı kümeleri belirleyiniz.

Çözüm: Bilindiği(ya da kolayca görüleceği gibi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.y^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R=1$ olduğundan, birinci seri, $|1+\frac{1}{x}| = |\frac{x+1}{x}| < 1$ yani $-1 < 1+\frac{1}{x} < 1$ kısacası $-2 < \frac{1}{x}(= -\frac{1}{|x|}) < 0$ ve sonuçta $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ ve aslında $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ gerçekleyen x'ler için yakınsaktır. Benzer şeyler son seri için yapılır ve bu seri $A = \{x \in \mathbb{R} : |\tan x| < 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi)$ kümesinde yakınsar. Ötekiler size ödevdir.

4) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $0 < R < +\infty$ ise, aşağıdaki kuvvet serilerininki nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n.$$

Çözüm: Birinci serinin yakınsaklık yarıçapı $\frac{R}{2}$ olur, çünkü $\overline{\lim}\sqrt[n]{|2^n a_n|} = 2.\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{R}$ olmaktadır. Öte yandan ikinci seri yalnızca $x=0$ gerçel sayısında yakınsar, çünkü $\overline{\lim}\sqrt[n]{|n^n a_n|} = \overline{\lim}(n\sqrt[n]{|a_n|}) = +\infty$ olduğundan (aşağıya bkz.) ikinci serinin yakınsaklık yarıçapının pozitif bir $R(>0)$ olması **olanaksızdır,**(öyle olsaydı $+\infty = \overline{\lim}\sqrt[n]{|n^n a_n|} = \frac{1}{R} < +\infty$ çelişkisi doğardı). Burada, aşağıda yer alan **Bilgi1** ve **Bilgi2** kullanılarak şu temel gerçek kullanılmıştır:

Bilgi3: Negatif olmayan terimli $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri için eğer $0 < \overline{\lim}c_n = \ell < +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$ **ise** $\overline{\lim}(b_n c_n) = +\infty$ olur. Gerçekten $M > 0$ ne olursa olsun $\exists n_M \in \mathbb{N},\ M < b_n(\forall n \geq n_M)$ ve $0 \leq c_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $Mc_n \leq b_n c_n(\forall n \geq n_M)$ bularak $M\ell = M.\overline{\lim}c_n = \overline{\lim}(Mc_n) \leq \overline{\lim}(b_n c_n)$ ve sonuçta $0 < \ell$ olduğundan $M \leq \frac{1}{\ell}.\overline{\lim}(b_n c_n)$ eşitsizlikleri **her** $M > 0$ için doğru olduğundan $M \to +\infty$ için limit olarak $+\infty \leq \frac{1}{\ell}.\overline{\lim}(b_n c_n) \leq +\infty$ ve böylelikle $0 < \ell \in \mathbb{R}$ olduğundan, istenen $\overline{\lim}(b_n c_n) = +\infty$ sonucu bulunur.

Yukarda kullanılan temel bilgiler şunlardır:

Bilgi1: Her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi ve herhangi sabit $n_0 \in \mathbb{N}$ için **daima** şu eşitlik geçerlidir: $\overline{\lim} x_n = \inf\limits_{n_0 \leq n} (\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\})$ olur. Gerçekten $\overline{\lim} x_n$ üst limit değeri **tüm** $\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ supremum değerlerini alttan sınırladığından, özel olarak her $N \geq n_0$ için $\overline{\lim} x_n \leq \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, ...\}$ bularak $\overline{\lim} x_n \leq \inf\limits_{n_0 \leq N} \sup\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, ...\}$ eşitsizliği elde edilir. Ters eşitsizlik zaten geçerlidir, çünkü kısalık amacıyla $A_n = \{x_n, n_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ yazılırsa $\{\sup A_{n_0}, \sup A_{n_0+1}, \sup A_{n_0+2}, ...\} \subseteq \{\sup A_1, \sup A_2, \sup A_3, ...\}$ $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$ olduğu, üstelik kapsayan kümenin infimumu kapsananınkinden **daima** eşit ya da küçük olduğundan (neden?)

$$\inf_{n_0 \leq n} (\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) = \inf_{n_0 \leq n} (\sup A_n) = \inf\{\sup A_{n_0}, A_{n_0+1}, ...\}$$
$$\leq \inf\{\sup A_1, \sup A_2, ...\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}) = \overline{\lim} x_n$$

ters eşitsizliği elde edilir, böylece istenen eşitlik bulunur.

Bilgi2: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri için eğer, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ x_n \leq y_n\ (\forall n \geq n_0)$ oluyorsa hem $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$ hem de $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$ olur. Gerçekten hipotez nedeniyle, **her** $n \geq n_0$ için $\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leq \sup\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$ bulup infimum alarak ve Bilgi1 kullanılarak

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{n_0 \leq n} (\sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}) \leq \inf_{n_0 \leq n} (\sup\{y_n, y_{n+1}, ...\}) = \overline{\lim} y_n$$

elde edilir. Bilgi1 ve Bilgi2'nin Bilgi3'ün kanıtlanmasında nerede kullanıldığını belirleyiniz.

5)

$i)$ Uygun $\ell \in \mathbb{R}^+$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n n^\alpha| = \ell$ ise,

$ii)$ Uygun $\ell, \alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n n^\alpha| = \ell$ ise,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı nedir, neden?

Çözüm: Aranan yakınsaklık yarıçapı $i)$ için $R = 1$ ve $ii)$ için $R = \alpha$ olarak kolayca belirlenir, çünkü örneğin $i)$ geçerliyken $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon < a_n n^\alpha < \ell + \varepsilon$ yani $\sqrt[n]{\frac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{\ell + \varepsilon}{n^\alpha}}$ bulunup, 4) şıkkının çözümündeki Bilgi2 yardımıyla, kolayca aşağıdaki bulunur:

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} . \sqrt[n]{\ell - \varepsilon}\right) &= \overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{\ell - \varepsilon}}{(\sqrt[n]{n^\alpha})} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &\leq \overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{\ell + \varepsilon}}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} . \sqrt[n]{\ell + \varepsilon}\right) = 1 \end{aligned}$$

6) Bir kuvvet serisi, yakınsaklık aralığının **her** kapalı alt aralığında **düzgün yakınsar,** gösteriniz.

Çözüm: Gerçekten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ise, bu seri, $x_0 = 0$ olduğundan $(-R, R) = (x_0 - R, x_0 + R)$ yakınsaklık aralığının, herhangi bir $[a, b](\subseteq (-R, R))$ kapalı alt aralığında düzgün yakınsar, çünkü $a \in [a, b] \subseteq (-R, R)$ nedeniyle $-R < a < R$ ve benzeriyle $-R < a < b < R$ ve sonuçta hem $|a| < R$ hem de $|b| < R$ bularak $|a| \vee |b| = M$ için kolayca $0 < M < R$ yani $M \in (0, R) \subseteq (-R, R)$ bularak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n M^n$ serisinin mutlak yakınsadığı, yani $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|.M^n < +\infty$ elde edilerek $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|.M^k \to 0$ ve tüm bunlardan herhangi bir $x \in [a, b]$ için

$$-R < -M = -(|a| \vee |b|) \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq |a| \vee |b| = M < R$$

ve sonuçta $|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k M^k = r_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve böylece $0 \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} |R_n(x)| \leq r_n \to 0$ nedeniyle istenen bulunur. $x_0 \neq 0$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisi için benzer sonuç geçerlidir.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ kuvvet serilerininki de yine R olur, gösteriniz.

Çözüm: Gerçekten $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif terimli dizileri için, eğer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ise $\overline{\lim}(a_n b_n) = \ell.\overline{\lim} b_n$ olur, çünkü $\varepsilon > a$ verildiğinde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ gerçekleştiğinden, $\ell \leq \varepsilon + a_n$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ ve b_n'ler pozitif olduğundan $\ell b_n \leq \varepsilon b_n + a_n b_n$ $(\forall n \geq n_\varepsilon)$ bularak $\ell.\overline{\lim} b_n = \overline{\lim}(\ell.b_n) \leq \overline{\lim}(\varepsilon b_n + a_n b_n) \leq \overline{\lim}(\varepsilon b_n) + \overline{\lim}(a_n b_n) = \varepsilon.\overline{\lim} b_n + \overline{\lim}(a_n b_n)$ eşitsizlikleri herbir $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan istenen bulunur, çünkü

eğer $\overline{\lim} b_n = +\infty$ ise $\overline{\lim}(a_n b_n) = +\infty = \ell.\overline{\lim} b_n$ olur(neden?)

eğer $\overline{\lim} b_n < +\infty$ ise son eşitsizliklerde $\varepsilon \to 0$ için limit alıp

$\ell.\overline{\lim} b_n \leq \overline{\lim}(a_n b_n)$ ve ters eşitsizlik bulunarak istenen çıkar. Oysa $\overline{\lim} \sqrt[n]{|n.a_n|} = \overline{\lim}(\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{|a_n|}) = (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}).(\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}) = 1.\frac{1}{R}$ sonucu biraz önce gösterilen bilgiden elde edilerek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|n.a_n|}}$ olarak bulunur. Öte yandan sonuncu seri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ olup, bunun yakınsaklık yarıçapı $\overline{\lim} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}).\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = 1.\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \overset{1}{=} \overline{\lim} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \overset{2}{=} \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} (= \frac{1}{R})$ nedeniyle istenen çıkar. Okuyucu (1) ve (2) eşitliklerini gösterebilmelidir.

8) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi $(-R, R)$ aralığında yakınsarsa $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $(\forall x \in (-R, R))$ geçerlidir.

Çözüm: Bu, Önerme7 ve yukardaki 7)'den elde edilir, sonuçta $f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ ve benzerleri yüksek mertebeden türevler için geçerlidir. (neden?).

9) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ kuvvet serisinin **heryerde** mutlak yakınsadığını ve $f'(x) = 1 + xf(x)$ gerçeklediğini gösteriniz, burada kısalık amacıyla $(2n+1)!! = 1.3...(2n+1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ yazılmaktadır.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{2n+1}{(2n+1)!!} = \frac{1}{(2n-1)!!}$ gözleyerek ve $8)$ kullanılarak $f'(x) = (x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!})' = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!} = 1 + xf(x)$ olur, çünkü $xf(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}$ olur.
Dikkat: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ kuvvet serisi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!!}} = 0$ böylelikle $\overline{\lim} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!!}} = 0$ nedeniyle **heryerde**, yani tüm $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak yakınsar çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!!}} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$ geçerlidir, çünkü

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{(2n+1)!!} &= \frac{1}{1.3...(2n+1)} = \frac{2.4...(2n)}{1.2.3.4...(2n)(2n+1)} = \frac{2^n.n!}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^n}{(n+1)(n+2)...(2n+1)} \leq \frac{2^n}{(n+1)(n+1)...(n+1)} = \frac{2^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{2^n}{(n+1)^n} \end{aligned}$$

olur, oysa $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}} = 0$ olduğundan(neden?) istenen bulunur.

10) $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ heryerde mutlak yakınsar ve $g''(x) + g'(x) + g(x) = e^x$ gerçekler, gösteriniz.

Çözüm: $g(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ ve $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $g''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ nedeniyle bunların toplamı $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!}) = 1 + (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}) + (\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}) + ... = e^x$ olur.
11) Genelleştirilmiş Devşirim sayılarını tanımlayıp, her $0 \neq \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ sabiti için $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $R = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Matematikte **her** $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\binom{\alpha}{0} = 1$ ve ayrıca

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlanan gerçel sayılara α'nın **genelleştirilmiş devşirim sayıları** denir. Örneğin

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(-\frac{2n-1}{2}) = (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2^n.n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \\ \binom{-1}{n} &= \frac{1}{n!}(-1)(-2)...(-n) = (-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n \\ \binom{\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha \in \mathbb{N}$ ise bu alışılagelen devşirim sayısıdır. Şimdi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1)))}{(n+1)!} . \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |\frac{n-\alpha}{n+1}| = 1 \qquad \text{ve}\end{aligned}$$

$$1 = \underline{\lim} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} \le \underline{\lim} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|} \le \overline{\lim} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|} \le \overline{\lim} \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = 1$$

gözleyerek $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|} = 1$ ve böylelikle $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı aşağıdakidir.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|\binom{\alpha}{n}|}} = 1$$

Kısacası $\forall x \in (-1,1)$ için $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ fonksiyon serisi $(-1,1)$ açık aralığının her kapalı alt aralığında **düzgün yakınsar**, böylelikle, ilerde gözleneceği gibi $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n (\forall x \in (-1,1))$ açılımı $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ ne olursa olsun geçerli olduğu anlaşılacağından, özel olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \qquad (\forall x \in (-1,1)) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad (\forall x \in (-1,1))\end{aligned}$$

sonuçları bulunur.

12) Yakınsaklık yarıçapı $0 < R$ olan $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinde, her $n \ge 0$ için katsayıların $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ olduğunu gösterin.

Çözüm: Tıpkı 8) çözümünde olduğu gibi, her $k \ge 0$ için
$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n(n-1)...(n-(k-1)))a_n x^{n-k} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-(k-1))a_n x^{n-k}$
$= k!.a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)...(n-(k-1))a_n x^{n-k}$ $(\forall x \in (-R,R))$ ve
$g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1)...(n-(k-1))a_n x^{n-k} = (k+1)!.a_{k+1}x + (k+2)!.\frac{a_{k+2}}{2!}x^2 + ...$ nedeniyle $g(0) = 0$ olduğundan $f^{(k)}(0) = k!.a_k$ bulunur.

13) Yakınsaklık yarıçapları aynı $R > 0$ olan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kuvvet serilerinin eşit olmaları yani her $x \in (-R,R)$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ gerçeklenebilmesi için gyk $a_n = b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmasıdır.

14) Her $x \in (-1,1)$ için $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$ ise $|f'(x)| < \frac{2}{1-|x|}$ $(\forall x \in (-1,1))$ olur.

Çözüm: $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2^n}$ nedeniyle $f'(0) = 1 < 2$ bularak iddianın $x = 0$ için doğru olduğu görülür.

Şimdi $0 < |x| < 1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{1-|x|} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ bilgisiyle ve aşağıda kanıtlaması verilen ünlü Mertens Teoreminden yararlanarak

$$\tfrac{|x|}{1-|x|}.|f'(x)| < \tfrac{2|x|}{(1-|x|)^2} \quad (0 < |x| < 1)$$

göstermek güç değildir. Çözümün sağlıklığı açısından önce şunları görelim:

Önerme 14: Pozitif terimli olmaları gerekmeyen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ serilerinin birincisi mutlak yakınsak, ikincisi yakınsaksa, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ $(\forall n \geq 0)$ olmak üzere, aşağıdaki geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + ... + a_n r_0) = 0.$$

Kanıtlama: $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ olmak üzere $r_n = B - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ ve $r_n \to 0$ olduğundan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsar, her yakınsak dizi gibi sınırlıdır, kısacası $\exists M > 0,\ |r_n| \leq M\ (\forall n \geq 0)$ olur. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi mutlak böylece $0 \leq S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak olduğundan $0 \leq S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ olur ve $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \to S$ gerçeklendiğinden, yakınsak $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur ve $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ nedeniyle, sonuçta

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_\varepsilon \text{ için } |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ve } |r_n| < \frac{\varepsilon}{2(S+1)}$$

olur, böylece her $n > n_\varepsilon$ için $\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| = |s_n - s_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2M}$ ve ayrıca her $n \geq 2n_\varepsilon$ için $n \geq n - n_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ nedeniyle $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2(S+1)}, ..., |r_{n-n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2(S+1)}$ bularak, sonuçta

$$|a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + ... + a_n r_0| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||r_{k-n}| = \sum_{k \leq n_\varepsilon} |a_k||r_{n-k}| + \sum_{n_\varepsilon < k \leq n} |a_k||r_{n-k}|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(S+1)}.\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |a_k| + M.\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon.S}{2(S+1)} + \frac{\varepsilon.M}{2M} < \varepsilon\ (\forall n \geq 2n_\varepsilon)$$

bulunur, çünkü $\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |a_k| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = S$ geçerlidir, bu sonuç istenendir.

Teorem14 (Mertens Teoremi): Önceki önermedeki seriler için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)$$

Kanıtlama: $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ve her $n \geq 0$ için $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ ve $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$ yazılıp $B = B_n + r_n$ yani

$B_n = B - r_n$ gözleyerek her $N \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{N}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k} + \sum_{k=0}^{1} a_k b_{1-k} + ... + \sum_{k=0}^{N} a_k b_{N-k}$$

$$= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + ... + (a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + ... + a_N b_0)$$

$$= a_0(b_0 + b_1 + ... + b_N) + a_1(b_0 + b_1 + ... + b_{N-1}) + ... + a_N b_0 = a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + ... + a_N B_0$$

$$= a_0(B - r_N) + a_1(B - r_{N-1}) + ... + a_N(B - r_0) = B.\sum_{k=0}^{N} a_k - (a_0 r_N + a_1 r_{N-1} + ... + a_N r_0)$$

ve sonuçta istenen sonuç, bir önceki Önerme kullanılıp bulunur:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}) = B.\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \lim_{N\to\infty}(a_0 r_N + a_1 r_{N-1} + ... + a_N r_0)$$

$$= B.\sum_{n=0}^{\infty} a_n = B.A = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n).(\sum_{n=0}^{\infty} b_n).$$

Örnekler 13: 1)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{(n!)^2} x^{2n} \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

ve ayrıca

$$\sqrt{e^5} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}\right)$$

eşitliklerini gösteriniz.

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ kuvvet serisi **her** $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar, çünkü bu seride $a_{2n} = \frac{1}{(n!)^2}$, $a_{2n-1} = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ olur. O halde Mertens Teoremi kullanılarak ve üstelik

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

eşitliğinden yararlanarak ($(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ eşitliğinde x'lerin katsayılarını eşitleyerek bu sonucu elde edebilirsiniz aşağıdaki **Bilgi**'ye bkz.) şunlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2}.(-1)^{n-k}\frac{x^{2n-2k}}{((n-k)!)^2}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!(n-k)!}\right)^2\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2}.\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2\right))\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{(n!)^2}x^{2n}\ (\forall x\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

İkinci eşitlik için, yine Mertens Teoremi kullanılarak

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\frac{1}{2^{n-k}(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\frac{1}{2^{n-k}}\right]$$

ve üstelik $(\frac{5}{2})^n=(2+\frac{1}{2})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\frac{1}{2^{n-k}}$ nedeniyle $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{5}{2})^n=e^{\frac{5}{2}}=\sqrt{e^5}$ bulunur.

Bilgi:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\qquad(\forall n\in\mathbb{N})$$

bağıntısının kanıtlaması şöyle verilebilir:

$$\forall x\in\mathbb{R}\text{ için }(1+x)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

olduğundan, kolayca aşağıdaki polinomlar eşit olur:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(1+x)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}x^{k+i}
\end{aligned}$$

ve her iki yanda x^n'in katsayılarını eşitleyerek

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \sum_{k+i=n} \binom{n}{k}\binom{n}{i} &= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\end{aligned}$$

bulunur, çünkü bilindiği gibi devşirim sayıları her $0 \leq k \leq n$ için

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

eşitliğini gerçekler.

2) $0 < a < 1$ için $0 < \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n\right) . \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a^{2^n}\right) \leq \frac{2a}{(1-a)^2}$ gösterelim.

Dikkat: Çarpıma katılan pozitif terimli her iki seri de yakınsar, çünkü birincisi yakınsak olduğundan, ikincisi ünlü Cauchy Sıklaştırma Teoremi ile yakınsaktır. Şimdi Mertens Teoremini uygulmak için $a_n = a^n, b_{2^n} = 2^n a^{2^n}$ ve tüm öteki b_N katsayıları $b_N = 0$ alınsın. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için, öncelikle

$$\sum_{k=0}^{[\log_2 n]} 2^k < 2n$$

göstermek yeterlidir. $N = [\log_2 n]$ tam kısmı $0 \leq N \leq \log_2 n < N+1,\ 2^N \leq n < 2^{N+1}$ ve sonuçta $n+1 \leq 2^{N+1}$ yani $n \leq 2^{N+1} - 1$ nedeniyle $2^{N+1} - 1 < 2n$ gerçekler, çünkü eğer $2n \leq 2^{N+1} - 1$ OLSAYDI $2^N \leq n < 2n \leq 2^{N+1} - 1$ böylelikle $n = 2n - n \leq 2^{N+1} - 1 - 2^N = 2^N - 1 < 2^N$ olurdu, oysa $2^N \leq n$ bilinmektedir. O halde

$$\sum_{k=0}^{[\log_2 n]} 2^k = \sum_{k=0}^{N} 2^k = 2^0 + 2^1 + ... + 2^N = \frac{2^{N+1} - 1}{2 - 1} = 2^{N+1} - 1 < 2n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

bulunur. b_n gerçel sayılarının yalnızca 2^m indislileri **sıfırdan farklı olduğundan**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k+m=n} a_k.b_m = a_{n-2^0} b_{2^0} + a_{n-2^1} b_{2^1} + ... + a_{n-2^N} b_{2^N} \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_{n-2^k} b_{2^k} = \sum_{k=0}^{N} a^{n-2^k} 2^k a^{2^k} = a^n. \sum_{k=0}^{N} 2^k < 2na^n\end{aligned}$$

ve böylelikle Mertens Teoremi ile

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a^n\right) . \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^n a^{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}\right) < 2. \sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{2a}{(1-a)^2}$$

bulunur, çünkü iyi bilindiği gibi

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (\forall x\in(-1,1))$$

nedeniyle, bu kuvvet serisi yakınsaklık aralığında terim terime türetilerek

$$\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\quad,\quad \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\quad,\quad \frac{x\,(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$$

eşitliklerinin, **her** $x\in(-1,1)$ için geçerli olduğu anlaşılır. **Dikkat:** Yukarda $\sum_{k+m=n}a_k.b_m$ toplamına katılan $b_m\neq 0$ sayılarının indislerinin elbette $m\leq k+m=n$ kısacası $m\leq n$ olması gereken 2^i türünde özel doğal sayılar olması gerektiğinden, bu m'lerin $2^0,2^1,...,2^N(\leq n)$ olduklarına özellikle dikkat edilmiştir.

3) Örnek12.14)'ün çözümünü tamamlayınız.

Çözüm: Sözü edilen örnekte $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^{2^n-1}$ ve böylece $xf'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^{2^n}$ olduğundan $|xf'(x)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}2^n|x|^{2^n}$ ve sonuçta her $0<|x|<1$ için, bir önceki örnekte eldeedilen sonuç kullanılırsa

$$\frac{|x|}{1-|x|}.|f'(x)|=\frac{1}{1-|x|}.|xf'(x)|\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^n|x|^{2^n}\right)<\frac{2|x|}{(1-|x|)^2}$$

istenen sonuç bulunur.

4) Mertens Teoremi, birisi mutlak yakınsak olan, iki yakınsak seriye uygulandığından, özellikle yakınsaklık yarıçapının belirlediği aralıkta mutlak yakınsak olan kuvvet serilerine uygulanır. Sözgelimi

$$e^x.e^y=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}$$

bulunur, çünkü her $n\geq 0$ için aşağıdaki geçerlidir:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.y^{n-k}=\frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Ayrıca $\sin 2x=2\sin x\cos x$ özdeşliğini de Mertens Teoreminden elde etmek güç değildir, çünkü ünlü $\binom{n}{k}=\frac{n}{k!.(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$ bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2(n-k)}\\&=\binom{2n+1}{2n}+\binom{2n+1}{2n-2}+...+\binom{2n+1}{0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\end{aligned}$$

ve böylece, ünlü $2^n=(1+1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ eşitliğiyle

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\right]\\&=\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\frac{2^{2n+1}}{2}\end{aligned}$$

bularak bu sonuç aşağıda $(*)$ eşitliğinde kullanılırsa aşağıdakiler bulunur:

$$\sin x.\cos x=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$\begin{aligned}\sin x.\cos x&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.(-1)^{n-k}\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}.\frac{1}{(2k+1)!(2n-2k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}.\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}.\binom{2n+1}{2k+1}\right)\overset{*}{=}\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{\sin 2x}{2}.\end{aligned}$$

Sondan bir önceki adımda $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$ $(\forall x\in\mathbb{N})$ gerçeği kullanıldı. Siz, Mertens Teoreminden yararlanarak $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ ve $(\cos x)^2-(\sin x)^2=\cos 2x$ özdeşliklerini gösteriniz. **Bilgi:**

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+...+\binom{2n}{2n-2}+\binom{2n}{2n}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+...+\binom{2n}{2n-3}+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1}$$

eşitlikleri her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir, çünkü

$$0 = (1 + (-1))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$$

böylece

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = \frac{2^{2n}}{2}.$$

Dikkat: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \frac{2^{2n}}{2}$ iddiası $n = 0$ için **yanlıştır!**

Örnek: Mertens Teoremini kullanarak ünlü

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

özdeşliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{n-k} \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+2)!}{(2k+1)!(2n-2k+1)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} . \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1 - \cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. **Bilgi** nedeniyle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{2n+2}{2k+1} = 2^{2n+1} = \frac{2^{2n+2}}{2}$ ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = (\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + (-1)) + 1 \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \cos 2x
\end{aligned}$$

Bu bölümde son olarak; çok-sık rastlanılan kuvvet serileri olan **Taylor serileri**'yle ilgilenelim.

Önerme 15: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ve $x_0 \in (-R, R)$ ise $\delta_0 =$

$R - |x_0| > 0$ olmak üzere, aşağıdakiler geçerlidir:

$$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \text{ için } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.(x - x_0)^n$$

Kanıtlama: Riemann'ın ünlü bir teoremi, bilindiği gibi, eğer çift indisli $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}$ serisi **mutlak yakınsaksa**, $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$ gerçekleştiğini söyler. Oysa herbir $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \binom{n}{m}(x - x_0)^m x_0^{n-m}$ çift indisli serisi mutlak yakınsar, yani

$$0 \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_n|\left|\binom{n}{m}\right|(x - x_0)|^n|x_0|^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{\infty} |a_n|\left|\binom{n}{m}\right|(x - x_0)|^n|x_0|^{n-m}) < +\infty$$

olur, çünkü $m \ge n$ için $\binom{n}{m} = 0$ olduğundan

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_n|\left|\binom{n}{m}\right|(x - x_0)|^m|x_0|^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} |a_n|\left|\binom{n}{m}\right|(x - x_0)|^n|x_0|^{n-m} \text{ ve}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{\infty} |a_n|\left|\binom{n}{m}\right|(x - x_0)|^n|x_0|^{n-m}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x - x_0| + |x_0|)^n < +\infty$$

bulunur, çünkü herbir $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ için $|x - x_0| < \delta_0 = R - |x_0|$ ve böylelikle $0 < y_x = |x - x_0| + |x_0| < R$ olur ve $|y| < R$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ serisi mutlak yakınsak yani $0 \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||y|^n < +\infty$ olmaktadır. Böylelikle, herbir $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ için Riemann'ın sözü edilen teoremiyle

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left((x - x_0) + x_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n.\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(x - x_0)^m x_0^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_n\binom{n}{m}(x - x_0)^m x_0^{n-m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\binom{n}{m}x_0^{n-m}\right)(x - x_0)^m \end{aligned}$$

olur, burada her $m \in \mathbb{N}$ için $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\binom{n}{m}x_0^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n\binom{n}{m}x_0^{n-m}$ yazıp $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - x_0)^m$ ve dolayısıyla Örnek12.12)'de yazıldığı gibi $f^{(m)}(x_0) = m!.b_m$ $(\forall m \ge 0)$ bularak aşağıdaki istenen sonuç elde edilir:

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} = b_m = \sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}a_n x_0^{n-m},\ f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m,$$

Teorem 15: Bir Taylor serisinin yakınsayabilmesi için aşağıdakilerin herbiri bir **yeter koşuldur:**

1) $f \in C^{\infty}[a,b],\ \exists M > 0,\ |f^{(n)}(x)| \leq M \qquad (\forall x \in [a,b]),$

2) $f \in C^{\infty}(a,b)$ ve $0 \leq f^{(n)}(x) \qquad (\forall n \geq 0,\ \forall x \in (a,b)),$

3) $f \in C^{\infty}(a,b)$ ve $\forall x_0 \in (a,b),\ \exists c_0 > 0\ \exists M_0 > 0,\ \exists \delta_0 > 0\ |f^{(n)}(x)| \leq \dfrac{M_0 n!}{c_0^n}\ (\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0))$

ise $0 < \delta < \delta \wedge c_0$ için $f(x) = \sum \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\ (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$

Kanıtlama: Bilindiği gibi $f \in C^{\infty}[a,b]$ ve $x_0 \in [a,b]$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [a,b]$ Taylor açılımı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

geçerlidir. Verilen yeterlik koşullarının herbirinin $R_n(x) \to 0$ sonucunu verdiği gözlenebilir, burada **artık terim** ya da **kalan terim** denilen $R_n(x)$ için, x'e bağlı uygun bir $\varepsilon_x \in (0,1)$ aracılığıyla

Lagrange yazılışı: $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \varepsilon_x(x - x_0))}{(n+1)!}.(x - x_0)^{n+1}$$

Cauchy yazılışı: $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \varepsilon_x(x - x_0))}{n!}.(1 - \varepsilon_x)^n (x - x_0)^{n+1}$$

Tümlevli yazılış: $$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t).(x - t)^n dt$$

yazılışları geçerlidir. Şimdi $1)$ yeter koşulu geçerliyse

$$0 \leq |R_n(x)| = |f^{(n+1)}(x_0 + \varepsilon_x(x - x_0))|.\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M.\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

bulunur, çünkü her $y \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|y|^n}{n!} = 0$ geçerlidir.(neden?). Eğer $2)$ yeter koşulu geçerliyse, her $x \in [a,b]$ ve her $n \geq 0$ için $0 \leq f(x)$ ve $0 \leq f^{(n)}(x)$ olduğundan, $b - x_0 \geq 0$ nedeniyle $0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(b - x_0)^k$ olduğundan, öncelikle

$$R_n(b) \leq R_n(b) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(b - x_0)^k = f(b) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olur, ayrıca $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x - a)^k + R_n(a)$ olup uygun değişken dönüşümüyle, $t \in [a,x]$ nedeniyle uygun bir $u \in [0,1]$ sayesinde $t = (x-a)u + a$ olduğundan, tümlevli kalan terim için

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t).(x-t)^n dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (f^{(n+1)}((x-a)u+a)).(1-u)^n du \end{aligned}$$

olur, oysa hipotez gereği $0 \leq f^{(n+2)}(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ nedeniyle, türevinin işareti negatif olmadığından $f^{(n+1)}$ fonksiyonu tekdüze azalmayandır, böylelikle her $t \in [0,1]$ için $(x-a)t + a \leq (b-a)t + a$ ve $f^{(n+2)}((x-a)t+a) \leq f^{(n+1)}((b-a)t+a)$ ve ayrıca

$$\begin{aligned} &R_n(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+2)}((b-a)t+a).(1-t)^n dt, \\ &0 \leq R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+2)}((x-a)t+a).(1-t)^n dt \\ &\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((b-a)t+a).(1-t)^n dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}.R_n(b) \end{aligned}$$

ve böylece $0 \leq R_n(x) \leq |\frac{x-a}{b-a}|^{n+1}.R_n(b) \leq |\frac{x-a}{b-a}|^{n+1}.f(b)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ elde edilip yine istenen $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ sonucuna ulaşılır. 3) koşulu altında aynı sonucu bulmak size ödevdir. Kısacası tüm bu koşulların herbiri, x_0'ın uygun bir komşuluğunda, $R_n(x) \to 0$ nedeniyle

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylor serisi elde edilir.

Örnekler 14: 1) Her $x \in (-1,1]$ için $\ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ geçerlidir, çünkü her $x \in (-1,1)$ için $f(x) = \ell n(1+x)$ tanımlanırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{(-1)^n.n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ ve } f^{(n)}(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

bulunur. O halde $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ ve $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ bulunur. Ayrıca herhangi bir $x_0 \in (-1,1)$ alındığında uygun bir $\delta_0 > 0$ aracılığıyla $-1 < x_0 - \delta_0 < x_0 + \delta_0 < 1$ yani $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq (-1,1)$ olur ve herbir $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ için $0 < c_0 = 1 + (x_0 + \delta_0) < 1 + x$ ve $\frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{c_0^n}$ ve $|f^{(n)}(x)| = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} < \frac{n!}{c_0^n}$ bulunarak, Teorem13'deki 3) yeter koşulunun gerçekleştiği ve sonuçta $f(x) = \ell n(1+x)$ fonksiyonunun $x_0 \in (-1,1)$ noktasının uygun bir komşuluğunda geçerli olan $\ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+x_0)^n}(x-x_0)^n$ açılımı bulunur, özel olarak $x_0 = 0$ alınarak $\ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ elde edilir. Bu serinin $(-1,1)$ aralığında mutlak yakınsadığını ve $x = 1$ noktasında yakınsadığını gözleyiniz.

2) Her $x \in (-1,1)$ ve $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{N}$ için $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ olur, çünkü her $x \in (-1,1)$ için $0 < 1+x$ gözleyip $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ tanımlanırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} = \binom{\alpha}{n}.n!(1+x)^{\alpha-n}$$

ve böylece $|f^{(n)}(x)| = |\binom{\alpha}{n}|.n!(1+x)^{\alpha-n} \leq M_{\alpha}.2^{\alpha}n!$ bulunur, çünkü $n_0 = [\alpha]+1$ doğal sayısı tanımlanıp $\alpha < [\alpha]+1 = n_0$ gözlenip, $M_{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n_0-1))}{(n_0-1)!}$ yazılırsa her $n > n_0$ için

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = M_{\alpha}.\frac{(n_0-\alpha)((n_0+1)-\alpha)...(n-\alpha)}{n_0(n_0+1)...n} = M_{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n_0}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n_0+1}\right)...\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) < M_{\alpha}$$

ve apaçık biçimde $(1+x)^{\alpha-n} < 2^{\alpha-n} < 2^{\alpha}$ gözleyerek $|f^{(n)}(x)| \leq 2^{\alpha}M_{\alpha}.n!$ bulunup Teorem13'deki son yeter koşul kullanılır.

3) Aşağıdaki ünlü açılımları elde ediniz:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}), \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}.\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}), \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}), \\
\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (\forall x(-1,1)), \\
\frac{1}{2-x} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \qquad (\forall x \in (-2,2)), \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \\
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Burada, üçüncüsü için $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, dördüncüsü için $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)$ beşincisinde ise $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ özdeşliğinden yararlanınız.

4) Aşağıdaki toplamları hesaplayınız:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}, \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

Çözüm: Her $x \in (-1,1)$ için $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ olduğu bilindiğinden, sayfa 73 'deki **Abel Toplanabilme Teoremi** nedeniyle, birinci serinin $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ olduğu görülür. İkinci toplam $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \ln 4 - 1$ olarak bulunur, çünkü $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ve sonuçta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2$ böylece ikinci toplam $\ln 2 - (1 - \ln 2) = 2.\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 > 0$ olarak hesaplanır. Üçüncü toplam, her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{2n}{(2n+1)!}$ ve $\frac{n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}]$ nedeniyle

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1)$$

olarak belirlenir. Sonuncusu için $\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2})$ gözleyip toplamı $\frac{\ln 4}{3} - \frac{5}{18}$ olarak hesaplayınız. (nasıl?)

5) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ olup $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ eşitliğinin **yalnızca** $x = 0$ noktasında geçerli olduğu f fonksiyonlarının var olduğunu gösteriniz.

Çözüm:$f(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu ile her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n^2x)}{e^n}$ biçiminde tanımlanan g fonksiyonu istenilen niteliktedir. f fonksiyonu her $n \geq 0$ için $f^{(n)}(0) = 0$ gerçekler, örneğin her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^{\alpha}}{e^y} = 0$ bilgisiyle

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y}}{e^y} = 0$$

gözleyerek

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ve dolayısıyla $f''(0)$ için $f''(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2}{h^4}.\frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}} = 2\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^2}{e^y} = 0$ bulunarak

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} (\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4})e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Tümevarımla $x \neq 0$ için, der$p_n = 3n$ gerçekleyen uygun bir p_n polinomu aracılığıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}).e^{-\frac{1}{2}}$ ve $f^{(n)}(0) = 0$ görülür. O halde her $x \neq 0$ için $f(x) = e^{-\frac{1}{2}} > 0$ olduğu ve fakat $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ nedeniyle, f fonksiyonu **her noktada** sonsuz mertebeden türetildiği halde $x \neq 0$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ gerçekleşmesi söz konusu **olmaz.** g fonksiyonu ise $g'(x) =$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}\sin n^2x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ ve aslında

$$g^{(2n-1)}(0)=0,\ g^{(2n)}(0)=(-1)^n.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^{4n}}{e^m}\qquad(\forall n\in\mathbb{N})$$

olur(neden?). O halde her $m\in\mathbb{N}$ için $|g^{(2n)}(0)|=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^{4n}}{e^k}\geq\frac{m^{4n}}{e^m}$ ve $\frac{|g^{(2n)}(0)|x^{2n}}{(2n)!}>\frac{|g^{(2n)}(0)|x^{2n}}{(2n)^{2n}}>\frac{1}{e^m}.(\frac{m^2x}{2n})^{2n}=\frac{1}{e^m}(\frac{m^2|x|}{2n})^{2n}$ eşitsizlikleri **her** $m\in\mathbb{N}$ ve her $x\neq 0$ için geçerli olduğundan, $n_x=\left[\frac{e}{|x|}\right]+1$ tam sayısı ve yukardaki eşitsizlikler $n\geq n_x$ olmak üzere $m=2n$ için yazılırsa

$$\frac{|g^{(2n)}(0)|x^{2n}}{(2n)!}>\frac{1}{e^{2n}}.(2nx)^{2n}=\left(\frac{2n|x|}{e}\right)^{2n}>\left(\frac{2n_x|x|}{e}\right)^{n}>1\ (\forall n\geq n_x)$$

olur, böylece $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$ serisi **ıraksar,** çünkü genel terimi sıfıra yakınsamamaktadır. Bu iki **karşıt örnek Teorem13'ün** önemini açığa çıkartır, (neden?)

Bölüm 2

Fourier Serileri

Önce gerektiği için $C[a,b]$ vektör uzayı ile ilgilenelim. $C[a,b]$ kümesi, tüm gerçel değerli ve sürekli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesidir. $f,g\in C[a,b]$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ne olursa olsun $(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)(\forall x\in[a,b])$ biçiminde tanımlanan $\alpha f+\beta g$ fonksiyonu da sürekli olduğundan, sonuçta $\alpha f+\beta g\in C[a,b]$ bulunur ve $C[a,b]$ kümesi bu işlemler altında $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir **vektör uzayı** olur. Toplama işleminin etkisiz elemanı ise sıfır sabit fonksiyonu olup $f(x)=0\,(\forall x\in[a,b])$ biçiminde tanımlanır. $f\in C[a,b]$ elemanının toplama işlemine göre tersi, apaçık biçimde $(-f)(x)=-f(x)\,(\forall x\in[a,b])$ şeklinde tanımlanan $-f\in C[a,b]$ elemanıdır. Öte yandan $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon **Riemann tümlevlenebilir**(integrallenebilir) olduğundan, her $f\in C[a,b]$ için $\int_a^b f(x)dx$ gerçel sayısı iyi tanımlıdır. Öte yandan $f,g\in C[a,b]$ için $(f.g)(x)=f(x).g(x)\,(\forall x\in[a,b])$ biçiminde tanımlanan $f.g$ ya da kısaca fg fonksiyonu da gerçel değerli, sürekli olduğundan

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx\in\mathbb{R}$$

iyi tanımlıdır ve üstelik

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,g\rangle &= \alpha_1\int_a^b f_1(x)g(x)dx+\alpha_2\int_a^b f_2(x)g(x)dx\\ &= \alpha_1\langle f_1,g\rangle+\alpha_2\langle f_2,g\rangle \qquad ,\end{aligned}$$

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=\langle g,f\rangle$$

ve sonuçta

$$\langle f,\beta_1 g_1+\beta_2 g_2\rangle=\langle\beta_1 g_1+\beta_2 g_2,f\rangle=\beta_1\langle g_1,f\rangle+\beta_2\langle g_2,f\rangle=\beta_1\langle f,g_1\rangle+\beta_2\langle f,g_2\rangle$$

bulunur. $\langle f,g\rangle$ gerçel sayısına , $C[a,b]$ vektör uzayında f ve g elemanlarının **iç çarpım** değeri ve ayrıca

$$\|f\|_t=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}=\sqrt{\int_a^b|f(x)|^2\,dx}$$

gerçel sayısına ise $f \in C[a,b]$ elemanının **tümlev normu** denir. Daima $0 \leq f^2(x)(\forall x \in [a,b])$ olduğu ve $[a,b]$ aralığında negatif olmayan değerler alan sürekli bir fonksiyonun Riemann tümlevi asla **negatif olmadığından** $0 \leq \int_a^b f^2(x)dx$ ve böylece $\|f\|_t = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \geq 0$ bulunur. Dikkat: $f \in C[a,b]$ ise

$$\|f\|_t = 0 \text{ için g.y.k. } f = 0 \text{ yani } f(x) = 0\,(\forall x \in [a,b]) \text{ olmasıdır.}$$

çünkü eğer $0 = \|f\|_t$ iken $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) \neq 0$ olsaydı, $0 < f^2(x_0)$ olur ve $\exists \varepsilon_0 > 0, 0 < f^2(x_0) - \varepsilon_0$ bulunur ve f^2 sürekli olduğundan, uygun bir $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap [a,b]$ aralığındaki (dikkat: bu kesişim bir aralıktır (neden?)) tüm x gerçel sayıları için $0 < f^2(x_0) - \varepsilon_0 < f^2(x)$ bulunur, sonuçta $0 \leq f^2$ unutmadan, uygun bir $c < d$ ve $x_0 \in [c,d] \subseteq [a,b]$ aralığında $f^2(x_0) - \varepsilon_0 < f^2(x)$ $(\forall x \in [c,d])$ nedeniyle $0 < (d-c)(f^2(x_0) - \varepsilon_0) \leq \int_c^d f^2(x)dx \leq \int_a^b f^2(x)dx = \|f\|_t^2 = 0$ çelişkisi doğardı. Ayrıca $(-f(x))^2 = f^2(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ nedeniyle $\|-f\|_t = \|f\|_t =$ olur. Dikkat edilirse $f \in C[a,b]$ elemanının supremum normu, her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq \|f\|_{sup}$ ve böylelikle $|f(x)|^2 \leq \|f\|_{sup}^2$ ve $\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \|f\|_{sup}^2 \int_a^b dx = (b-a).\,\|f\|_{sup}^2$ gerçeklediğinden, $M_0 = \sqrt{b-a}$ yazılmak üzere $\|f\|_t = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx} \leq M_0\,\|f\|_{sup}$ kısacası

$$\exists M_0 > 0, \|f\|_t \leq M_0\,\|f\|_{sup}\,(\forall f \in C[a,b])$$

bulunur; oysa her $f \in C[a,b]$ için $\|f\|_{sup} \leq M\,\|f\|_t$ olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti kesinlikle **belirlenemez**, çünkü eğer belirlenebilseydi $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_t = 0$ olduğunda $0 \leq \|f_n - f\|_{sup} \leq M\|f_n - f\|_t\,(\forall n \in \mathbb{N})$ varsayıldığından, zorunlu olarak $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{sup} = 0$ olması gerekirdi. Oysa aşağıda yer alan önermede kanıtlanacağı gibi, bunun gerçekleşmediği bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyonlar dizisi ve $f \in C[a,b]$ **vardır**. Bu nedenle bu normlar **eşdeğer değildir**(topoloji diliyle söylersek, aynı metrik topolojiyi **belirlemezler**!).

Önerme 1: $C[0,1]$ üzerinde tanımlı tümlev ve supremum normları için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_t = 0 \quad ve \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_{\text{sup}} = 1$$

gerçekleyen bir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi **vardır**.

Kanıtlama: Önce $[0,1]$ aralığının her $n \in \mathbb{N}$ için

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right] \cup \ldots \cup \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right] = \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$$

olarak yazıldığını gözlemleyelim. $0 \in \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \subseteq \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ ve benzer biçimde $1 \in \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right] \subseteq \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ apaçıktır. Şimdi herhangi bir $x \in (0,1)$ için $0 < 2^n x < 2^n$ ve $0 \leq k_x = [2^n x]$ tam kısmı

$0 \leq k_x \leq 2^n x < k_x{+}1$ ve $k_x \leq 2^n x < 2^n$ ve $\frac{k_x}{2^n} \leq x < \frac{k_x+1}{2^n}$ yani $x \in \left[\frac{k_x}{2^n}, \frac{k_x+1}{2^n}\right) \subseteq \left[\frac{k_x}{2^n}, \frac{k_x+1}{2^n}\right] \subseteq \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ bulunarak kolayca $[0,1] \subseteq \bigcup_{0 \leq k < 2^n} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ kapsaması elde edilir. Ters kapsama kolaydır, çünkü her $0 \leq k < 2^n$ için $0 \leq \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leq 1$ geçerlidir. Şimdi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın. Dikkat edilirse tüm doğal sayılar

$$1, 2^1, 2^1+1, 2^2, 2^2+1, 2^2+2, 2^2+3, 2^4, 2^4+1, \ldots$$

olduğundan, her $1 \leq N \in \mathbb{N}$ için, $N = 2^n{+}k$ gerçeklenecek biçimde tek türlü belirli bir $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k < 2^n$ tam sayı ikilisi var olduğundan, f_N fonksiyonu $[0,1]$ aralığında

$$f_N(x) = f_{2^n+k}(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \left[0, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{2k+3}{2^{n+1}}, 1\right] \\ 2^{n+1}x - (2k-1) & ; x \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}\right] \\ 1 & ; x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \\ -2^{n+1}x + (2k+3) & ; x \in \left[\frac{k+1}{2^n}, \frac{2k+3}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. f_N süreklidir, çünkü sözgelimi $1 = f_N\left(\frac{k}{2^n}\right) = f_N\left(\frac{k}{2^n}-\right) = f_N\left(\frac{k}{2^n}+\right)$ geçerlidir, çünkü

$$f_N\left(\frac{k}{2^n}-\right) = \lim_{x \to \left(\frac{k}{2^n}\right)^-} f_N(x) = \lim_{x \to \frac{k}{2^n}} \left(2^{n+1}x - (2k-1)\right) = \frac{2^{n+1}k}{2^n} - (2k-1) = 1$$

geçerlidir. Şimdi kısalık amacıyla $r_{k,n} = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$ ve $p_{k,n} = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}}$ rasyonel sayılarını tanımlayarak

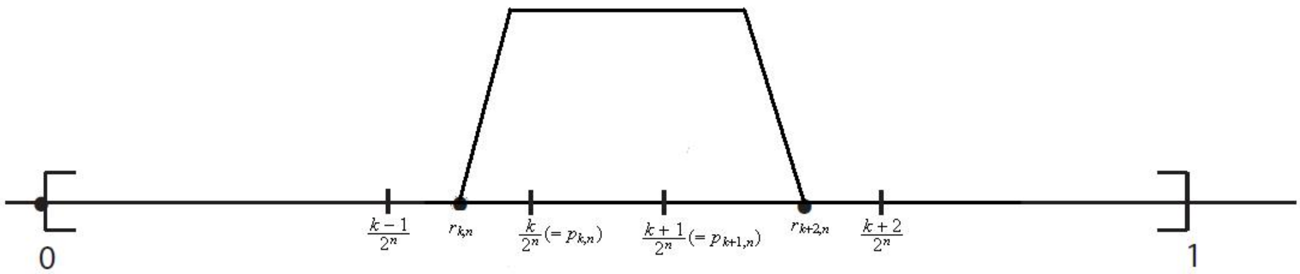
$$1 < N \in \mathbb{N}, \qquad \|f_N - 0\|_t = \|f_N\|_t = \sqrt{\int_0^1 |f_N(x)|^2 \, dx} \leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^n}$$

gözlemek kolaydır, çünkü $0 \leq f_N \leq 1$ ve yalnızca $[r_{k,n}, r_{k+2,n}]$ aralığında $f_N \neq 0$ olduğundan

$$\int_0^1 f_N^2(x)dx = \int_{r_{k,n}}^{r_{k+2,n}} f_N^2(x)dx \leq \int_{r_{k,n}}^{r_{k+2,n}} 1dx = r_{k+2,n} - r_{k,n} = \frac{4}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^n}$$

bulunur. $1 < N$ için $f_N = f_{2^n+k}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdadır.

O halde $N(= 2^n + k) \to +\infty$ için g.y.k. $n \to \infty$ olduğundan (neden?), sonuçta $0 \leq \lim_{N\to\infty} \|f_N - 0\|_t$ $= \lim_{n\to\infty} \|f_N\|_t \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^n} = 0$ yani $\lim_{N\to\infty} \|f_N - 0\|_t = 0$ sonucu bulunur. Oysa apaçık biçimde,



Şekil 2:

$I_{k,n} = [r_{k,n}, r_{k+2,n}]$ yazılırsa

$$\|f_N - 0\|_{sup} = \|f_N\|_{sup} = \sup_{x\in[0,1]} |f_N(x)| = \max_{x\in I_{k,n}} f_N(x) = 1$$

her $N \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan, $\lim_{N\to\infty} \|f_N - 0\|_{sup} = 1$ bulunur, bitti!

Uyarı 1: Yukarıdaki $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ sürekli fonksiyonlar dizisinin

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N^2(x)dx = 0 = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N(x)dx$$

gerçeklemesine karşın, hiçbir $x \in [0,1]$ için $\{f_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi **yakınsayamamaktadır**, çünkü

$$\underline{\lim} f_N(x) = 0 < 1 = \overline{\lim} f_N(x), \qquad (\forall x \in [0,1])$$

gerçeklenir, çünkü her $n \geq 4$ için $f_{2^n}(x), f_{2^n+1}(x)\ , \ldots , f_{2^n+(2^n-1)}(x)$ gerçel sayılarından en az birisi 0 ve en az birisi ise 1 olduğuna dikkat ediniz, çünkü $x \in \left[\frac{k_x}{2^n}, \frac{k_x+1}{2^n}\right]$ olacak biçimde bir $0 \leq k_x < 2^n$ var ve böylelikle $f_{2^n+kx}(x) = 1$, buna karşılık $x \notin \left[0, \frac{2k_x-1}{2^{n+1}}\right]$ nedeniyle, en az bir $i_x \leq 2k_x - 2$ için $f_{2^n+i_x}(x) = 0$ olur. Dolayısı ile $\{f_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ dizisinin sonsuz tane terimi 0 ve sonsuz terimi ise 1 ve ayrıca apaçık biçimde $0 \leq f_N(x) \leq 1, \quad (\forall N \in \mathbb{N})$ olmaktadır, istenilen iddia elde edilir. Siz, $C[a,b]$ vektör uzayında

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0 \ \textbf{ ve } \ \forall x \in [a,b] \text{ için } \underline{\lim} f_n(x) < \overline{\lim} f_n(x)$$

koşullarının ikisini de gerçekleyen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve f elemanını tanımlayınız. Demek ki tümlev normuna göre yakınsama, noktasal yakınsama sonucunu vermeyebilmektedir. Bu, tümlev normunun güçsüz yanlarından birisidir.

Yukarıda tanımlanan iç çarpım ve tümlev normu arasında aşağıdaki ünlü ve yararlı bağıntı geçerlidir:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği : $\forall f, g \in C[a,b]$ için $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_t \|g\|_t$ Gerçekten $\|f\|_t = 0$ ya da $\|g\|_t = 0$ iken $\langle f, g\rangle = 0 = \|f\|_t \|g\|_t$ olur, sözgelimi $\|f\|_t = 0$ ise, biraz önce gözlendiği gibi $f(x) = 0\,(\forall x \in [a,b])$ nedeniyle $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b 0.dx = 0$ bulunur, şimdi hem $0 < \|f\|_t$ hem de $0 < \|g\|_t$ olsun. Bu durumda, her $x, y \in \mathbb{R}$ için zaten $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ olduğundan

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|_t}.\frac{|g(x)|}{\|g\|_t} \leq \frac{1}{2\|f\|_t^2}.|f(x)|^2 + \frac{1}{2\|g\|_t^2}.|g(x)|^2 \; (\forall x \in [a,b])$$

bulunur, her iki yanın tümlevi alınıp $\quad \|f\|_t^2 = \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b |f(x)|^2$ nedeniyle

$$\frac{1}{\|f\|_t \|g\|_t}\int\limits_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \frac{1}{2\|f\|_t^2}\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx + \frac{1}{2\|g\|_t^2}\int\limits_a^b |g(x)|^2\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

yani $\int\limits_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \|f\|_t \|g\|_t$ ve böylece istenen

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \|f\|_t \|g\|_t$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç kullanılırsa aşağıdaki kanıtlanır:

Önerme :

Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_t = 0$ ise, her $g \in C[a,b]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$ gerçekleşir.

İspat: $0 \leq |\langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle| = |\langle f_n - f, g\rangle| \leq \|f_n - f\|_t . \|g\|_t \to 0$

Ödev: Hem $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_t = 0$ hem de $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\|_t = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle$ olur, gösteriniz.

Tanım 1: $C[a,b]$ kümesinde f ve g elemanlarına ancak ve yalnız $\langle f, g\rangle = 0$ koşulunu gerçeklerlerse (daha genel olarak üzerinde bir iç çarpım işlemi tanımlanmış herhangi bir X vektör uzayında $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ koşulunu gerçekleyen $x_1, x_2 \in X$ vektörlerine) **dik elemanlar** (dik vektörler) denir. Sıfır sabit fonksiyonunun tüm $f \in C[a,b]$ elemanlarına dik olduğunu gözleyiniz. Öte yandan $C[a,b]$ vektör uzayında bir $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine, ancak ve yalnız

$$i)\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } g_n \neq 0, \quad ii) n \neq m \text{ için } \langle g_n, g_m\rangle = 0$$

koşullarını gerçekliyorsa bir **dik dizi** denilir.

Herhangi bir $f \in C[a,b]$ elemanı için

$$c_n = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|_t^2} \in \mathbb{R} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçel sayılarına f in bu diziye göre tanımlanmış *Fourier katsayıları* denilir. Bu katsayıların her $n \in \mathbb{N}$ için

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int\limits_a^b |g_n(x)|^2 \, dx} \in \mathbb{R}$$

olduğuna, paydanın kesinlikle pozitif bir sayı olduğuna, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \neq 0$ nedeniyle, $g_n(x) = 0 \, (\forall x \in [a,b])$ olmadığından girişte anlatılan gerekçelerden ötürü $0 < \int\limits_a^b |g_n(x)|^2 \, dx$ bulunacağına dikkat ediniz. Bu katsayılar için aşağıdaki ünlü sonuç geçerlidir.

Teorem 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|g_n\|_t^2 \leq \|f\|_t^2 = \int\limits_a^b |f(x)|^2 \, dx \, (\forall f \in C[a,b])$

Not : Burada yazılan eşitsizliğe **Bessel Eşitsizliği** denilir.

İspat : Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k(x) \, (\forall x \in [a,b])$ biçiminde tanımlanan kısmi toplam fonksiyonlarının, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k$ nedeniyle

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - s_n\|_t^2 = \langle f - s_n, f - s_n \rangle &= \langle f, f \rangle - 2 \langle f, s_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle \\ &= \|f\|_t^2 - 2 \langle f, s_n \rangle + \|s_n\|_t^2 \end{aligned}$$

ve her bir $i \neq k$ için $\langle g_k, g_i \rangle = 0$ ve $k = i$ için $\langle g_k, g_i \rangle = \langle g_k, g_k \rangle = \|g_k\|_t^2$ ve böylelikle her bir k indisi için

$$\langle g_k, s_n \rangle = \left\langle g_k, \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_k, g_i \rangle = c_k \|g_k\|_t^2$$

olduğuna dikkat edip, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|s_n\|_t^2 = \langle s_n, s_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k g_k, s_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle g_k, s_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2$$

$$\langle f, s_n \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{n} c_k g_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle f, g_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2$$

bulunur çünkü her k indisi için geçerlidir: Böylelikle

$$\langle f, g_k \rangle = c_k \|g_k\|_t^2$$

$$0 \leq \|f - s_n\|_t^2 = \|f\|_t^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2 = \|f\|_t^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2$$

kısacası $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \|g_k\|_t^2 \leq \|f\|_t^2 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ bulunur, bu isteneni kolayca verir.

Uyarılar 2:

1) Eğer $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dik dizisi üstelik $\|g_n\|_t = 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$ koşulunu da gerçeklerse, ancak bu durumda, **birim dik dizi** adını alır. Bu durumda Fourier katsayılarının $c_n = \langle f, g_n \rangle \ (\forall n \in \mathbb{N})$ olduğuna ve Bessel Eşitsizliğinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

biçimine geldiğine özellikle dikkat edilmelidir. Matematikte

$$\ell_2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\omega} : (0 \leq) \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

diziler kümesi en ünlü **Banach Uzayları**'ndan birisidir ve herhangi $f \in C[a,b]$ elemanının, herhangi bir **birim dik diziye** göre tanımlanan Fourier katsayıları dizisinin, böylelikle

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$$

gerçeklediği anlaşılır.

2) Fourier Serileri Teorisi, aslında temel olarak, bir $f \in C[a,b]$ hangi sıradışı niteliklere sahip olduğunda

$i)$ $\forall x \in [a,b]$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) \left(= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|_t^2} . g_n(x) \right) \in \mathbb{R}$,

$ii)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|_t^2} . g_n \in C[a,b]$,

$iii)$ $\lim\limits_{n \to \infty} \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\langle f, g_k \rangle}{\|g_k\|_t^2} . g_k \right\|_t = 0$,

$iv)$ $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|_t^2} . g_n$ yani $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n . g_n(x) \ (\forall x \in [a,b])$

koşullarını gerçeklediğini, ayrı ayrı belirlemeyi görev edinir. Örneğin, aşağıdaki Teorem 3' te

$$\exists x_0 \in [a,b], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|_t^2} . g_n(x_0) \notin \mathbb{R}$$

olabildiğini örnekleyen $f \in C[a,b]$ elemanların var olduğu anlaşılacaktır. Bu ve benzeri soruları çözmek için 1850-1900 yılları arasındaki çabalar sonucunda bulunan kavram ve yöntemler Fonksiyonel Analiz'in temellerini oluşturmuştur. Bu teorinin temel gözlemlerini 1807 yılında Fransız fizik ve matematikçisi Jean Baptiste Joseph Fourier bulmuştur.

3) Uygulamaların açık biçimde gösterdiği gibi, $\mathbb{R}$ cisimi üzerinde $C[a,b]$ vektör uzayı yerine $PC[a,b]$ hatta $PC[-\pi,\pi]$ vektör uzayı ile çalışmak daha akıllıcadır. $PC[a,b]$ vektör uzayı, $[a,b]$ aralığında tanımlı gerçel değerli ve **parçalı sürekli** (piecewise continuous) olan tüm fonksiyonlardan oluşur. Bilindiği gibi bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, ancak ve yalnız, bir $x_0 \in [a,b]$ noktasında, aşağıdaki koşulları gerçeklerse, x_0 noktasında, **birinci türden süreksizliği** vardır, denilir:

$i)$ $f(x_0-) \in \mathbb{R}$ ve $f(x_0+) \in \mathbb{R}$

$ii)$ ya $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ ya da $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$

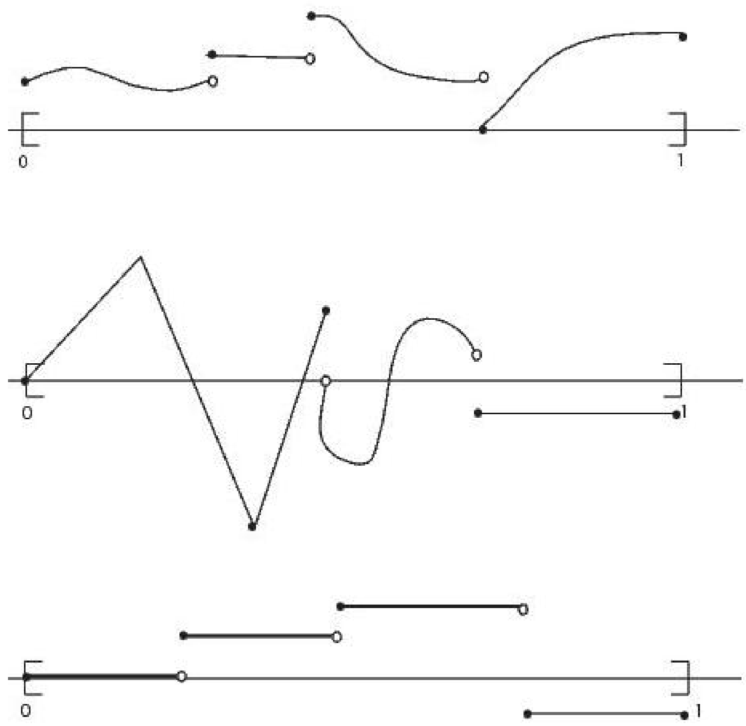
Buna karşılık $f(x_0-)$ sol limiti (ya da $f(x_0+)$ sağ limiti) bir gerçel sayı **değilse**, kısacası $f(x_0-) = -\infty$ ya da $f(x_0-) = \infty$ (ya da benzerleri $f(x_0+)$ için geçerli) ise, $x_0 \in [a,b]$ noktasında f fonksiyonunun **ikinci türden süreksizliği** vardır denilir. Sözgelimi $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $(\forall x \in (0,1])$ biçiminde tanımlanan f için $f(0+) = +\infty$ ve benzer olarak $g(1) = 0$, $g(x) = \ln(1-x)$ $(\forall x \in [0,1))$ biçiminde tanımlanan g için $g(1-) = -\infty$ gerçekleştiğinden, bu fonksiyonların sırasıyla $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında ikinci türden süreksizliği vardır. Buna karşılık $f(x) = [x] (\forall x \in \mathbb{R})$ fonksiyonu, her bir $k \in \mathbb{Z}$ tamsayısında $f(k-) = k = f(k) < k+1 = f(k+)$ gerçeklediğinden birinci türden süreksizliğe sahiptir. Buna karşılık

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ x+1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

fonksiyonu için $F(1-) = F(1) = 1 < 2 = F(1+) ger$çeklendiği için, F fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $x = 1$ noktasında birinci türden süreksizliği vardır. Bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, ancak ve yalnız $[a,b]$ aralığında hiç ikinci türden süreksizliği **yoksa** ve yalnızca bu aralığın **sonlu tane** noktasında birinci türden süreksizliği varsa, $[a,b]$ aralığında **parçalı süreklidir** denilir. Aşağıda bu türde fonksiyon örnekleri verilmektedir.

Önerme 3: $f, g \in PC[a,b]$ ise $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ne olursa olsun $\alpha f + \beta g \in PC[a,b]$ olur.

İspat: f fonksiyonuna $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ noktalarında g fonksiyonunun ise $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in [a,b]$ noktalarında birinci türden süreksizlikleri varsa, bunlardan farklı her noktada $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun sürekli olduğuna dikkat ediniz. Buna karşılık $x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n$ noktalarının hiç birisi örneğin x_1 noktası $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu için kesinlikle ikinci türden süreksizlik noktası değildir, çünkü $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_1$ gerçekleyen her bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için asla $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha f + \beta g)(a_n) = \mp\infty$ olmaz, çünkü hem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell_1$ hem de $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = \ell_1^*$ gerçel sayıları iyi tanımlıdır (neden?). Dolayısıyla $\alpha f + \beta g$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında



Şekil 3:

hiç ikinci türden süreksizliği yoktur ve olası sonlu tane nokta dışında $[a,b]$ aralığında hiç ikinci türden süreksizliği yoktur ve olası sonlu tane nokta dışında $[a,b]$ aralığında her yerde süreklidir, bu ise $\alpha f+\beta g \in PC[a,b]$ sonucunu verir.

Uyarılar 3:

1) Riemann tümlevine ilişkin bilgimiz, her $f \in PC[a,b]$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebildiğini söylemektedir, bkz. Analiz Dersleri, dolayısıyla her $f \in PC[a,b]$ için $\int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ iyi tanımlıdır. Fakat $f(\frac{1}{2}) = 1,\ \ f(x) = 0 \ \big(\forall x \in [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]\big)$ biçiminde tanımlanan $f \in PC[0,1]$ için o derslerde, $f = 0$ **olmamasına** karşın $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ gerçeklendiği kanıtlanır, gerçekten $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının uygun bir $\{x_0(\varepsilon), x_1(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)\}$ parçalanışına karşılık gelen $S_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon))$ üst Riemann toplamının

$$S_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)) = \sum_{0\le k\le n} \ell(I_k).\sup f(I_k) < \varepsilon$$

gerçeklediği kanıtlanarak (burada her $0 \le k \le n$ indisi için $I_k = [x_{k-1}(\varepsilon), x_k(\varepsilon))$ ve $\ell(I_k) = x_k(\varepsilon) - x_{k-1}(\varepsilon)$ olarak tanımlanmaktadır) sonuçta, aşağıdaki supremum ve infimum $[0,1]$ aralığının tüm parçalanışları üzerinden alınmak üzere

$$0 \leq \sup_{\{x_0,...,x_n\}} s_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)) \leq \inf_{\{x_0,...,x_n\}} S_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)) = 0$$

ve böylelikle $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ sonucu bulunur. Tümüyle benzer biçimde

$$g(x) = 0(\forall x \in [a,b] - \{x_1, ..., x_n\}) \text{ ve } g(x_1) = c_1, ..., g(x_n) = c_n$$

biçiminde tanımlanan $g \in PC[a,b]$ için $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$ kanıtlanır. Şimdi eskiden olduğu gibi, herhangi $f, g \in PC[a,b]$ için

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \; (\in \mathbb{R})$$

yazılırsa, $f \neq 0$ olduğu halde $\langle f, f\rangle = \int\limits_a^b |f(x)|^2 \, dx = 0$ gerçekleyen $f \in PC[a,b]$ elemanlarının var olduğu anlaşılır (nasıl?). Bu nedenle, bu yeni iç çarpıma **sözde iç çarpım** ve $\|f\|_t = +\sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2 \, dx} \geq 0$ gerçel sayısına da **sözde tümlev normu** denilmelidir, oysa pek çok matematikçi bunlar için sözde sıfatını kullanmadan, bunlara iç çarpım ve norm demektedir.

2) $PC[-\pi, \pi]$ vektör uzayında, en ünlü dik dizi olan ve her $x \in [-\pi, \pi]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = \cos nx, \psi_n(x) = \sin nx$$

biçiminde tanımlanan $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, ...\}$ ile ilgilenelim. Bilindiği gibi $f \in PC[-\pi, \pi]$ fonksiyonuna ancak ve yalnız $f(-x) = -f(x)$ $(\forall x \in [-\pi, \pi])$ koşulunu gerçeklerse **tek fonksiyon**, ancak ve yalnız $f(-x) = f(x)$ $(\forall x \in [-\pi, \pi])$ koşulunu gerçeklerse **çift fonksiyon** denilir ve f tek fonksiyon ise, $x = -t$ değişken dönüşümü ile $\int\limits_{-\pi}^0 f(x)dx = -\int\limits_0^\pi f(t)dt = -\int\limits_0^\pi f(x)dx$ olduğundan $\int\limits_{-\pi}^\pi f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^0 f(x)dx + \int\limits_0^\pi f(x)dx = 0$, buna karşılık f çift fonksiyonsa $\int\limits_{-\pi}^0 f(x)dx = \int\limits_0^\pi f(x)dx$ ve böylece $\int\limits_{-\pi}^\pi f(x)dx = 2\int\limits_0^\pi f(x)dx$ olur, ayrıca f çift g tek ise $f.g$ çarpımı tek ve ve böylece $\int\limits_{-\pi}^\pi f(x)g(x)dx = 0$ bulunur. Bu gözlemler nedeniyle $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, ...\}$ dizisinde, farklı indisli herhangi iki üye $PC[-\pi, \pi]$ vektör uzayında birbirine diktir, yani

$$n \neq m \text{ ise } \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n, \psi_m \rangle = \langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0$$

olur, çünkü $a \in \mathbb{R}$ sabiti ne olursa olsun $g(x) = \cos ax$ fonksiyonu çifttir ve $h(x) = \sin ax$ fonksiyonu tektir, sonuçta

$$\langle \varphi_n, \psi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \text{ ve ayrıca } \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2} dx = \left.\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

olur, çünkü iyi bilindiği gibi **her** $k \in \mathbb{Z}$ için $\sin k\pi = 0 = \sin k\,(-\pi)$ geçerlidir, benzer biçimde $n \neq m$ ise

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2} = 0$$

bulunur. Buna karşılık, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|\varphi_n\|_t^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{2\pi}{2} + \left.\frac{\sin 2nx}{4n}\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

bularak $\|\varphi_n\|_t = \sqrt{\pi}$ ve $\|\psi_n\|_t = \sqrt{\pi}$ ve $\|\varphi_0\|_t = \sqrt{2\pi}$ elde edilir. Herhangi bir $f \in PC[-\pi, \pi]$ için, bu elemanın bu dik diziye göre Fourier serisi

$$\frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|_t^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_t^2} \varphi_n + \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|_t^2} \psi_n \right)$$

olup yukarıdaki bilgilerle

$$a_0^* = \frac{\langle f, \varphi_0 \rangle}{\|\varphi_0\|_t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_t^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|_t^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

olmak üzere, bu seri daha açık biçimde $a_0^* \varphi_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \varphi_n(x) + b_n \psi_n(x))$ olarak yazılır. Fakat a_n ve a_0 değerlerinin uyum göstermesi kısacası a_0 katsayısının $n = 0$ için $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ değerine eşit olması istenir, böylelikle **yeni** a_0 olarak

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

alınırsa $\dfrac{\langle f, \varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|_t^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\right) = \dfrac{a_0}{2}$ bulunacağından yukarıdaki seri

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

olarak yazılır. Fakat Uyarı 2.2) içinde belirtildiği gibi, bu trigonometrik fonksiyon serisinin $f \in C[-\pi, \pi]$ olduğunda bile her $x \in [-\pi, \pi]$ için yakınsaması gerekmediği gibi, bu seri bir $x_0 \in [-\pi, \pi]$ için yakınsadığında, yakınsadığı (toplam değerinin) $f(x_0)$ olması **gerekmez**! Buna karşın Dirichlet'nin aşağıdaki çok kullanışlı teoremi geçerlidir.

Teorem 2 (Dirichlet Teoremi): Eğer $f \in PC[-\pi, \pi]$ elemanının (fonksiyonunun) türevi, $[-\pi, \pi]$ aralığında sonlu nokta dışında parçalı sürekliyse, özel olarak $f' \in PC[-\pi, \pi]$ ise ve f fonksiyonu 2π periyoduyla periyodik ise (1) toplamının değeri, her $x \in (-\pi, \pi)$ için aşağıdakidir,

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

ayrıca şu eşitlikler geçerlidir:

$$f(\mp\pi) = \frac{f((-\pi)+) + f(\pi-)}{2}$$

Kanıtlama: İlerde Önerme6'dan sonra verilecektir.

Örnekler 1:

1)

$$f(x) = \begin{cases} -1; & x \in (-\pi, 0) \\ 0; & x = -\pi, x = 0, x = \pi \\ 1; & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier açılımını bulunuz.

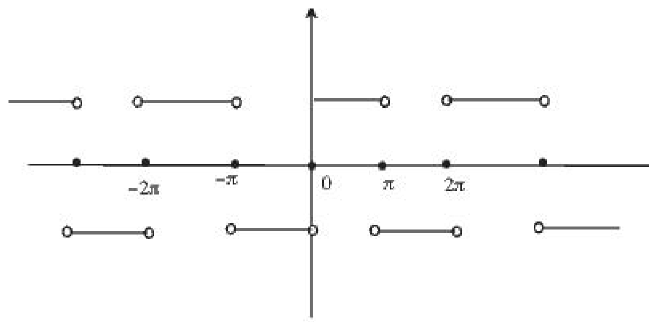
Çözüm: Bu fonksiyonun apaçık biçimde $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ noktalarında birinci türden süreksizliği vardır, bu bir tek fonksiyondur, yani **her** $x \in [-\pi, \pi]$ için $f(-x) = -f(x)$ gerçekler ve birinci türden süreksizlik noktalarının dışında her yerde türetilebilirdir, kısacası Dirichlet Teoremindeki tüm koşulları yerine yerine getirir. Bu tek fonksiyonun Fourier katsayıları, her $n \geq 0$ için $a_n = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x).\sin nx$ çift fonksiyon olduğundan

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

ve sonuçta $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}.(1-(-1)^n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\,\pi}$ ve $b_{2n} = 0$ bulunarak, istenen açılım

$$\frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2n-1)\,x\right)}{(2n-1)}$$

olarak belirlenir. Fakat f fonksiyonu her $x \in (-\pi, \pi)$ için $f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ gerçekler, sözgelimi $f(0-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ ve $f(0+) = 1$ ve sonuçta $f(0) = 0 = \frac{1}{2}\left(f(0-)+f(0+)\right)$ bulunur. Eğer f fonksiyonunun tanımını 2π periyotlu olarak tüm $\mathbb{R}$ kümesine genişletirsek f nin grafiği aşağıdaki şekilde çizilidir:

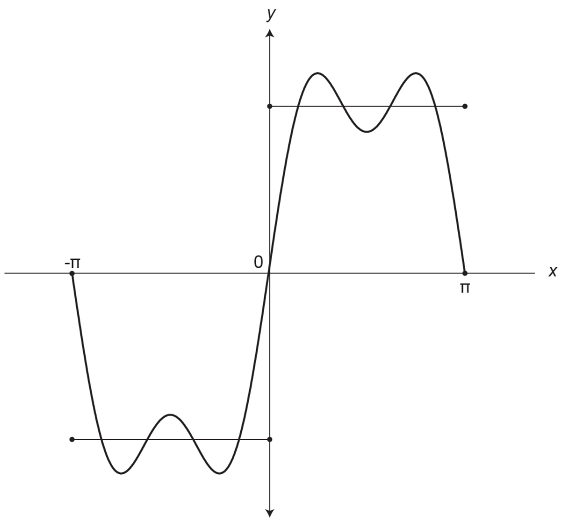


Şekil 4:

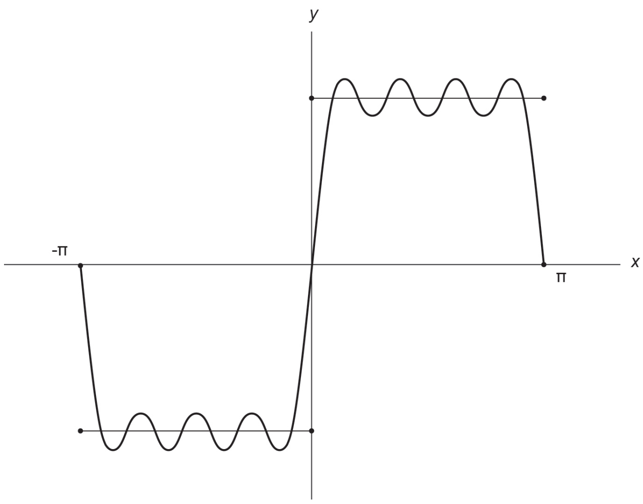
Kolayca her $x \in [-\pi, \pi]$ için $f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ bulunarak Dirichlet Teoremi nedeniyle aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\right)\ (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

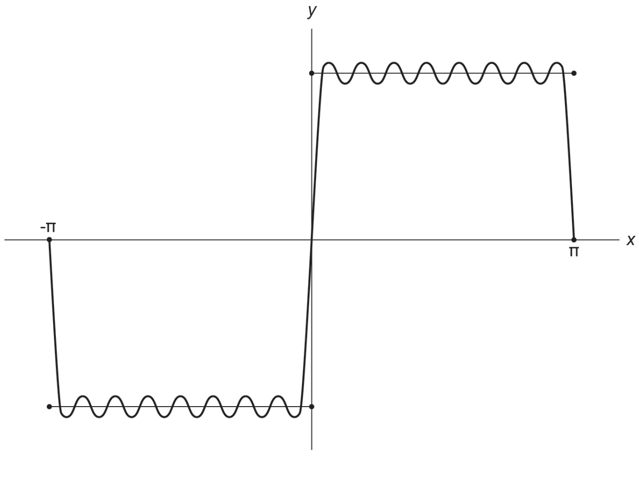
Bu serinin kısmi toplamlarının grafikleri sayfa 118 de çizilmiştir örneğin, birincisi $s_2(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right)$ grafiğidir.



Şekil 5:



Şekil 6:



Şekil 7:

Özel olarak $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0,\pi) \subseteq [-\pi,\pi]$ için üstelik $\sin\left((2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}\,(\forall n \in \mathbb{N})$ bilgisini kullanırsak

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{(2n-1)} = \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

ve sonuçta ünlü Leibniz bağıntısı olan

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

elde edilir, buna karşılık $x = \dfrac{\pi}{4}$ noktasındaki açılımdan ve ayrıca

$$\sin((2n-1)\frac{\pi}{4}) = (-1)^{\left[\frac{2n-1}{4}\right]}.\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\forall n \in \mathbb{N})$$

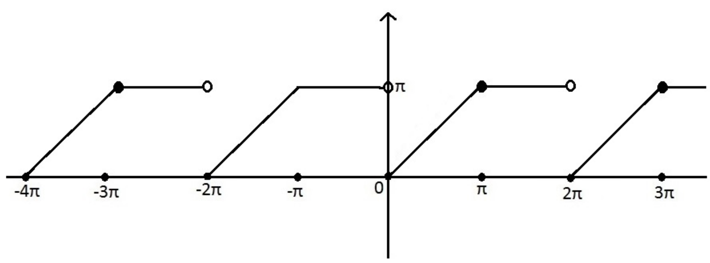
bilgisinden yararlanılırsa aşağıdaki şaşırtıcı bağıntı bulunur:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - ...\right)$$

1*)

$$f(x) = \begin{cases} \pi; & x \in (-\pi, 0] \\ x; & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Bu fonksiyonun periyodik yapılmış grafiği aşağıda çizilidir: Dikkat edilirse



$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi.\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x.\cos(nx)\,dx = 0 + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x.(\sin(nx))'\,dx$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$$

böylece $a_{2n}(f)=0$, $a_{2n-1}(f)=\frac{-2}{(2n-1)^2\pi}$ bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi.\sin(nx)\,dx-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x.(\cos(nx))'\,dx \\ &= \frac{\cos(n\pi)-1}{n}-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n\pi}=-\frac{1}{n} \end{aligned}$$

ve $a_0(f)=\frac{3\pi}{2}$ bulunarak , her $x\in(-\pi,\pi)$ için

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

ve böylece $x=0$ için hesaplanıp şu ünlü açılım bulunur:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...$$

2) Her $x\in[-\pi,\pi]$ için $f(x)=|x|$ biçiminde tanımlanan ve apaçık biçimde çift olan fonksiyon $f\in C[-\pi,\pi]\subseteq PC[-\pi,\pi]$ gerçekler ve $x=0$ noktası dışında $[-\pi,\pi]$ aralığında her yerde türetilebilirdir ve Fourier katsayıları, her $n\in\mathbb{N}$ için $b_n=0$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\cos nxdx$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$$

nedeniyle $a_{2n}=0$ ve $a_{2n-1}=\dfrac{-4}{(2n-1)^2\pi}$ ve ayrıca $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}xdx=\pi$ bularak istenen açılım Dirichlet Teoremi nedeniyle aşağıdaki gibi elde edilir.

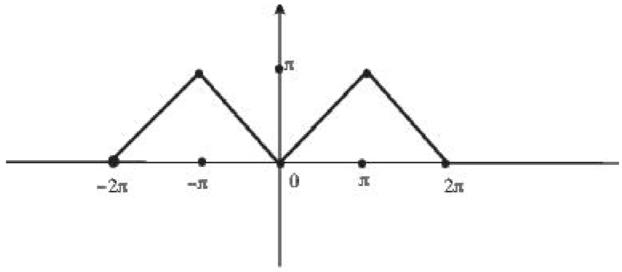
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\quad(\forall x\in[-\pi,\pi]).$$

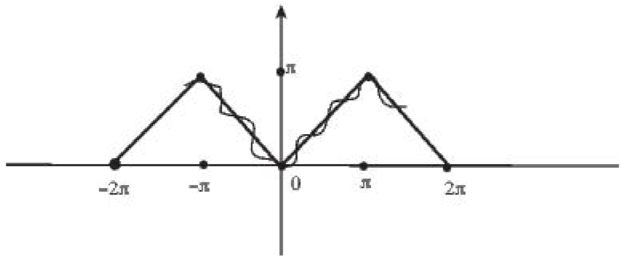
Grafikler aşağıdaki Şekil 6'daki gibidir:

Üstelik $x=0$ için $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ ve dolayısıyla, ünlü

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...$$

bağıntısı elde edilir.





Şekil 8:

3) Her $x \in (-\pi, \pi)$ iin aşağıdakini gösteriniz:

$$x = 2.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{\sin nx}{n} \quad , \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{\cos nx}{n^2}$$

Örneğin birincisi için $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$ ve $f(x) = |x|$ $(\forall x \in (-\pi, \pi))$ fonksiyonlarının Fourier açılımlarını bulunuz.

4) Her $x \in (-\pi, \pi)$ için aşağıdakini gösteriniz:

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\sin nx)\right)$$

burada

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^x + b^x}(a\cos bx + b\sin bx)\ , \ \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^x + b^x}(a\sin bx - b\cos bx)$$

kullanın.

5) Her $x \in [-\pi, \pi]$ için gösteriniz:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

$|\cos x|$ için açılımı siz bulunuz.

6) Her $x \in [-\pi, \pi]$ için gösteriniz:

$$(\pi - x)(\pi + x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{\cos nx}{n^2}$$

(Dikkat: Yukardaki 3)'den yararlanınız!).

7) f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi; & x \in [-\pi, 0] \\ 0 & ; x = 0 \\ x - \pi & ; x \in (0, \pi] \end{cases}$$

ise gösteriniz. $f(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Buradan elde ediniz:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right| < \frac{\pi}{2} \qquad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

8) f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 1 & ; x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & ; x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi \end{cases}$$

ise f çift fonksiyon, fakat $a_0 = 0$ ve sonuçta

$$f(x) = \frac{4}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.\cos((2n-1)x) \qquad (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

9)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [-\pi, 0)] \text{ ve } x = \pi \\ x & ; x \in [0, \pi) \end{cases}$$

ise gösterin:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.\sin nx \right) \qquad (\forall x \in (-\pi, \pi))$$

Bu açılımdan yararlanarak $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ elde ediniz.

10)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [-\pi, 0)] \text{ ve } x = \pi \\ x^2 & ; x \in [0, \pi) \end{cases}$$

ise gösterin:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx + (\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^3} - \frac{\pi(-1)^n}{n}) \sin nx \right) \qquad (\forall x \in (-\pi, \pi))$$

Bu açılımdan yararlanarak $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ bağıntısını bulunuz.

11) Aşağıda yer alan **Ek Bilgi**'de verilen bilgilerden yararlanarak gösterin

$$\cot \alpha x = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}) \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$$

ve özellikle, her $m \in \mathbb{N}$ için $\cot((m + \frac{1}{2})\pi) = \frac{\cos((2m+1)\frac{\pi}{2})}{\sin((2m+1)\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{1}$ nedeniyle Teorem3'ün kanıtlamasında kullanacağımız yararlı bağıntıyı elde ediniz:

$$\frac{1}{m + \frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(m + \frac{1}{2})}{n^2 - (m + \frac{1}{2})^2} \qquad (\forall m \in \mathbb{N})$$

Ek Bilgi: Bölüm 1'de elde edilen ve her $x \in \mathbb{R}$ için geçerli olan şu ünlü Euler Özdeşliği,

$$\sin x = x.\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)...$$

dikkat edilirse aşağıdaki biçimde Fourier Açılım bilgisiyle kolayca elde edilebilir. Öncelikle $a \notin \mathbb{Z}$ ne olursa olsun

$$(1) \qquad \cos(ax) = \frac{2a}{\pi} \sin(a\pi) \left(\frac{1}{2a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2} \cos(nx) \right) \qquad (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

açılımını gözlemek kolaydır, çünkü $f(x) = \cos(ax)$ fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ aralığında kendisi ve türevi sürekli olan bir çift fonksiyon olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n(f) = 0$ ve

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(ax) \,.\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos((n+a)x)\,dx + \int_0^{\pi}\cos((n-a)x)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n\pi + a\pi)}{n+a} + \frac{\sin(n\pi - a\pi)}{n-a}\right) \\ &= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a}\right) = -\frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}.\frac{(-1)^n}{n^2-a^2} \end{aligned}$$

ve $a_0(f) = \frac{2}{a\pi}\sin(a\pi)$ kolayca hesaplanarak yukardaki (1) açılımı bulunur.

Böylece $a \notin \mathbb{Z}$ yerine $t \notin \mathbb{Z}$ değişkeni yazılarak ve $x = \pi$ alınarak kolayca

$$(2) \qquad \pi\cot(\pi t) - \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2} \qquad (\forall t \notin \mathbb{Z})$$

bulunur. Sağ yandaki seri $0 < a < 1$ olmak üzere $[-a, a]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak olduğundan $0 < \varepsilon < x < 1$ olmak üzere, sol ve sağ yan $[\varepsilon, x] \subsetneq [-x, x]$ aralığında terim terime **tümlevlenerek** ve

$$\pi.\int_{\varepsilon}^{x}\cot(\pi t)\,dt = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi\varepsilon)}\right)$$

gerçeği kullanılırsa

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{x^2-n^2}{\varepsilon^2-n^2}\right)$$

ve $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa, kolayca $0 < x < 1$ için ,

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$$

bulunur. Dikkat: Her $0 < a < 1$ için $\ln(1-a) < \ln(1+a) < a$ gözleyip gerek $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ ve gerekse $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\varepsilon^2}{n^2}\right)$ Serileri Weierstrass-M Ölçütü ile $[-1, 1]$ aralığında **düzgün yakınsadıklarından,** yukarda

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{x^2-n^2}{\varepsilon^2-n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left(\frac{x^2-n^2}{\varepsilon^2-n^2}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

yazılabilmiştir. Böylece

$$(3) \qquad \sin(\pi x) = \pi x.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad (\forall x \in (0,1))$$

bulunur. Kolayca (3) eşitliğinin herbir $x \in [-1,1]$ için geçerli olduğu gözlenir. Aslında bu eşitlik **her** $x \in \mathbb{R}$ için geçerlidir, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olan

$$p_n(x) = \pi x.\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{(-1)^n \pi}{(n!)^2}.(x-n)\dots(x-1)\,x\,(x+1)\dots(x+n)$$

polinomu dikkat edilirse

$$p_{n+2}(x) = \frac{(x+n+1)(x+n+2)}{(x-n+1)(x-n)}p_n(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$$

gerçeklendiğinden $n \to +\infty$ için limit alarak şu şaşırtıcı eşitlik elde edilir:

$$g(x) = \pi x.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad \text{için} \qquad g(x+2) = g(x) \qquad .$$

Böylelikle $\sin(\pi x) = g(x)$ yani (3) eşitliğinin gerçekten her $x \in \mathbb{R}$ için doğru olduğu çıkarsanır, örneğin (3) eşitliği $(-1,1)$ aralığındaki her gerçel sayı için doğru ve

$$\forall x \in (1,3) \qquad , \qquad \exists \xi_x \in (-1,1)\ ,\ x = \xi_x + 2$$

böylece $\sin(\pi x) = \sin(2\pi + \pi\xi_x) = \sin(\pi\xi_x) = g(\xi_x) = g(\xi_x+2) = g(x) = \pi x.\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ bulunur, buysa isteneni verir.

Evet, şimdi sırada aşağıdaki şaşırtıcı sonuç gelmektedir:

Teorem 3: Fourier serisi bazı noktalarda ıraksayan 2π periyotlu **sürekli** fonksiyonlar **vardır.**

İspat: Önce gerektiği için şunları hesaplayalım: her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 0$ için

$$A_{k,n} = \int_0^{\pi} 2\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\cos nx\,dx = \int_0^{\pi}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}+n\right)x\right) + \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}-n\right)x\right)\right]dx$$

$$= \frac{1-\cos\left((2n+2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{k+\frac{1}{2}+n} + \frac{1-\cos\left((2k-2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{k+\frac{1}{2}-n}$$

$$= \frac{1}{k+\frac{1}{2}+n} + \frac{1}{k+\frac{1}{2}-n} = \frac{2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = \begin{cases} >0 & ; n \leq k \\ <0 & ; n > k \end{cases}$$

olur, kısacası $A_{k,0}, A_{k,1}, \dots, A_{k,k}$ rasyonel sayıları pozitif, buna karşılık $A_{k,k+1}, A_{k,k+2}, \dots$ rasyonel sayıları hep negatiftir ve yukardaki son ödevden

$$\frac{A_{k,0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{k,n}=\frac{1}{k+\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-n^2}=\frac{1}{k+\frac{1}{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}=0$$

eşitlikleri her $k\in\mathbb{N}$ için elde edilir. Dolayısıyla bu son yakınsak serinin kısmi toplamları için

$$S_{k,m}=\frac{A_{k,0}}{2}+\sum_{n=1}^{m}A_{k,n}>0\ (\forall k,m\in\mathbb{N})$$

bulunur, çünkü zaten $0<S_{k,1}<S_{k,2}<...<S_{k,k}$ olur (neden?) ve üstelik $\lim\limits_{n\to\infty}S_{k,m}=\frac{A_{k,0}}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{k,n}=0$ nedeniyle

$$S_{k,k}>S_{k,k}+A_{k,k+1}=S_{k,k+1}>S_{k,k+}+A_{k,k+2}=S_{k,k+2}>...>0=\lim_{m\to\infty}S_{k,m}$$

olmaktadır, kısacası gerçekten her $k,m\in\mathbb{N}$ için $S_{k,m}>0$ bulunur. Özel olarak, her $k\in\mathbb{N}$

$$S_{k,k}=\frac{A_{k,0}}{2}+\sum_{n=1}^{k}A_{k,n}>+\sum_{n=1}^{k}A_{k,n}>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k+\frac{1}{2}-n}>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k+1-n}$$

ve

$$S_{k,k}>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k+1-n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}>\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)>\ell nk$$

bulunur, çünkü her $x\in\mathbb{R}^+$ için $\ell n(1+x)<x$ olduğundan kolayca $\sum\limits_{i=1}^{k}\ell n\left(1+\frac{1}{i}\right)=\ell n\left(\frac{k+1}{k}\frac{k}{k-1}...\frac{2}{1}\right)=\ell n(k+1)>\ell nk$ gözlenir. Bu gerekli gözlemlerin ardından, şimdi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\frac{|x|}{2}\right)}{n^2}\ (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonu gözönüne alalım. Toplananlar sürekli ve sözü edilen fonksiyon serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsadığından (Weierstrass M-ölçütünü uygulayın) f fonksiyonu süreklidir, apaçık biçimde çift fonksiyondur ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$f(x)\cos nx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\left(2^{k^3}+1\right)\frac{|x|}{2}\right)}{k^2}\cos nx\ \ (\forall x\in[-\pi,\pi])$$

fonksiyon serisi de, sözü edilen aralıkta düzgün yakınsar, böylelikle terim terime integrallenebilir. Her $n\geq 2$ için $2^{n^3}+1$ doğal sayısı $4N+1$ biçiminde ve $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$ olduğundan

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} = \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2 < 0$$

bulunur. f fonksiyonunun tanımı 2π periyotlu olarak $[-\pi, \pi]$ aralığının dışına genişletilir. Böylelikle f fonksiyonu, tüm $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli olan 2π periyotlu bir fonksiyon olur. f fonksiyonunun $x \neq 0$ gerçekleyen gerçel sayılarda türetilemediğini, çünkü

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x+h}{2}\right) - \sin\left(\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2^{n^3}+1\right) h \cos\xi_{n,h}}{n^2} = ıraksak$$

gerçeğinin, herhangi bir $x > 0$ için geçerli olduğunu gözleyiniz. Apaçıktır ki bu çift fonksiyonun Fourier serisi $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ olup, bu seri için $x = 0$ noktasında

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n.0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = ıraksak \qquad (*)$$

gerçekleşir. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\int_0^{\pi} 2\sin\left(\left(2^{k^3}+1\right)\frac{x}{2}\right)\cos nx dx\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\int_0^{\pi} 2\sin\left(\left(2^{k^3-1}+\frac{1}{2}\right)x\right)\cos nx dx\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} A_{2^{k^3-1},n}$$

ve dolayısıyla

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2} A_{2^{k^3-1},n} \;\; (\forall n \geq 0)$$

bulunarak, $(*)$ serisinin kısmi toplamları için, her $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdakiler elde edilir:

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2}\frac{A_{2^{k^3-1},0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2}A_{2^{k^3-1},1} + ... + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2}A_{2^{k^3-1},m}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{A_{2^{k^3-1},0}}{2} + A_{2^{k^3-1},1} + ... + A_{2^{k^3-1},m}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2} S_{2^{k^3-1},m} > \frac{1}{\pi k^2} S_{2^{k^3-1},m}$$

çünkü pozitif terimli yakınsak bir serinin toplamı, her teriminden büyüktür, özellikle $\ln k < S_{k,k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ sonucu kullanılırsa, böylelikle

$$\begin{aligned} s_{2^{k^3-1}} > \frac{1}{\pi k^2} S_{2^{k^3-1},2^{k^3-1}} &> \frac{\ln 2^{k^3-1}}{\pi k^2} = \frac{k^3-1}{k^2} \frac{\ln 2}{\pi} \, (\forall k \in \mathbb{N}) \, , \\ s_{2^{k^3-1}} &> k. \left(\frac{\ln 2}{2\pi} \right) \quad (\forall k \geq 2) \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Fourier serisinin $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmadığı ve dolayısıyla yakınsak olmadığı anlaşılır, bu istenendir. Siz tümüyle benzer hesaplamalarla, $1 < \alpha < 2$ sabiti ne olursa olsun

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\left(2^{n^3} + 1 \right) \frac{|x|}{2} \right)}{n^{\alpha}} \quad (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu, 2π periyotlu genişlemesinin benzer nitelikte bir fonksiyon olduğunu; hatta $\beta > 1$ sabiti ne olursa olsun, bu tanımlarda kullanılan 3 yerine $m_\beta = [\beta] + 1$ doğal sayısını ve paydada n^β alarak benzer nitelikte fonksiyonlar tanımlanabileceğine dikkat ediniz.

Şimdi Fourier serilerinin noktasal yakınsama problemiyle ilgilenelim. Önce aşağıdaki gerekli ünlü lemmayı kanıtlayalım:

Riemann-Lebesgue Lemması: $f \in PC[a, b]$ ise $\alpha \in \mathbb{R}$ ne olursa olsun aşağıdaki geçerlidir:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x). \sin(\lambda x + \alpha) \, dx = 0 = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x). \cos(\lambda x + \alpha) \, dx$$

İspat: $\lambda \to +\infty$ nedeniyle $\lambda \in [1, \infty)$ alınsın. Sinüslü iddiayı gösterelim, çünkü cosinüslü iddia tümüyle benzer biçimde yapılır. Her $\lambda \in [1, \infty)$ için$T_\lambda = \int_a^b f(x). \sin(\lambda x + \alpha) \, dx$ denirse $\lim_{\lambda \to +\infty} T_\lambda = 0$ ve $\lim_{\lambda \to +\infty}$ $|T_\lambda| = 0$ iddialarının eşdeğer olduğuna dikkat ediniz, Eğer f sabit bir fonksiyon yani $f(x) = c \, (\forall x \in [a, b])$ ise kolayca

$$0 \leq |T_\lambda| = \left| c. \int_a^b \sin(\lambda x + \alpha) \, dx \right| = |c| \left| \frac{\cos(\lambda x + \alpha) - \cos(\lambda x + \alpha)}{\lambda} \right| \leq \frac{2. |c|}{\lambda}$$

nedeniyle iddia apaçıktır, dolayısıyla iddia f bir basamak fonksiyonu ise kolayca elde edilir (nasıl?). Şimdi basamak fonksiyonu olması gerekmeyen bir $f \in PC[a, b]$ alınsın. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde, buaralığın uygun bir $\{x_0(\varepsilon), x_1(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)\}$ parçalanışı için

$$0 \leq S_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)) - s_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon)) < \varepsilon$$

olur. Her bir $0 < k \leq n$ indisi için $I_k = [x_{k-1}(\varepsilon), x_k(\varepsilon))$ ve ayrıca $m_k = \inf f(I_k)$ ve $M_k = \sup f(I_k)$ ve $I_n = [x_{n-1}(\varepsilon), x_n(\varepsilon)) = [x_{n-1}(\varepsilon), b]$

$$g(x) = m_k\, (\forall x \in I_k, \forall k = 1, 2, ..., n)$$

$$h(x) = M_k\, (\forall x \in I_k, \forall k = 1, 2, ..., n)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar, karekteristik fonksiyonlar yardımıyla (dikkat: ünlü χ_A karekteristik fonksiyonu bilindiği gibi $\chi_A = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$ biçiminde tanımlanır.) $g = \sum_{0<k\leq n} m_k.\chi_{I_k}$ ve $h = \sum_{0<k\leq n} M_k.\chi_{I_k}$ ve $g \leq f \leq h$ yani $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $(\forall x \in [a, b])$ gerçekler, çünkü $[a, b] = \bigcup_{0<k\leq n} I_k$ birleşimine katılan aralıklar ikişerli ayrıktırlar ve herbir $x \in [a, b]$ için $x \in I_{k_x}$ gerçekleyen tek bir $0 < k_x \leq n$ indisi var ve $f(x) \in f(I_{k_x})$ nedeniyle

$$g(x) = m_{k_x} = \inf f(I_{k_x}) \leq f(x) \leq \sup f(I_{k_x}) = M_{k_x} = h(x)$$

olur, üstelik $\int_a^b g(x)dx = \sum_{0<k\leq n} m_k\,(x_k(\varepsilon) - x_{k-}(\varepsilon)) = s_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon))$ ve $\int_a^b h(x)dx = S_f(x_0(\varepsilon), ..., x_n(\varepsilon))$ ve $0 \leq f(x) - g(x) = |f(x) - g(x)|$ $(\forall x \in [a, b])$ nedeniyle

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b (f(x) - g(x)) . \sin(\lambda x + \alpha)\, dx\right| &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| .dx = \int_a^b (f(x) - g(x)).dx \\ &\leq \int_a^b (h(x) - g(x)).dx = S_f - s_f < \varepsilon \end{aligned}$$

ve ayrıca yukarıda gözlendiği gibi g basamak fonksiyonu için $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x). \sin(\lambda x + \alpha)\, dx = 0$ nedeniyle

$$\exists M_\varepsilon > 0, \left|\int_a^b g(x). \sin(\lambda x + \alpha)\, dx\right| < \varepsilon \ \ (\forall \lambda \in [M_\varepsilon, \infty))$$

olduğundan, sonuçta her $\lambda \in [M_\varepsilon, \infty)$ için

$$T_\lambda = \int_a^b (f(x) - g(x)) \,.\sin(\lambda x + \alpha)\, dx + \int_a^b g(x).\sin(\lambda x + \alpha)\, dx$$

integral değerleri, $|T_\lambda| < \varepsilon + \left| \int_a^b g(x).\sin(\lambda x + \alpha)\, dx \right| < 2\varepsilon$ gerçekler bu istenendir.

Sonuç: $f \in PC[-\pi, \pi]$ ise $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) dx = 0$ olur.

Dikkat: Bu en son sonuç, her $f \in PC[-\pi, \pi]$ için, Teorem 1'de kanıtlanan ünlü Bessel eşitsizliğinin benzerini kanıtlayarak elde edilecek olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \leq \pi.\, \|f\|_t^2$$

eşitsizliğinden de çıkarsanır, çünkü oradaki c_n lerin yerine bu kez $\dfrac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_t^2} = \frac{1}{\pi} \langle f, \varphi_n \rangle$ ve $\dfrac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n\|_t^2} = \frac{1}{\pi} \langle f, \psi_n \rangle$ ve dolayısıyla $|c_n|^2 . \|g_n\|_t^2$ sayılarının yerine $\frac{1}{\pi} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$ ve $\frac{1}{\pi} |\langle f, \psi_n \rangle|^2$ gelir. O halde hem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$ hem de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_n \rangle|^2$ serisi yakınsar (neden?), böylelikle $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \langle f, \psi_n \rangle$ kısacası

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx.dx = 0 = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx.dx$$

bulunur (neden?). Böylelikle her $f \in PC[-\pi, \pi]$ için şunlar bulunur:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx.\sin \frac{x}{2} dx = 0 = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx.\cos \frac{x}{2} dx$$

çünkü iki satır üstte bulunanlar, bu kez $g(x) = f(x).\cos \frac{x}{2}$ ve $h(x) = f(x) \sin \frac{x}{2}$ fonksiyonlarına uygulanır, böylece her $f \in PC[-\pi, \pi]$ için istenen sonuç kolayca elde edilir:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) dx = 0$$

Dikkat : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|$ serisini ıraksatan $f \in C[-\pi, \pi]$ elemanlarının var olduğu unutulmamalıdır.

Önerme 4 : $f \in PC[-p, p]$ ve üstelik f fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ kümesinde $2p$ periyotlu ise, her $a \in \mathbb{R}$ sabiti için şunlar geçerlidir:

$$\int_a^{a+2p} f(x).dx = \int_{-p}^{p} f(x)dx = \int_0^{2p} f(x)dx$$

İspat: f fonksiyonunun, öncelikle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = f(x + 2p)$ gerçeklediğini çünkü tümevarım kullanıp kolayca, her $n \in \mathbb{N}$, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(x + 2np)$ gösterip sonuçta $f(x - 2np) = f((x - 2np) + 2np) = f(x)$ elde edilir. Şimdi $a \in \mathbb{R}$ aracılığıyla, $k_0 = \left[\frac{a}{2p}\right] \in \mathbb{Z}$ tam kısım değeri tanımlanıp, kısalık amacıyla $\int_0^{2p} f(x)dx$ integral değeri T ile yazılırsa, öncelikle $x = t + 2k_0p$ dönüşümü yapılıp $f(t + 2k_0p) = f(t)$ nedeniyle, üstelik $2k_0p \leq a < (2k_0 + 2)p \leq a + 2p < (2k_0 + 4)p$ ve

$$\int_{2k_0p}^{(2k_0+2)p} f(x).dx = \int_0^{2p} f(t + 2k_0p)dt = \int_0^{2p} f(t)dt = \int_{(2k_0+2)p}^{(2k_0+4)p} f(x).dx = T$$

olduğundan aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} T &= \int_{(2k_0+2)p}^{(2k_0+4)p} f(x).dx = \int_{(2k_0+2)p}^{a+2p} f(x).dx + \int_{a+2p}^{(2k_0+4)p} f(x).dx \Rightarrow \\ \int_{(2k_0+2)p}^{a+2p} f(x).dx &= T - \int_{a+2p}^{(2k_0+4)p} f(x).dx = T - \int_a^{(2k_0+2)p} f(x + 2p).dx = T - \int_a^{(2k_0+2)p} f(x).dx \end{aligned}$$

ve

$$\int_a^{(2k_0+2)p} f(x).dx = \int_a^{(2k_0+2)p} f(x).dx + \int_{(2k_0+2)p}^{a+2p} f(x).dx = T$$

bulunur.

Önerme 5: Herhangi bir $f \in PC[-\pi, \pi]$ elemanının Fourier serisinin kısmi toplamları, aşağıdaki Dirichlet bağıntısı'nı gerçekler:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t).\frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \ \ (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

İspat: Öncelikle f fonksiyonunun tanımını 2π periyotlu olarak tüm $\mathbb{R}$ kümesine genişletelim. Sözü edilen Fourier katsayılarının değerlerini yazarsak

$$\begin{aligned} a_k \cos kx &= \frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t). \cos kt.dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t). \cos kx. \cos ktdt, \\ b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t). \sin kx. \sin ktdt \end{aligned}$$

ve ayrıca
$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2} dt$ olduğundan, sonuçta toplam alarak

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\,(t - x)\right] dt$$

bulunur, oysa her $y \in \mathbb{R}$ için

$$2\sin\frac{y}{2}.\sum_{k=1}^{n}\cos ky=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)y\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right)\right)=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)-\sin\frac{y}{2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ky=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{2\sin\frac{y}{2}}$ $(\forall y\notin\{0,\mp 2\pi,\mp 4\pi,,\mp 6\pi,...\})$
olduğundan kolayca

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(u+x)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}du\\
&\overset{*}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}du\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt
\end{aligned}$$

istenen sonucu bulunur, burada (*) eşitliği yazılırken hem f fonksiyonunun hemde $g(x)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$ fonksiyonunun 2π periyotlu olduğu gözlenerek bir önceki önerme kullanılmalıdır, gerçekten, hem $\cos(2n+1)\pi=-1$ hemde $\cos\pi=-1$ nedeniyle

$$\begin{aligned}
g(x+2\pi) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x+(2n+1)\pi\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right).\cos(2n+1)\pi}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\pi}\\
&= g(x)
\end{aligned}$$

geçerli olmaktadır.

Önerme 6:

$$\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

İspat:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt=\frac{2\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

Dirichlet Teoreminin Kanıtlaması

Şimdi **önce**, teoremin ifadesindeki $f\in PC[-\pi,\pi]$ için,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right) \;\; (\forall x \in [-\pi, \pi]) \qquad (1)$$

koşulunun gerçeklenmesi durumunda bir kanıtlama verelim, çünkü f fonksiyonunun bu özel koşulu gerçekleşmesi durumunda bir kanıtlama verilebilirse, genel durumda kanıtlamayı başarmak çok kolaydır. Şimdi f fonksiyonu $f \in PC[-\pi, \pi]$ ve $f\,' \in PC[-\pi, \pi]$ koşullarını ve yanısıra, yukarıda yazılı (1) koşulunu gerçeklerse, Riemann-Lebesgue Lemmasının ardından gelen sonucu kullanarak, f fonksiyonunun x noktasındaki Fourier serisinin kısmi açılımlarının $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ gerçeklendiğini gösterelim. Önce f in tanımını 2π periyotlu olarak tüm $\mathbb{R}$ kümesine genişletelim. Dikkat edilirse son iki önerme yardımıyla

$$\begin{aligned}
s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)dt
\end{aligned}$$

bulunur, burada apaçık biçimde, en son tümlev içinde köşeli parantez içinde yazılı fonksiyona $g_x(t)$ denilmiş ve $g_x(0) = \frac{1}{2}\left(f\,'(x+) + f\,'(x-)\right)$ alınmıştır. Amacımız g_x in t değişkeninin parçalı sürekli fonksiyonu olduğunu göstermektir. Öncelikle $f\,' \in PC[-\pi, \pi]$ nedeniyle hem $f\,'(x+) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sağ limiti ve benzer biçimde hem de $f\,'(x-)$ sol limiti var olduğundan, sonuçta

$$g_x(0+) = \lim_{h\to 0^+} g_x(h) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} = f\,'(x+).1 = f\,'(x+)$$

ve benzer biçimde $g_x(0-) = f\,'(x-)$ limitleri var (tanımlıdır). Eğer f fonksiyonunun, hepsi birinci türden olmak üzere tüm süreksizlik noktaları $x_1, x_2, ..., x_n$ ise, bunlardan farklı herhangi bir x_0 için g_{x_0} fonksiyonu t değişkeninin parçalı sürekli fonksiyonudur, çünkü bu fonksiyon $x_0 + t \notin \{x_1, ..., x_n\}$ gerçekleyen herbir $t \in [-\pi, \pi]$ noktasında apaçık biçimde süreklidir çünkü sözgelimi $g'_{x_0}(t+) = g_{x_0}(t) = g_{x_0}(t-)$ geçerlidir, çünkü

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} g_{x_0}(t+h) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+t+h)-f(x_0)}{t+h}.\lim_{h\to 0}\frac{\frac{t+h}{2}}{\sin\frac{t+h}{2}} \\
&= \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}.\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = g_{x_0}(t)
\end{aligned}$$

olur, çünkü $x_0 + t$ noktasında f fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+t+h) = f(x_0+t)$ geçerlidir.

Eğer $x_0 + t_0 = x_1$ ise $t_0 \neq 0$ gözleyerek

$$g'_{x_0}(t+) = \frac{f((x_0+t_0)+) - f(x_0)}{2\sin\frac{t_0}{2}} \in \mathbb{R}$$

sağ limitinin ve benzer biçimde $g_{x_0}(t-)$ sol limitinin tanımlı olduğu anlaşılır. O halde $g_{x_0} \in PC[-\pi,\pi]$ olur. Tümüyle benzer biçimlerde $g_{x_1}, ..., g_{x_n}$ fonksiyonları da $[-\pi,\pi]$ aralığında parçalı süreklidir. Demek ki her $x \in [-\pi,\pi]$ için $g_x \in PC[-\pi,\pi]$ olmaktadır, sonuçta Riemann-Lebesgue Lemması kullanılarak aşağıdaki bulunur:

$$\lim_{n\to\infty}(s_n(x) - f(x)) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)dt = 0.$$

Şimdi kanıtlamanın son aşamasında $f \in PC[-\pi,\pi]$ ve $f\,' \in PC[-\pi,\pi]$ olsun, bu f fonksiyonu yukarıda yazılı (1) koşulunu gerçeklemese bile, her $x \in [-\pi,\pi]$ için $f(x+)$ sağ ve $f(x-)$ sol limitlerinin var (tanımlı) olduğu unutulmadan, bu f aracılığıyla $[-\pi,\pi]$ aralığında bu kez

$$f^*(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))\ \ (\forall x \in [-\pi,\pi])$$

biçiminde bir f^* fonksiyonu tanımlansın. Eğer x noktası f için bir süreklilik noktası ise $f(x+) = f(x) = f(x-)$ nedeniyle $f^*(x) = f(x)$ bulunacağına, eğer x_1 noktası f için 1. türden bir süreksizlik noktası ise, uygun bir $(x_1, x_1+\delta)$ aralığındaki her noktada f sürekli olduğundan (neden?), kısacası her $x \in (x_1, x_1+\delta)$ için $f^*(x) = f(x)$ olduğundan $f^*(x_1+) = f(x_1+)$ bulunacağına dikkat ediniz. O halde her $x \in [-\pi,\pi]$ için

$$\frac{1}{2}(f^*(x+) + f^*(x-)) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = f^*(x)$$

bulunarak hem $f^* \in PC[-\pi,\pi]$ olur, hemde f^* fonksiyonu yukardaki (1) koşulunun ve ayrıca$(f^*)' \in PC[-\pi,\pi]$ gerçeklediği anlaşılır. Üstelik f^* ve f fonksiyonlarının, sonlu tane dışındaki tüm noktalarda değerleri eşit ve sonuçta aynı nitelikler, her $n \in \mathbb{N}$ için sözgelimi $f^*(x)\cos nx$ ve $f(x)\cos nx$ fonksiyonları için geçerli olduğundan $\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ olur (neden?), bu nedenle f ve f^* fonksiyonlarının **Fourier katsayıları eşittir**, tüm bunlardan ve birinci aşamada bulunan sonuç gereği

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,(\forall x \in [-\pi,\pi])$$

istenen sonucu bulunur.□

Şimdi de Dirichlet Teoreminden çıkarsanan şu ilginç sonucu görelim.

Önerme7:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

İspat:$f \in C[-\pi,\pi]$ fonksiyonu aşğıdaki gibi tanımlansın.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x} & ; x \in [-\pi,\pi] \text{ ve } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dikkat edilirse $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x\in(0,\frac{\pi}{2})}} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{1}{2}.\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$ ve benzeriyle $\frac{1}{2} = f(0) = f(0+) = f(0-)$ ve zaten $x \neq 0$ gerçekleyen tüm $x \in [-\pi,\pi]$ noktalarında f sürekli olduğundan $f \in C[-\pi,\pi]$ bulunur. Üstelik

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}}{h^2} \\ &= -\frac{1}{8}.\lim_{h\to 0^+} \sin\frac{h}{2} = 0 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} \end{aligned}$$

gerçeklendiği L'Hopital kuralı kullanarak bulunarak f in $x = 0$ noktasında türetilebildiği ve $x \neq 0$ için $f'(x) = \left(\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x^2}$ bularak f in hem türetilebilir hem de türevinin tüm $[-\pi,\pi]$ aralığında sürekli olduğu anlaşılarak (nasıl?) $f' \in C[-\pi,\pi]$ bulunur. Dirichlet teoremi nedeniyle, f fonksiyonunun Fourier serisi her bir $x \in (-\pi,\pi)$ noktasında

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt = s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x)$$

değerine yakınsar, özellikle $x = 0$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt \to \pi.f(0) = \frac{\pi}{2}$$

yakınsaması gerçekleşir. Dikkat: (1) bağıntısında tanımlanan f fonksiyonu $f(-x) = f(x)\,(\forall x \in [-\pi,\pi])$ gerçeklediği için çifttir, $h(t) = f(t)\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$ fonksiyonu da çifttir, $t \in (0,\pi)$ için $f(t) = \dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t}$ olduğundan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{t}.\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}dt \to \frac{\pi}{2}$$

ve dolayısıyla

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}dt \to \frac{\pi}{2}$$

bulunur, oysa bu

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

verir.□

Teorem 4: f fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli ve 2π periyotlu ve üstelik $f' \in PC[-\pi,\pi]$ olsun. Bu durumda f nin Fourier serisi tüm $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak ve düzgün yakınsar.

İspat: f' fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$a'_0 = 0,\ a'_n = n.b_n \text{ ve } b'_n = -n.a_n\ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçekler, burada a_n ve b_n ler sırasıyla f fonksiyonunun Fourier katsayılarını göstermektedir, sözgelimi

$$\begin{aligned} a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx &= \frac{1}{\pi}\left((f(\pi)\cos n\pi - f(-\pi)\cos n\pi) + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) \\ &= \frac{(f(\pi)-f(-\pi))\cos n\pi}{\pi} + n.b_n \end{aligned}$$

bulunur, çünkü f fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan $f(-\pi) = f(-\pi+2\pi) = f(\pi)$ ve böylelikle $f(\pi) - f(-\pi) = 0$ geçerlidir. Benzer biçimde $a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{(f(\pi)-f(-\pi))}{\pi} = 0$ ve $b'_n = -n.a_n$ bulunur. Oysa herhangi bir $f \in PC[-\pi,\pi]$ için, onun Fourier katsayılarının

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \|f\|_t^2 < +\infty$$

gerçeklediği sayfa 149da(=?) gösterilmişti. (dikkat: $a_n = \frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\pi}$ ve $b_n = \frac{\langle f,\psi_n\rangle}{\pi}$ olduğunu unutmayınız), böylelikle f' fonksiyonunun Fourier katsayıları için bu sonuç yazılırsa

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(a'_n\right)^2 + \left(b'_n\right)^2\right) < +\infty$$

ve böylece f in katsayıları için ünlü Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak ve

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(a'_n\right)^2 + \left(b'_n\right)^2\right)$$

yazarak

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \sqrt{\frac{\pi^2 S_0}{6}} < +\infty$$

sonucu bulunur, çünkü

Cauchy-Schwarz eşitsizliği: $0 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| . |b_k| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2} \right) \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{b_k^2} \right)$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right) \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \sqrt{S_0}
\end{aligned}$$

yani $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \sqrt{S_0}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bulup $n \to \infty$ için limit alarak istenen bulunur. O halde $n = 2$ için CS eşitsizliğiyle

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq |a_1| . |b_1| + |a_2| . |b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} . \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

olduğundan, sonuçta her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + b_n^2} . \sqrt{\cos^2 nx + \sin^2 nx} \right) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

nedeniyle, f fonksiyonunun Fourier serisinin Weierstrass M-ölçütü kullanılarak, tüm $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu anlaşılır.

Teorem 5: $f \in C[-\pi, \pi]$ ve $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $((\forall x \in [-\pi, \pi]))$ ise

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + \left(a_n + (-1)^{n+1} a_0 \right) \sin nx}{n} \; (\forall x \in [-\pi, \pi])$$

olur.

İspat: F alan fonksiyonu süreklidir, türetilebilir ve Teorem 4 nedeniyle, üstelik $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (trigonometrik serisi düzgün yakınsak olduğundan, terim terime integrallenebilir, sonuçta

$$
\begin{aligned}
F(x)=\int_a^x f(t)dt &= \frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\sin nt}{n}\bigg|_0^x-\frac{b_n\cos nt}{n}\bigg|_0^x\right)\\
&= \frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}
\end{aligned}
$$

olur, oysa her $x\in(-\pi,\pi)$ için $\frac{x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+a_0.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+\big(a_n+(-1)^{n+1}a_0\big)\sin nx}{n}\ (\forall x\in(-\pi,\pi))
\end{aligned}
$$

istenen sonucu bulunur.

Örnek: $\forall x\in(-\pi,\pi)$ için

$$
\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad,\quad \frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}
$$

ve

$$
\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2x}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}
$$

gösterin.

Çözüm: $f(x)=\frac{x}{2}$ için, f nin Fourier açılımı $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ olduğu ve sonuçta $a_0=0=a_n$ ve $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ olduğundan

$\frac{x^2}{4}=\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\cos nx}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ $(\forall x\in(-\pi,\pi))$ açılımı, bir önceki teorem ile bulunur, oysa

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \left(1^2+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

olduğundan (burada $\frac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ için aşağıdaki örneklere bakınız), sonuçta

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (\forall x \in (-\pi, \pi))$$

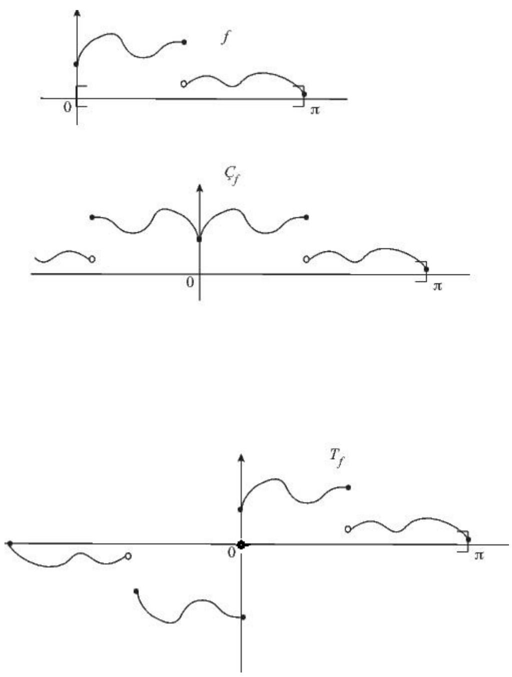
Diğeri ödevdir.

Tanım 2. (Fourier Sinüs ve Fourier Cosinüs Açılımları)

$[0, \pi]$ aralığında tanımlanmış gerçel değerli bir f fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığına **çift genişlemesi** ve **tek genişlemesi**

$$\text{Ã‡}_f\,(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0, \pi] \\ f(-x) & ; x \in [-\pi, 0) \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{T}_f\,(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in (0, \pi) \\ 0 & ; x = 0, \pm\pi \\ -f(-x) & ; x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

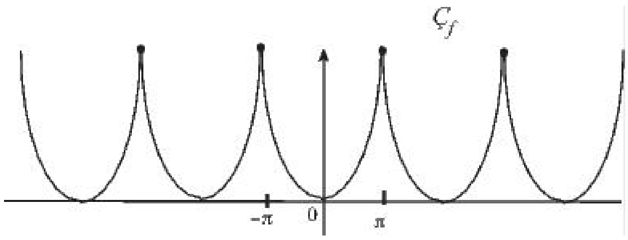
biçiminde tanımlanan fonksiyonlara denilir. Bunların gerçekten sırasıyla çift ve tek fonksiyonlar olduklarını gözleyiniz, yani her $x \in [-\pi, \pi]$ için Ç$_f\,(-x)$ =Ç$_f\,(x)$ ve $\mathrm{T}_f\,(x) = -\mathrm{T}_f\,(x)$ geçerlidir, sözgelimi $x \in [-\pi, 0)$ ise $-x \in (0, \pi]$ ve böylece Ç$_f$ fonksiyonunun tanımı gereği Ç$_f\,(-x) = f(-x)$ =Ç$_f\,(x)$ bulunur. **Dikkat**: Apaçık biçimde $f \in PC\,[0, \pi]$ ise hem Ç$_f \in PC\,[-\pi, \pi]$ hem de $\mathrm{T}_f \in PC\,[-\pi, \pi]$ gerçeklenir. Aşağıda basit bir örnek yer almaktadır.

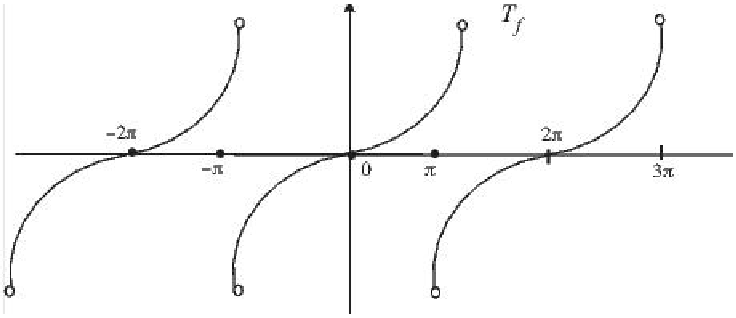


Şekil 9:

Örnekler:

1) $f(x) = x^2\ (\forall x \in [0,\pi])$ fonksiyonunun Fourier sinüs ve Fourier cosinüs açılımlarını bulunuz. $Ç_f\,(x)$ ve $T_f\,(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdadır.





Şekil 10:

$$Ç_f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad T_f(x) = 2\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin nx - \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$$

2) $f(x) = \cos x\ \ (\forall x \in (0,\pi))$ ise aşağıdaki trigonometrik bağıntıdan yararlanarak gösteriniz:

$$\cos(ax).\sin(bx) = \frac{1}{2}\big(\sin((a+b)x) - \sin((a-b)x)\big) \quad (\forall a,b \in \mathbb{R})$$

$$T_f(x) = \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx), \qquad \frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{(4n-2)^2-1}$$

bu sonucun $\cos x = \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx)\ (\forall x \in (0,\pi))$ demek olduğunu gözleyiniz.

3) $e^x = \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(1+(-1)^{n+1}e^{\pi}\right)}{n^2+1}\sin(nx)\ \ (\forall x \in (0,\pi))$ gösterin.

4) $\pi - x = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\ \ (\forall x \in (0,\pi))$ gösterin.

5) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}\ ,\quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\quad (\forall x \in [0,\pi])$ gösterip elde ediniz:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

6) $\dfrac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}=\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{3^3}-\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\dfrac{1}{9^3}+\dfrac{1}{11^3}-\cdots$ gösterin.

7) e^x fonksiyonunun cosinüs, $\sin x$ fonksiyonunun cosinüs açılımlarını bulunuz.

8) Yukardaki bilgilerle aşağıdaki şaşırtıcı eşitlikleri gösteriniz:

$$3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\quad,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}-1}{n^2}=0$$

Ek: $\mathbf{PC}\,[-a,a]$ vektör uzayında Fourier Serileri

$a>0$ olmak üzere $PC\,[-a,a]$ vektör uzayında dikkat edilirse

$$\varphi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ \ (\forall n\geq 0)\quad,\quad \Psi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

olmak üzere $\{\varphi_0,\varphi_1,\Psi_1,\varphi_2,\Psi_2,...\}$ ailesi bir **dik ailedir,** yani aşağıdakiler gerçekleşir:

$$n,m\in\mathbb{N}\text{ için } \langle\varphi_n,\Psi_m\rangle=0\text{ ve } n\neq m\text{ için } \langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=0=\langle\Psi_n,\Psi_m\rangle$$

Örneğin $\cos(2m\pi)=\cos(-2m\pi)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n,\Psi_m\rangle&=\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)dx\\&=\left(\frac{-a}{4m\pi}\right)(\cos(2m\pi)-\cos(-2m\pi))=0\end{aligned}$$

bulunur, üstelik sözgelimi

$$\begin{aligned}\|\varphi_n\|_t^2=\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle&=\int_{-a}^{a}\cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\int_{0}^{a}\left(1+\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right)dx\\&=a+\frac{a}{2n\pi}(\sin(2n\pi)-\sin 0)=a\end{aligned}$$

ve $\|\varphi_0\|_t^2=2a$ olduğundan

$$\begin{aligned}a_n(f)&=\frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|_t^2}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\\b_n(f)&=\frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|_t^2}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x).\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\end{aligned}$$

ve sonuçta $f \in PC\left[-\pi,\pi\right]$ elemanının Fourier Serisi

$$\frac{a_0\left(f\right)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(f\right).\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ +\ b_n\left(f\right).\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)$$

olur. Bu vektör uzayında da bu bölümdeki Dirichlet Teoremi'nin geçerli olduğunu gözleyip, aşağıdaki fonksiyonların açılımlarını elde ediniz:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & ;x\in\left(-a,0\right) \\ a-x & ;x\in\left(a,0\right) \end{cases}$$

$$f\left(x\right)=\frac{a}{4}+\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\left(2n-1\right)^2}\cos\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{a}\right)+\frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)\left(\forall x\in\left(-a,a\right),x\neq 0\right)$$

$$g\left(x\right)=x\ \ ;x\in\left(-a,a\right)$$
$$g\left(x\right)=\frac{2a}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{n}$$

Bölüm 3

Özge Olmayan Tümlevler

Bilindiği gibi bir $[a,b]$ aralığında tanımlı ve **Riemann tümlevlenebilir** olan f gerçel değerli fonksiyonu için $\int_a^b f(x)\,dx$ Riemann tümlevine özge(ing:proper) tümlev denir. Türkçe matematik derslerinde özge tümlev yerine **belirli tümlev** de denilmektedir. Buna karşılık aşağıdaki tanıma dikkat edilmelidir:

Tanım 1: f fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$ biçiminde tanımlanır ve ancak bu limit bir gerçel sayı ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tümlevine **birinci türden yakınsak özge olmayan tümlev** ya da **birinci türden yakınsak genelleştirilmiş tümlev** denilir. Bu limit bir gerçel sayı değilse ya da tanımsız ise, ancak bu durumda $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tümlevine **ıraksak** denilir.

Örnekler 1

1) $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx$, $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$, $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ tümlevleri yakınsar, $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+x+1}dx$ ıraksar.

Gerçekten

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\ln\left(1+e^{-x}\right) = -\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

böylece

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1}{e^x+1}dx = \lim_{M\to\infty}\left(\ln\left(\frac{e^M}{e^M+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2,$$
$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \lim_{M\to\infty}\left(\arctan e^M - \arctan 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty}\left(\arctan M - \arctan 0\right) = \frac{\pi}{2},$$
$$0 \le \int_0^M \frac{1}{x^4+1}dx \le \int_0^{\ln M^2} \frac{\sqrt{e^y}}{e^{2y}+1}dy \le \int_0^{\ln M^2} \frac{e^y}{e^{2y}+1}dy$$

ve $M\to\infty$ için limit alarak

$$0 \le \int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx \le \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{\pi}{4}$$

bulunup $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ tümlevinin yakınsak olduğu anlaşılır. Şimdi dikkat edilirse her $M > 0$ için

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{M} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx \ ,$$

$b > 0$ ise

$$\int_0^{M} \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)\Bigg|_0^M \quad , \quad \lim_{M\to\infty} \arctan\left(\frac{M+a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ve $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ bilgileri kulanılırsa kolayca $M \to +\infty$ için limit alıp $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1}dx = +\infty$ bulunur. Çünkü $\frac{1}{2}\int_0^{M} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\sqrt{M^2+M+1} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ve $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ geçerlidir.

2) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln(1+x)}dx$, $\int_0^{\infty} \sin x dx$, $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ tümlevleri ıraksar.
Dikkat edilirse $\lim_{x\to\infty} \cos x$ **tanımsız** olduğu için

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} \sin x dx = \lim_{M\to\infty}(1-\cos M)$$

limiti tanımsızdır, böylelikle $\int_0^{\infty} \sin x dx$ ıraksaktır. Ötekiler

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty} \ln\sqrt{M^2+1} = +\infty \ ,$$

$$\ln M = \int_1^{M} \frac{1}{x}dx \leq \int_1^{M} \frac{1}{\ln(1+x)}dx$$

nedeniyle $\lim_{M\to\infty}\int_1^{M} \frac{1}{\ln(1+x)}dx = +\infty$,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \; (x = \tan u \text{ dönüşümüyle}) = \lim_{M\to\infty} \ln\left(M+\sqrt{M^2+1}\right) = +\infty$$

bulunur, burada $\tan u > 0$ iken

$$\frac{1}{\cos u} = \frac{1+\sin u}{\cos^2 u}.\frac{\cos u}{1+\sin u} = \left(\ln\left(\frac{1+\sin u}{\cos u}\right)\right)'$$

bilgileri kullanılmıştır (nerede?)

3) $\int_a^{\infty} e^{-\alpha x}dx \; (0 < \alpha)$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}dx \; (0 < a)$ ve $\int_a^{\infty} \frac{x^p}{e^x}dx$, $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p e^x}dx \; (0 < a)$ yakınsaklıklarını inceleyiniz.

$0 < \alpha$ nedeniyle $\displaystyle\int_a^\infty e^{-\alpha x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-\alpha x}dx = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha e^{\alpha a}} - \frac{1}{\alpha e^{\alpha M}}\right) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha a}}$, ve son üç tümlevde $0 < a$ olduğunu unutmadan

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{-p}dx = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} & ; p > 1 \\ +\infty & ; p < 1 \end{cases}$$

Dikkat: $p = 1$ ise yine $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{M\to\infty}(\ln M - \ln a) = +\infty$ bulunur, demek ki $0 < a$ ise $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$ genelleştirilmiş tümlevi ancak ve yalnız $p > 1$ için yakınsamaktadır. Öte yandan $0 < a$ ise, $p\in\mathbb{R}$ **ne olursa olsun** son iki tümlev **yakınsaktır**, çünkü $\displaystyle\int_1^\infty x^p e^{-x}dx$ ve $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p e^x}dx$ yakınsaktır. Gerçekten $x \in [1,\infty)$ olmak üzere, Arşimet İlkesi gereği $p < n_0$ gerçekleyen bir n_0 doğal sayısı var ve $\frac{x^{2n_0+1}}{(2n_0+1)!} \le \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ yani $0 < x^{n_0}e^{-x} \le \frac{M_0}{x^{n_0+1}}$ ve $0 \le \displaystyle\int_1^\infty x^p e^{-x}dx \le M_0$. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{n_0+1}}dx = \frac{M_0}{n_0} < +\infty$ böylelikle ister $1 \le a$ ister $a < 1$ olsun $\displaystyle\int_a^\infty x^p e^{-x}dx$ yakınsak olur, çünkü örneğin $a < 1$ ise $\displaystyle\int_a^\infty x^p e^{-x}dx = \int_a^1 x^p e^{-x}dx + \int_1^\infty x^p e^{-x}dx = \ell \in \mathbb{R}$ olur, çünkü $\displaystyle\int_a^1 x^p e^{-x}dx$ belirli Riemann tümlevidir, bir gerçel sayıdır. O halde $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p e^x}dx$ tümlevi, her $p \in \mathbb{R}$ için $\displaystyle\int_a^\infty x^{-p}e^{-x}dx$ tümlevidir ve az önce gözlendiği gibi yakınsaktır.

Buna karşılık dikkat edilirse $0 < p$ iken $\displaystyle\int_0^\infty e^{-px}dx = \frac{1}{p}$ bulunur, çünkü şu geçerlidir:

$$\int_0^M e^{-px}dx = \frac{1}{pe^{px}}\bigg|_M^0 = \frac{1}{p} - \frac{1}{pe^{pM}}.$$

4) Her $n \in \mathbb{N}$ için, $p > 0$ ise $\displaystyle\int_0^\infty e^{-px^n}dx$ tümlevi yakınsaktır.

Gerçekten $\displaystyle\int_0^\infty e^{-px}dx = \frac{1}{p}$ gerçeği 3) örneğinde gözlenmişti, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-px^2}dx = \int_0^1 e^{-px^2}dx + \int_1^\infty e^{-px^2}dx$ yakınsaktır, birincisi belirli Riemann tümlevidir ve ikincisi için ayrıca $\displaystyle\int_1^\infty e^{-px^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-px^2}dx = \left(-\frac{1}{2p}\right)\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x}.\left(e^{-px^2}\right)'dx$ olur ve $\displaystyle\int_0^M f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_0^M - \int_0^M f'(x)\,g(x)\,dx$ nedeniyle $\left(-\frac{1}{2p}\right)\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{Me^{M^2}} - \frac{1}{e} + \int_1^M \frac{1}{x^2e^{x^2}}dx\right) = \frac{1}{2pe} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2e^{x^2}}dx < \frac{1}{2pe} + 1 < +\infty$ olur, çünkü $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2e^{x^2}}dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{M}\right) = 1$ geçerlidir. Sonuçta her $n \ge 2$ için $0 \le \displaystyle\int_1^\infty e^{-px^n}dx \le \int_1^\infty e^{-px^2}dx < +\infty$ gözlenmelidir.

Örnek: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{5\pi}{6\sqrt{3}}$ ve $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ gösteriniz.

Çözüm: Kesirlerine ayırırsak

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right)\right) \; ,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^M \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int_0^M \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int_0^M \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^M - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^M + \frac{1}{2}\int_0^M \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{M+1}{\sqrt{M^2-M+1}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^M \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{M+1}{\sqrt{M^2-M+1}}\right) + \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^M
\end{aligned}$$

böylece $M \to \infty$ için limit alıp $\lim\limits_{M\to\infty} \arctan\left(\frac{2M-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ve $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ hatırlanırsa istenen

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1}{x^3+1}dx \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{M+1}{\sqrt{M^2-M+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2M-1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}.\ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. İkincisi aşağıdaki yazılış kullanılarak benzer yöntemle yapılır:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right) \; .$$

Örnek: Gösteriniz: $t = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\ln(1+x)}dx$ tümlevi yakınsaktır.

Çözüm: Herşeyden önce $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right).\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right) = 1.1 = 1 > 0$ gözlenmelidir yani $f(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında birinci türden süreksizliği vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}dx\right)$$

belirli tümlevleri tanımlanırsa, $y = x - k\pi$ yani $x = y + k\pi$ dönüşümü yapılırsa sinüs fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında negatif değer **almadığı** ve her $y \in [0,\pi]$ ve her $k > 0$ için $0 < \ln(k\pi+1) \le \ln(k\pi+1+y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}dx &= \int_0^\pi \frac{\sin(y+k\pi)}{\ln(k\pi+1+y)}dy = (-1)^k\int_0^\pi \frac{\sin y}{\ln(k\pi+1+y)}dy \; , \\
0 \le a_k = \int_0^\pi \frac{\sin y}{\ln(k\pi+1+y)}dy &\le \frac{1}{\ln(k\pi+1)}\int_0^\pi \sin y dy = \frac{2}{\ln(k\pi+1)} \quad (k = 1, 2, ..., n)
\end{aligned}$$

böylece $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)\, a_k \; (\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve aşağıdaki istenen sonuç

$$t = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} dx = \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \textbf{yakınsak}$$

bulunur, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ ve her $y \in [0,\pi]$ için $e < 3 < 4 < \pi+1+y \le n\pi+1+y$ ve $1 < \ln(n\pi+1+y) < \ln((n+1)\pi+1+y)$ ve

$$0 \le a_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\ln((n+1)\pi+1+y)} dy < \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\ln(n\pi+1+y)} dy = a_n \le \frac{2}{\ln(n\pi+1)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

nedeniyle $a_n \downarrow 0^+$ gözlenirse son seri ünlü Leibniz Teoremi nedeniyle **yakınsaktır,** bitti. Siz buna karşılık **p-Ölçütü** kullanarak $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln(x+1)}$ tümlevinin **ıraksak** olduğunu gösteriniz.

Kıyaslama Ölçütü: Her $x \in [a,\infty)$ için f ve g sürekli fonksiyonları $0 \le f(x) \le g(x)$ gerçeklensin. Eğer $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ tümlevi de yakınsak; eğer $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ıraksaksa $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ tümlevi de ıraksaktır.

Kanıtlama: $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ yakınsak olsun ve f fonksiyonunun **alan fonksiyonu** $F(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt \; (\forall x \in [a,\infty))$ biçiminde tanımlansın. f sürekli olduğundan $F'(x) = f(x) \; (\forall x \in [a,\infty))$ gerçeklediği, böylelikle F fonksiyonunun türetilebilir ve sonuçta sürekli olduğu anlaşılır, üstelik her $x \in [a,\infty)$ için $F(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt \overset{*}{\le} \int_a^{x} g(t)\,dt \le \int_a^{\infty} g(t)\,dt = \int_a^{\infty} g(x)\,dx = \ell \in \mathbb{R}$ geçerlidir, burada $(*)$ eşitsizliği yazılırken $f(x) \le g(x) \; (\forall x \in [a,\infty))$ yani her $t \in [a,x]$ için $f(t) \le g(t)$ eşitsizliği kullanılmıştır. O halde $F(x) \le \ell$ $(\forall x \in [a,\infty))$ ve üstelik f negatif olmayan değerler aldığı ve $F'(x) = f(x) \ge 0$ olduğundan F tekdüze azalmayandır (bu gerçek, $0 \le f(x) \; (\forall x \in [a,\infty))$ nedeniyle $a < x_1 < x_2$ için $0 \le F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt \le \int_a^{x_2} f(t)\,dt = F(x_2)$ gözleyerek de bulunabilir) böylelikle $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ hem vardır hem de $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \le \ell$ gerçekleştiği anlaşılır. İkinci iddia birinciden çıkar (nasıl?)

Ödev: $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\ln(x+1)} dx$ özge olmayan tümlevi yakınsak mıdır, ıraksak mıdır? Neden?

$$\left(\text{Yol gös: } \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\ln(x+1)} dx = \int_1^{\pi/2} \frac{\cos x}{\ln(x+1)} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(x+1)} dx \text{ gözleyiniz.} \right)$$

Oran Ölçütü: Her $x \in [a, \infty)$ için $0 \leq f(x)$ ve $0 \leq g(x)$ olsun.

$$\text{Eğer } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0 \text{ ise } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ ile } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ aynı karakterdedir;}$$
$$\text{Eğer } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ ve } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ yakınsak } \textbf{ise } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ yakınsaktır;}$$
$$\text{Eğer } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ ve } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ ıraksak } \textbf{ise } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ ıraksar.}$$

Kanıtlama: Bir önceki Kıyaslama Ölçütü'nden kolayca elde edilir. Örneğin $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$ oluyorsa, $0 < \varepsilon < \ell$ gerçekleyen her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \varepsilon$ $(\forall x \in [M_\varepsilon, \infty))$ olacak biçimde $M_\varepsilon > 0$ vardır ve Kıyaslama Ölçütü kullanılır. Öteki seçenekler için benzer kanıtlama yapılır.

Mutlak Yakınsama: f fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tümlevi de yakınsaktır (ona **mutlak yakınsak tümlev** denilir).

Kanıtlama: $\ell = \int_a^\infty |f(x)|\,dx = \int_a^n |f(x)|\,dx + \int_n^\infty |f(x)|\,dx$ eşitlikleri $a < n$ gerçekleyen her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $\int_n^\infty |f(x)|\,dx$ tümlevlerini kısalık amacıyla T_n ile yazarsak $0 \leq \ell - \int_a^n |f(x)|\,dx = T_n$ bulunarak kolayca $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \ell - \int_a^n |f(x)|\,dx \right| = 0$ ve apaçık biçimde $a < n < M$ gerçekleyen M pozitif sayıları için $-\int_n^M |f(x)|\,dx \leq \int_n^M f(x)\,dx \leq \int_n^M |f(x)|\,dx$ bularak $M \to +\infty$ için limit alıp

$$-T_n \leq \int_n^\infty f(x)\,dx \leq T_n \qquad (\forall n > a)$$

böylelikle ünlü Sıkıştırma Lemması ile $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^\infty f(x)\,dx = 0$ sonucu bulunur. Artık $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tümlevinin yakınsak olduğu kolayca anlaşılır.

p-Ölçütü: f fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve $0 \leq f(x)$ gerçeklesin.

$$\text{Eğer } \lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ ve } p > 1 \text{ ise } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ yakınsaktır}$$
$$\text{Eğer } \lim_{x\to\infty} x^p f(x) \neq 0 \text{ ve } p \leq 1 \text{ ise } \left(\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = +\infty \text{ bile olsa}\right) \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ ıraksaktır.}$$

Kanıtlama: $g(x) = x^{-p}$ alıp,yukarda kullanılan Oran Ölçütünü kullanın!

Örnekler2:

1) $\int_0^\infty \frac{x^2}{2x^4+5}dx$, $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$, $\int_1^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+6}}dx$ tümlevlerinin yakınsaklıklarını inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 . \frac{x^2}{2x^4+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{2x^4+5} = \frac{1}{2}$ olduğundan **p-Ölçütü** kullanılarak birinci tümlev yakınsaktır. Bu sonuç $0 < \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2x^4+5}dx \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (gerçekten **her** $x \in \mathbb{R}$ için $x^4+x^2 \leq 2x^4+5$ gerçeklendiği) gözleyerek de bulunabilirdi. İkinci ve dördüncü tümlev **ıraksak**, üçüncüsü **yakınsaktır**, çünkü

$$\lim_{x\to+\infty} x.\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1 \ , \ \lim_{x\to+\infty} x.\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^{-2}}{\sqrt{1+6x^{-6}}} = 1$$

buna karşılık $\lim\limits_{x\to\infty} x.\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = 1$ ve ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx + \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$$

geçerli olduğundan üçüncü tümlev yakınsar.

2) $\int_0^{\infty} x^n e^{-px^m}dx \ (0<p)$, $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+a}dx \ (0<a)$, $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ tümlevlerinin yakınsaklıklarını inceleyiniz, ilkinde $n,m \in \mathbb{N}$ geçerlidir.

Çözüm: Üçüncüsü ıraksak, ötekiler yakınsaktır. Birincisi $n,m \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun $\int_0^{\infty} x^n e^{-px^m}dx = \int_0^{1} x^n e^{-px^m}dx + \int_1^{\infty} x^n e^{-px^m}dx$ olup, burada $\int_1^{\infty} x^n e^{-px^m}dx$ tümlevi yakınsaktır, $\int_0^{1} x^n e^{-px^m}dx$ ise zaten belirli bir Riemann tümlevi olup bir pozitif gerçel sayıdır, burada şunları gözlemeliyiz:

Her $x \in [1,\infty)$ için $px \leq px^m$ ve $e^{-px^m} \leq e^{-px}$ olduğundan

$$0 < \frac{(px)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(px)^k}{k!} = e^{px}$$

nedeniyle $\frac{(px)^{n+1}}{(n+1)!\,e^{px}} \leq 1$ geçerlidir. O halde $\frac{(n+1)!}{p^{n+1}} = M$ yazarsak $0 \leq x^n e^{-px^m} \leq \frac{M}{x}$ $(\forall x \in [1,\infty))$ eşitsizlikleriyle $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-px^m} = 0$ bulunur, özel olarak (her $n,m \in \mathbb{N}$ için geçerli olan bu sonucu $n+2$ ve n doğal sayı çifti için yazarak) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(x^n e^{-px^m}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^{n+2}e^{-px^m} = 0$ bulunup **p-Ölçütü** gereği olarak $\int_1^{\infty} x^n e^{-px^m}dx$ tümlevinin böylece $\int_0^{\infty} x^n e^{-px^m}dx$ tümlevinin **yakınsak** olduğu anlaşılır. O halde özel olarak $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ yakınsar, böylece $0 \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}dx \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x}dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx < +\infty$ nedeniyle **Kıyaslama Ölçütü**'nün gereği olarak ikinci tümlev yakınsar. Ayrıca $0 < x^{3/2}.\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ nedeniyle $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}.\frac{1-\cos x}{x^2} = 0$ olduğundan **p-Ölçütü** nedeniyle sonuncu tümlev yakınsar. Buna karşılık $\lim\limits_{x\to\infty} x.\frac{\ln(x+1)}{x+a} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+a}.\ln(x+1) = +\infty$ olduğundan, yine **p-Ölçütü**'nün gereği olarak üçüncü tümlev ıraksaktır.

3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ tümlevlerinin yakınsaklıklarını araştırınız.

Çözüm: $0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ $(\forall x \in [0,\infty))$ nedeniyle $0 \leq \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+1}dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}$ bularak

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$ tümlevinin mutlak yakınsak dolasıyla yakınsak olduğu anlaşılır. Öte yandan, her $M > 0$ için

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^M \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(\sin x)'\,dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_0^M + \int_0^M \frac{x\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}dx \\ &= \frac{\sin M}{\sqrt{M^2+1}} + \int_0^M \frac{x\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}dx\end{aligned}$$

ve $M \to +\infty$ için limit alıp $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{\sin M}{\sqrt{M^2+1}} = 0$ gözleyerek (çünkü $0 \leq \left|\frac{\sin M}{\sqrt{M^2+1}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{M^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{M^2}} = \frac{1}{M}$ nedeniyle $\lim\limits_{M\to+\infty}\left|\frac{\sin M}{\sqrt{M^2+1}}\right| = 0$ olmaktadır) sonuçta $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ bulunur ve bu tümlev her $x \in [0,\infty)$ için $0 \leq \left|\frac{x\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}\right| = \frac{x.|\sin x|}{(x^2+1)^{3/2}} \leq \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$ nedeniyle $\displaystyle 0 \leq \int_0^{\infty}\left|\frac{x\sin x}{(x^2+1)^{3/2}}\right|dx \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = 1$ gözlenerek mutlak yakınsaktır dolayısıyla yakınsaktır, burada

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \lim_{M\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M^2+1}}\right) = 1$$

dikkat edilmiştir, $\displaystyle\int_0^M \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ tümlevini hesaplamak için $x^2+1 = u$ dönüşümü yapmak yerinde olur. Buna karşılık üçüncü tümlev ıraksaktır, çünkü

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^M \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(-\cos x)'\,dx = -\frac{M\cos M}{\sqrt{M^2+1}} + \int_0^M \cos x.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'dx \\ &= -\frac{M\cos M}{\sqrt{M^2+1}} + \int_0^M \frac{\cos x}{(x^2+1)^{3/2}}dx\end{aligned}$$

ve sağ yanın $M \to +\infty$ için **limiti tanımsızdır**, çünkü $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{\cos x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \ell \in \mathbb{R}$ limiti vardır, çünkü bu son tümlev mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır, oysa $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{M\cos M}{\sqrt{M^2+1}} = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{M}{\sqrt{M^2+1}}.\cos M$ limiti **tanımsızdır**, çünkü eğer $\gamma_0 = \lim\limits_{M\to+\infty} \frac{M}{\sqrt{M^2+1}}\cos M$ limiti **tanımlı olsaydı** $\cos M = \frac{\sqrt{M^2+1}}{M}\left(\frac{M}{\sqrt{M^2+1}}\cos M\right)$ nedeniyle $\lim\limits_{M\to+\infty}\cos M = \lim\limits_{M\to+\infty}\frac{\sqrt{M^2+1}}{M}.\gamma_0 = \gamma_0$ tanımlı olurdu, oysa iyi bilindiği $\lim\limits_{M\to+\infty}\cos M$ limiti TANIMSIZDIR. O halde $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ limiti tanımsız olduğu için üçüncü tümlev ıraksaktır. Dördüncü tümlevin $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ olduğu Bölüm2, Önerme7'de gösterilmişti. Şimdi farklı bir yöntemle bu tümlevin yakınsadığını gösterelim.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}dx + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right)$$

ve dikkat edilirse $x = u + n\pi$ dönüşümü yaparak $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi} du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u.\cos(n\pi)}{u+n\pi} du$ $\displaystyle = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u.}{u+n\pi} du$ bulup $\displaystyle a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du > 0$ gerçek sayılarını tanımlarsak (dikkat: sinüs fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında negatif olmayan değerler aldığı ve $h_n(u) = \frac{\sin u}{u+n\pi} \geq 0$ $(\forall u \in [0,\pi])$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında **sürekli** olduğundan $\displaystyle\int_0^{\pi} h_n(u)\,du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du$ belirli Riemann tümlevi iyi tanımlıdır ve **pozitifdir**, çünkü h_n fonksiyonu uç noktaların dışında hep pozitif değerler alır), sonuçta bu a_n sayıları sayesinde bu tümlev aşağıdaki seriye eşittir:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

ve bu seri **yakınsaktır**, çünkü her $u \in [0,\pi]$ için $0 < u + n\pi < u + (n+1)\pi$ ve böylece $0 < \frac{1}{u+(n+1)\pi} < \frac{1}{u+n\pi}$ ve $0 \leq \sin u$ nedeniyle $h_{n+1}(u) = \frac{\sin u}{u+(n+1)\pi} \leq \frac{\sin u}{u+n\pi} = h_n(u)$ böylelikle $\displaystyle 0 < a_{n+1} = \int_0^{\pi} h_{n+1}(u)\,du \leq \int_0^{\pi} h_n(u)\,du = a_n$ ve üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi} du = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{2}{n\pi}$ olduğundan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, tekdüze artmayan ve sıfıra yakınsayan (dikkat: $0 \leq a_n \leq \frac{2}{n\pi}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ eşitsizlikleri nedeniyle $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ geçerlidir) bir dizi olduğundan Leibniz Teoremi nedeniyle $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ almaşık serisi **yakınsaktır**. Buna karşılık, benzer yöntemle

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \frac{|\sin u.\cos(n\pi)|}{u+n\pi} du \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du \right) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\end{aligned}$$

bulunur, çünkü $|\cos nx| = |(-1)^n| = 1$ ve $0 \leq \sin u$ $(\forall u \in [0,\pi])$ nedeniyle $|\sin u| = \sin u$ ve $0 < u + n\pi < \pi + n\pi = \pi(n+1)$ $(\forall u \in [0,\pi])$ nedeniyle $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(n+1)\pi} du = \frac{2}{(n+1)\pi}$ geçerlidir.

Demek ki $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ genelleştirilmiş tümlevi yakınsamakta, buna karşılık $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ tümlevi ise ıraksamaktadır, kısacası $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ tümlevi **koşullu yakınsaktır.**

4) Aşağıdaki tümlevleri hesaplayınız:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos bx dx \ (0 < \alpha)\ , \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ax + b^2} \ (|a| < b)\ , \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \ (n \in \mathbb{N})$$

Çözüm: Kısmi tümlevleme kullanarak

$$\int e^{-\alpha x} \cos bx dx = \frac{e^{-\alpha x}(b \sin bx + \alpha \cos bx)}{\alpha^2 + b^2}$$

olduğundan kolaylıkla

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos bx dx &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-\alpha x}\cos bx dx = \lim_{M\to\infty}\frac{(b\sin bM+\alpha\cos bM)\,e^{-\alpha M}+\alpha}{\alpha^2+b^2}\\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}\end{aligned}$$

bulunur, çünkü $0<\alpha$ ne olursa olsun hem $\lim\limits_{M\to\infty}\sin bMe^{-\alpha M} = \lim\limits_{M\to\infty}\frac{\sin bM}{e^{\alpha M}} = 0$ hem de $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{\cos bM}{e^{\alpha M}} = 0$ geçerlidir. Öte yandan, $|a|<b$ koşulu geçerliyken

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

gerçeklendiğini görmek için, öncelikle aşağıdaki temel bilgiyi

$$\int\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} = \int\frac{dx}{(x+a)^2+(b-a)^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}.\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$$

anımsayıp, kolaylık amacıyla $\alpha=\sqrt{b^2-a^2}>0$ sabitini tanımlayıp, kolayca

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M\frac{dx}{(x+a)^2+\alpha^2} = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{M+a}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right) \qquad \textbf{ve}\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} &= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{0}\frac{dx}{(x+a)^2+\alpha^2} = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{\alpha-M}{\alpha}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)+\frac{\pi}{2\alpha}\end{aligned}$$

bulup, toplam alınarak istenen sonuca ulaşılır.

Dikkat: $b=|a|$ olduğunda $b^2=|a|^2=a^2$ nedeniyle $b^2-a^2=0$ bulunarak $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+a)^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+a)^2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+a)^2}$ tümlevlerinden birisi üçüncü türden genelleştirilmiş tümlev olur, örneğin $a=-1$ ise $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$ üçüncü türdendir, çünkü $x=1\in(0,\infty)$ noktasında $h(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ fonksiyonunun ikinci türden süreksizliği vardır, kısacası $h(1+)=+\infty=h(1-)$ gerçekleşir ve $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}+\int_2^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$ olup $\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ tümlevi **ıraksaktır**. Öte yandan

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int_0^M x'.\frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{M}{(M^2+1)^n} - \int_0^M x.\left(\frac{1}{(x^2+1)^n}\right)' dx \\ &= \frac{M}{(M^2+1)^n} + 2n\int_0^M \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \frac{M}{(M^2+1)^n} + 2n\int_0^M \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{M}{(M^2+1)^n} + 2n\int_0^M \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int_0^M \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

ve sonuçta $M \to +\infty$ için limit alarak

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = (2n).\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} - (2n)\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \qquad \text{ve böylece}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

ve indirgemeye devam edilirse, sonuçta $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ unutmadan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{(2n)(2n-2)...2}.\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{\pi}{2}$$

sonucu ve böylelikle $x = \tan u$ dönüşümü yapılarak aşağıdaki bulunur:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n}\, du = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{\pi}{2}$$

Şimdi de ikinci ve üçüncü türden genelleştirilmiş tümlevleri tanıyalım:

Tanım 2: Eğer f fonksiyonu $(a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a+) = \mp\infty$ **ise**, kısacası f fonksiyonunun $x = a$ sol uç noktasında ikinci türden süreksizliği **varsa,** bu durumda $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ikinci türden genelleştirilmiş** ya da **özge olmayan tümlevi**, ancak ve yalnız, aşağıdaki

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \ell \in \mathbb{R}$$

limitinin bir gerçel sayı olan koşulu gerçeklenirse **yakınsaktır** denilir, sözü edilen limit tanımsız ise ya da $\mp\infty$ ise, bu durumda $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ genelleştirilmiş tümlevine **ıraksaktır** denilir. Tümüyle benzer tanımlanan f fonksiyonu $[a,b)$ aralığında sürekli ve $f(b-) = \mp\infty$ ise $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ limiti için yapılır.

Örneğin, $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, gerek $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ gerekse $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ tümlevleri ikinci türden genelleştirilmiş tümlevlerdir, çünkü sözgelimi $h(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ $(\forall x \in (a,b])$ fonksiyonu süreklidir ve $h(a+) =$

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in(a,b]}} \frac{1}{(x-a)^p} = +\infty$ geçerlidir, ayrıca $\int (x-a)^{-p}\,dx = \dfrac{(x-a)^{1-p}}{1-p}$ bilgisi kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b (x-a)^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}}{1-p} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1}-(b-a)^{1-p}}{p-1} = \begin{cases}\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} & ;p<1 \\ +\infty & ;p>1\end{cases}\end{aligned}$$

bulunur, çünkü $p>1$ yani $p-1>0$ iken $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} = +\infty$ geçerlidir, ayrıca $p=1$ iken $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln(x-a)$ bilgisi kullanılırsa

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln(b-a)+\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = +\infty$$

bulunur, çünkü $\varepsilon\to 0^+$ için hem $\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty$ hem de $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\to+\infty$ olmaktadır. Benzer işlemleri $\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ tümlevi için siz yapınız! Öte yandan eğer f fonksiyonunun bir $x_0\in(a,b)$ noktasında ikinci türden süreksizliği **varsa**, kısacası $f(x_0+)=\mp\infty$ ya da $f(x_0-)=\mp\infty$ oluyorsa, bu durumda aşağıdaki tanım geçerlidir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

ve ancak ve yalnız sağ yandaki her iki limit de birer gerçel sayı **ise** $\int_a^b f(x)\,dx$ ikinci türden genelleştirilmiş tümlevine **yakınsaktır** aksi halde **ıraksaktır** denilir. Örneğin $\int_0^2 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$ ıraksaktır, çünkü aşağıdakiler geçerlidir:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{1}{\delta}-1\right) = +\infty$$

İkinci türden genelleştirilmiş tümlevler için, birinci türden tümlevlerdeki Kıyaslama ve Oran Ölçütlerinin benzerleri geçerlidir. Dolayısıyla aşağıdaki **p-Ölçütü** kolayca elde edilir:

$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = \ell\in\mathbb{R}$ ve $0<p<1$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ **yakınsak**

$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = \ell\neq 0$ ve $p\geq 1$ ise $(\ell=+\infty$ böyle olsa$)$ $\int_a^b f(x)\,dx$ **ıraksak**

Bu sonuçlar elde edilirken $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^p}$ ikinci türden genelleştirilmiş tümlevini yakınsak yapan $p\in\mathbb{R}^+$ değerleri anımsanmıştır. Benzer şeyler $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)$ limit değerlerini irdeleyerek elde edilir. Ayrıca ikinci türden genelleştirilmiş tümlevler için de Mutlak Yakınsaklık Teorem'de geçerlidir, kısacası

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ yakınsak ise } \int_a^b f(x)\,dx \text{ yakınsaktır}$$

çünkü $0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$ bilgisi, Kıyaslama Ölçütü kullanılırsa $\int_a^b |f(x)|\,dx$ yakınsak olduğundan $\int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,dx$ yakınsaktır, dolayısıyla $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,dx - \int_a^b |f(x)|\,dx$ tümlevi yakınsaktır.

Örnekler 3:

1) Aşağıdaki tümlevlerin yakınsaklıklarını inceleyiniz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}\,,\ \int_0^1 \frac{dx}{x^p e^x}\,,\ \int_0^1 \frac{\ln x}{e^x}dx\,,\ \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(x+1)}}dx\,,\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

Çözüm: Birincisi $\int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^p}$ olup, bu $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ biçimindedir yukarda incelenmiş olup, ancak ve yalnız $p < 1$ için yakınsaktır. İkincisi için $f(x) = \frac{1}{x^p e^x}$ alınırsa $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-0)^p f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$ olduğundan, ikinci türden tümlevler için **p-Ölçütü** bilgisi kullanılırsa, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p e^x}$ tümlevinin ancak ve yalnız $p < 1$ için yakınsadığı anlaşılır. Üçüncüsü için

$$0 \le \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x} = \frac{2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{e^x} < \frac{2\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{e^x} < \frac{2}{\sqrt{x}e^x} \text{ ve } 0 \le \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}dx \le 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}e^x} < +\infty$$

kısacası Kıyaslama Ölçütü ile $\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{e^x}dx =$**yakınsak** olur, dolayısıyla üçüncüsü yakınsaktır. Öte yandan dördüncü tümlev ıraksaktır, çünkü $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$ gerçeğini L'Hospital kuralı uygulayarak ya da $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ sıkıştırmasıyla $\frac{1}{1+x} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 1$ yani $1 \le \frac{x}{\ln(1+x)} \le 1+x$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ gözleyerek elde edebileceğimiz için, $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}\ln(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}\sqrt{\frac{x}{\ln(x+1)}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}\right)\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(x+1)}} = 1$ bulup p-Ölçütü kullanılarak $\int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}\ln(x+1)}$ tümlevinin **ıraksadığı** anlaşılır. Öte yandan $1-x \le \ln\left(1+\left(\frac{1-x}{x}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ böylelikle $0 \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx < +\infty$ nedeniyle son tümlev yakınsaktır, çünkü $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^p.f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < 1$ **ise** $\int_a^b f(x)\,dx$ tümlevinin yakınsaklığı bilgisi kullanılır.

2) Aşağıdaki tümlevlerin yakınsaklıklığını inceleyiniz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\,,\ \int_0^2 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,,\ \int_0^3 \frac{x^2dx}{(3-x)^2}\,,\ \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}dx\,,\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x.e^x}dx$$

Çözüm: İlk üç tümlevde, tümlevi alınan fonksiyonların sağ uç noktalarda ikinci türden süreksizlikleri vardır. Dikkat edilirse $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{1/2}.\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)^{1/3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)^{1/3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{(2-x)(x^2+2x+4)}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{12}}$ olduğundan p-Ölçütü nedeniyle ilk iki tümlev yakınsaktır. Son üç tümlev ise ıraksaktır, sözgelimi

$$\lim_{x\to 0^+} x.\left(\frac{\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x} = +\infty \ , \ \lim_{x\to 0^+} x.\left(\frac{\cos x}{x.e^x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{e^x} = 1$$

olduğundan, ikinci türden genelleştirilmiş tümlevler için **p-Ölçütü** kullanılır.

3) Aşağıdaki tümlevlerin yakınsadığını araştırınız:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} \ , \ \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}dx}{x} \ , \ \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx \ , \ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2}{1-x^2}}dx \ \ (|\alpha|<1)$$

Çözüm: Her $a>0$ için $a^x = e^{x\ln a}$ olduğundan $x^x = e^{x\ln x} = e^{-x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-2x\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ ve $0 \le \frac{1}{x^x} = e^{2x\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} \le e^{2\sqrt{x}}$ böylelikle $0 \le \int_0^1 \frac{dx}{x^x} \le \int_0^1 e^{2\sqrt{x}}dx < +\infty$ bulunur (neden?), kısacası birinci tümlev yakınsaktır. Öte yandan

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan x}}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{e^{\arctan x}}{x}dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^1 \frac{e^{\arctan x}}{x}dx = +\infty$$

gözlemek güç değildir, çünkü sözgelimi

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 \frac{e^{\arctan x}}{x}dx &= \int_\delta^1 (\ln x)' e^{\arctan x}dx = \ln x.e^{\arctan x}\Big|_\delta^1 - \int_\delta^1 \frac{\ln x}{1+x^2}e^{\arctan x}dx \\ &= \ln\left(\frac{1}{\delta}\right).e^{\arctan\delta} + \int_\delta^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}e^{\arctan x}dx \quad \text{böylece}\end{aligned}$$

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{e^{\arctan x}}{x}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{\delta}\right).e^{\arctan\delta} + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}e^{\arctan x}dx = +\infty$$

bulunur, çünkü $0 \le \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}e^{\arctan x}dx \le 2\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}dx < +\infty$ fakat $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{\delta}\right) = +\infty$ olur(neden?) Benzer biçimde şu geçerlidir.

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{e^{\arctan x}}{x}dx = \int_\varepsilon^1 \frac{dy}{y.e^{\arctan x}} \underset{(\varepsilon\to 0^+)}{\longrightarrow} +\infty$$

Öte yandan $0 < \sin x \le 1$ $\left(\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]\right)$ ve $|\ln\sin x| = -\ln\sin x = \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right) \le \frac{2}{\sqrt{\sin x}}$ ve $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\ln\sin x|\,dx \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}} < +\infty$ olur, çünkü $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}.\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right) = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}} = 1$ olduğundan, p-Ölçütü nedeniyle $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ ikinci türden genelleştirilmiş tümlevi yakınsaktır, tüm bunlardan ötürü

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ tümlevi mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır. Sonuncu tümlevse $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{1/2}\sqrt{\frac{1-\alpha^2 x^2}{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{1-\alpha^2 x^2}{1+x}} > 0$ gözleyerek p-Ölçütü nedeniyle yakınsaktır.

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ ve $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$, gösteriniz.

Çözüm: $T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ tümlevi için $x = \frac{\pi}{2} - y$ dönüşümü yapılırsa $T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$ ve $2T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2.\sin x.\cos x}{2}\right)dx$ kısacası $2T = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$ olur. Oysa $2x = u$ dönümüyle $2T = T - \frac{\pi}{2}\ln 2$ bularak istenen çıkar, çünkü $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\,dv + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin v)\,dv = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T$ geçerlidir. İkinci tümlev için, biraz önce bulunan $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = 2T = -\pi\ln 2$ sonucu kullanılıp üstelik $x = \pi - y$ dönüşümü yapılırsa, kolayca

$$\begin{aligned} T^* &= \int_0^{\pi} x.\ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} (\pi - y).\ln(\sin y)\,dy = \int_0^{\pi} (\pi - x).\ln(\sin x)\,dx \\ &= \pi.\int_0^{\pi} x.\ln(\sin x)\,dx - T^* = -\pi^2.\ln 2 - T^* \text{ yani } 2T^* = -\pi^2 \ln 2 \end{aligned}$$

gözleyerek kolayca $T^* = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$ istenen sonucu bulunur.

5) $\displaystyle\int_0^1 x^p e^{-x} dx$ tümlevinin, ancak ve yalnız $p > -1$ için yakınsadığını gösterin.

Çözüm: Zaten $p \geq 0$ için $f(x) = x^p.e^{-x} = \frac{x^p}{e^x}$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında sürekli, böylelikle $\displaystyle\int_0^1 x^p e^{-x} dx$ tümlevinin belirli Riemann tümlevi olarak pozitif bir gerçel sayı olacağı açıktır. $p < 0$ için $f(x) = x^p e^{-x} = \frac{1}{x^{|p|}.e^x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ikinci türden süreksizliği vardır ve $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-p}(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{-p}x^p e^{-x} = e^0 = 1$ olduğundan, ikinci türden özge olmayan tümlevler için **p-Ölçütü** kullanırsa, ancak ve yalnız $-p < 1$ yani $p > -1$ için $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^p e^{-x} dx$ tümlevinin yakınsak olduğu anlaşılır. Bu önemli bilgi, aşağıda **Gama Fonksiyonu**'nda kullanılacaktır.

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ve $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ tümlevleri ikinci türden **değildir**, gösterin.

Çözüm: Her ikisinde, tümlevi alınan fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci türden değil **birinci türden süreksizliği** vardır, neden?

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ tümlevi, ancak ve yalnız $p < 2$ için yakınsar, gösterin.

Çözüm:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$$
$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}dx \leq 2.\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 4$$

böylelikle $p \leq 1$ olduğunda her $x \in [\varepsilon, 1]$ için $\varepsilon \leq x \leq 1$ ve $p \leq 1$ nedeniyle $\varepsilon \leq x \leq x^p$ ve $0 < \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{x}$ olduğundan, $p \leq 1$ için

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx \leq 4$$

bulunur. Eğer $1 < p < 2$ ise $p = 1+\varepsilon_p$ ve $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{1+\varepsilon_p}}dx < +\infty$ bulunur, çünkü $\varepsilon_p = p-1 < 1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\varepsilon_p}\frac{\ln(1+x)}{x^{1+\varepsilon_p}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ nedeniyle **p-Ölçütü**'nün gereği olarak $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{1+\varepsilon_p}}dx$ tümlevi yakınsar. Öte yandan $1 \leq q$ ise $\lim\limits_{x\to 0^+} x^q.\frac{1}{(x+1)x^q} = 1$ nedeniyle $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)x^q} = +\infty$ ve böylelikle $2 \leq p$ olduğunda $p = 1+q$ $(q \geq 1)$ yazılışı geçerli olup

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{1+q}}dx \geq \int_\varepsilon^1 \frac{x}{(1+x).x^{1+q}}dx = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(x+1)x^q}$$

ve sonuçta $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(x+1)x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)x^q} = +\infty$ bularak $p \geq 2$ için $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ tümlevinin ıraksadığı anlaşılır.

8) $B(p,q)$ tümlevini tanımlayıp yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx$$

Eğer $p \geq 1$ ve $q \geq 1$ ise $h(x) = x^{p-1}.(1-x)^{q-1}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir, sonuçta $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx$ belirli Riemann tümlevidir ve pozitif bir gerçel sayıdır. Dikkat edilirse

$$B(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

olup $p \leq 0$ ise birinci tümlev, $q \leq 0$ ise ikinci tümlev ıraksaktır, gerçekten $p \leq 0$ ise $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$= \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{|p|+1}} dx = +\infty$ olur, çünkü $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{|p|+1}.\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{|p|+1}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)^{q-1} = 1$ ve $|p|+1 \geq 0$ gözleyip, ikinci türden özge olmayan tümlevler için p-Ölçütü kullanılır. Tümüyle benzer biçimde $q \leq 0$ için $\displaystyle\int_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = +\infty$ bulunur, çünkü bu kez $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{|q|+1}.\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{|q|+1}} = 1$ olmaktadır. Demek ki beta fonksiyonu, ancak ve yalnız, hem $p > 0$ hem de $q > 0$ olduğunda yakınsaktır, yani bir gerçel sayıdır; $p > 0$ ve $q \leq 0$ için ya da $p \leq 0$ ve $q > 0$ için ya da $p \leq 0$ ve $q \leq 0$ için $B(p,q) = +\infty$ geçerlidir.

9) $p > 0$ ve $q > 0$ ne olursa olsun, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$B(p,q) = B(q,p) = 2.\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x.\cos^{2q-1} x dx.$$

Çözüm: Kolaylıkla, $x = 1-y$ dönüşümü yapılırsa, $p > 0$ ve $q > 0$ olduğunda

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 (1-y)^{p-1}.y^{q-1}dy = \int_0^1 y^{q-1}.(1-y)^{p-1}\,dy = B(q,p)$$

Buna karşılık $x = \sin u$ dönüşümü yapılırsa $dx = 2\sin u.\cos u du$ ve aşağıdaki bulunur:

$$B(p,q) = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 u\right)^{p-1}.\left(\cos^2 u\right)^{q-1}(2\sin u\cos u)\,du = 2\int_0^{\pi/2}(\sin u)^{2p-1}.(\cos u)^{2q-1}\,du$$
$$= 2\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2p-1}.(\cos x)^{2q-1}\,dx\ .$$

10) Her $n \in \mathbb{N}$ için $B(n,1) = B(1,n) = \frac{1}{n}$ gösteriniz.

Çözüm:

$$B(n,1) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x.\cos x dx = \frac{1}{n}.\int_0^{\pi/2} 2n.\sin^{2n-1}.\cos x dx$$
$$= \frac{1}{n}.\int_0^{\pi/2}\left(\sin^{2n} x\right)' dx = \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}.$$

11) $n \in \mathbb{N}$ ve $p > -1$ ise $\displaystyle\int_0^1 x^p.(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n.n!}{(p+1)^{n+1}}$ gösteriniz.

Çözüm: $x = e^{-y}$ dönüşümü yapılırsa, $1 = e^{-y}$ için $y = 0$ olmak zorunda ve

$$\int_0^1 x^p.(\ln x)^n\,dx = \int_0^\infty y^n.e^{-(p+1)y}dy$$

bulunur, o halde $(p+1)\,y = u$ dönüşümü yapılarak, son tümlev $p+1 > 0$ nedeniyle

$$\int_0^\infty y^n.e^{-(p+1)y}dy = \int_0^\infty \frac{u^n}{(p+1)^n}.e^{-u}\frac{du}{p+1} = \frac{1}{(p+1)^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}du = \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}$$

bulunarak istenen elde edilir, burada $\int_0^\infty u^n.e^{-u}du = n!$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ sonucu

$$\int_0^M u^n.e^{-u}du = -\int_0^M u^n.\left(e^{-u}\right)' du = -\frac{M^n}{e^M} + n.\int_0^M u^{n-1}.e^{-u}du$$

için $M \to \infty$ alıp $\int_0^\infty u^n.e^{-u}du = n.\int_0^\infty u^{n-1}.e^{-u}du = n\,(n-1)\,.\int_0^\infty u^{n-2}.e^{-u}du = ... = n!$ bulunur.

Tanım 3: (a,∞) aralığında sürekli olup $x = a$ sol uç noktasında $f\,(a+) = \mp\infty$ gerçekleyen, kısacası $x = a$ sol uç noktasında ikinci türden süreksizliği olan f fonksiyonu için $\int_a^\infty f\,(x)\,dx$ tümlevine **üçüncü türden genelleştirilmiş**(ya da **özge olmayan) Riemann tümlevi** denilir.

Örneğin

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\ ,\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx\ ,\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\ ,\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

tümlevlerinin herbirisi üçüncü türdendir. Dikkat edilirse

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = +\infty + 1 = +\infty$$

olur, çünkü $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{M\to+\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) = 1$, buna karşılık $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = +\infty$ geçerlidir. İkincisi ise $\int_0^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{e^x}dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx = \ell_1 + \ell_2\,(\in\mathbb{R})$ nedeniyle yakınsaktır, çünkü ilk tümlev Örnekler3)'de 1) numaralı örnekte gözlenmiştir ve ikincisi ise her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{x^3}{3!} \le e^x$ ve her $x \in [1,\infty)$ için $0 \le \frac{\ln x}{e^x} < \frac{\ln(1+x)}{e^x} \le \frac{x}{e^x} \le \frac{6}{x^2}$ nedeniyle $0 \le \int_1^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx \le 6.\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 6$ gözleyerek yakınsaktır. Ötekileri siz inceleyeniz. Şimdi çeşitli örnekleri görelim.

Örnekler 4:

1) $\int_0^\infty x^{-p}dx$ tümlevinin **her** $p \in \mathbb{R}$ için ıraksadığını gösteriniz.

Çözüm: $\int_0^\infty x^{-p}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = +\infty$ olur, çünkü birincisi, ancak ve yalnız $p < 1$ için, buna karşılık ikincisi $p > 1$ için yakınsaktır, $p = 1$ için ise her ikisi birden $+\infty$ olur (neden?), kısacası her $p \in \mathbb{R}$ için bu tümlevlerden en az birisi $+\infty$ ötekisi ise ya pozitif bir gerçel sayı ya da $+\infty$ olmaktadır.

2) Gama fonksiyonunu tanımlayıp yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Aşağıdaki tümlev göz önüne alınsın:

$$\Gamma\,(p) = \int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x}dx$$

bu tümlev zaten $p \ge 1$ için birinci türdendir ve yakınsaktır. Buna karşılık $p \le 0$ ise bu tümlev ıraksar, çünkü bu durumda $-p = |p|$ olduğundan

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{|p|+1}.e^x} + \int_1^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = +\infty + \ell = +\infty$$

geçerlidir, çünkü $0 < q$ ise, $q \in \mathbb{R}$ **ne olursa olsun**, birinci türden genelleştirilmiş $\displaystyle\int_a^\infty x^q e^{-x}dx$ tümlevinin **yakınsak** olduğu Örnekler1)'deki 3) numaralı örnekte gözlenmiştir, üstelik $|p|+1 \geq 1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{|p|+1}.\left(\frac{1}{x^{|p|+1}.e^x}\right) = 1$ nedeniyle $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{|p|+1}.e^x} = +\infty$ geçerli olduğu daha önce gözlenmişti. Oysa $p > 0$ ise $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}.e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = \ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$ geçerlidir, burada ikincinin yakınsama gerekçesi yukarda belirtilmişti, birincisi için $0 < p$ ve sonuçta $1 - p < 1$ gözleyip $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-p}\left(x^{p-1}.e^{-x}\right) = 1$ dikkat etmek yeterlidir, yine p-Ölçütü kullanılır. İşte gama fonksiyonu bu gözlemlerin ardından

$$\forall p \in (0,\infty) \text{ için } \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x}dx$$

biçiminde tanımlanır. $p \leq 0$ için bu tümlevin ıraksadığı unutulmamalıdır. Gerçel değerli fonksiyonların değişkenini genellikle x işareti ile yazmak gelenek olmuştur, bu nedenle bu fonksiyon

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}.e^{-t}dt \quad (\forall x > 0)$$

biçiminde de yazılır.

3) Gama fonksiyonunun indirgeme bağıntısını elde ediniz.

Çözüm: Söylenen, her $p \in \mathbb{R}^+$ için, ünlü $\Gamma(p+1) = p.\Gamma(p)$ bağıntısının geçerli olduğudur. Gerçekten $p > 0$ ise

$$\int_0^M x^p.e^{-x}dx = \int_0^M x^p.\left(-e^{-x}\right)'dx = -\frac{M^p}{e^M} + p.\int_0^M x^{p-1}.e^{-x}dx \qquad (\forall M > 0)$$

olduğundan $M \to +\infty$ için limit alıp $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{M^p}{e^M} = 0$ bilgisi kullanılırsa kolayca istenen bulunur:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p.e^{-x}dx = p.\int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x}dx = p.\Gamma(p)$$

4) Gösterin: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ ve ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olur.

Çözüm: Birincisi, gama fonksiyonunun indirgeme bağıntısı ve

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty xe^{-x}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M x\left(-e^{-x}\right)'dx=\lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{M}{e^M}+\int_0^M e^{-x}dx\right)$$
$$=\lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{M}{e^M}+1-\frac{1}{e^M}\right)=1$$

sonucundan $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n!\Gamma(1)=n!$ bularak elde edilir. Öte yandan $x=u^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}.e^{-x}dx=2.\int_0^\infty e^{-u^2}du=2.\int_0^\infty e^{-x^2}dx=2.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

bulunur, burada $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ sonucu için Analiz IV Ders notlarına bakılmalıdır.

5) p,q,a pozitif sabitleri ne olursa olsun, aşağıdaki geçerlidir.

$$\int_0^\infty x^p.e^{-ax^q}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)}{q.\sqrt[q]{a^{p+1}}}.$$

Çözüm: $ax^q=y$ yani $x=\sqrt[q]{\frac{y}{a}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a}}.y^{1/q}$ değişken dönüşümü yapılırsa $dx=\frac{1}{q.\sqrt[q]{a}}.y^{\frac{1}{q}-1}dy$ nedeniyle aşağıdakiler elde edilir:

$$\int_0^\infty x^p.e^{-ax^q}dx=\int_0^\infty\left(\frac{y}{a}\right)^{p/q}.e^{-y}\frac{1}{q.\sqrt[q]{a}}.y^{\frac{1}{q}}\frac{dy}{y}$$
$$=\frac{1}{q.\sqrt[q]{a^{p+1}}}\int_0^\infty y^{\left(\frac{p+1}{q}\right)-1}.e^{-y}dy\overset{*}{=}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)}{q.\sqrt[q]{a^{p+1}}}$$

Özel olarak aşağıdaki kullanışlı sonuç elde edilir:

$$\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}dx=\frac{\Gamma(p)}{2}\qquad(\forall p>0)$$

çünkü $a=1,q=2$ ve p yerine $2p-1$ alarak $(*)$ eşitliğini kullanmak yeterli olur. O halde $p>0$ ve $q>0$ ne olursa olsun şu bulunur.

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4.\left(\int_0^\infty x^{2p-1}.e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2q-1}.e^{-y^2}dy\right)$$
$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}.e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy.$$

6) Aşağıdaki olağanüstü eşitliği elde ediniz:

$$\text{Her } p > 0, q > 0 \text{ için } B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Çözüm: Bir önceki örnekte bulunan son eşitlikte bulunan iki katlı tümlevi çözmek için $x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ kutupsal koordinat dönüşümü yapılırsa bu dönüşümün Jakobyeni $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)} = \rho$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Gamma(p).\Gamma(q) &= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(p+q)-1}.e^{-\rho^2}\cos^{2p-1}\phi\sin^{2q-1}\phi\, d\rho d\phi \\
&= 4\left(\int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(p+q)-1}.e^{-\rho^2}d\rho\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\cos^{2p-1}\phi.\sin^{2q-1}\phi d\phi\right) \\
&= 2\left(\int_0^{\infty} x^{2(p+q)-1}.e^{-x^2}dx\right).2\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}y.\sin^{2q-1}ydy\right) \\
&= \Gamma(p+q).B(p,q)
\end{aligned}$$

bulunur, çünkü **her** $p > 0$ için $\Gamma(p) = 2.\int_0^{\infty} x^{2p-1}.e^{-x^2}dx$ ve $B(p,q) = 2.\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}y.\sin^{2q-1}ydy$ olduğu yukarda gösterilmiştir.

7) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$, $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x.\cos^5 xdx$ hesaplayınız.

Çözüm: Birincisinde $x = 2y$ dönüşümü yapılırsa, $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx$ unutmadan

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = 4\sqrt{2}.\int_0^1 y^2(1-y)^{-1/2}dy = 4\sqrt{2}.B\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

bulunur, çünkü indirgeme bağıntısı kullanılırsa aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{15}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&B\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{15}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

İkincisinde $x^2 = a^2y$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{1/2}dx = \frac{a^6}{2}.B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi a^6}{32}$$

bulunur, $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3!}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{16}.$

Sonuncusu için

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x.\cos^{2q-1} x dx = \frac{B(p,q)}{2} = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \qquad (p>0, q>0)$$

eşitliği nedeniyle $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x.\cos^5 x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},3\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma(3)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{8}{315}$ olur.

8) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{\pi}{2}$ $\qquad (\forall n \in \mathbb{N})$ gösterin.

Çözüm: $p = n + \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ alınırsa $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}$ eşitliğinden yararlanarak elde edilir, indirgeme bağıntısı kullanılırsa

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = ... =$$
$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ve $\Gamma(n+1) = n!$ bilgisi kullanılarak bulunur. Bu şıkkın bir başka çözümünün Örnekler2 içinde 4) numaralı örnekte verildiğine dikkat ediniz.

9) Her $0 < p < 1$ için $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ gösteriniz.

Bu bağıntının kanıtlanması için ciddi Analiz kitaplarına bakılmalıdır. Dikkat: $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$ elde ediniz.

10) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(x+1)}}dx$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}$, $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sinh(ax)}dx$ tümlevlerinin yakınsaklıklarını inceleyiniz, sonuncu tümlevde $0 < a$ geçerlidir.

Çözüm: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(x+1)}}dx = \int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(x+1)}}dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(x+1)}}dx$ olup, sağ yandaki tümlevlerin her ikisinin de yakınsadığı daha önce gösterilmişti. Benzer biçimde

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}} = \int_0^{1} \frac{dx}{x^{2/3}(x^2+1)^{1/3}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}} = \ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$$

geçerlidir, örneğin birinci tümlev için $\lim_{x\to 0^+} x^{2/3}\frac{1}{x^{2/3}(x^2+1)^{1/3}} = 1$ gözleyerek, birinci tümlevin yakınsadığı anlaşılır. Sonuncu tümlevin $0 < a \leq 2$ için ıraksak, $2 < a$ için yakınsak olduğunu okuyucu gösterebilmelidir, burada bilindiği gibi $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ tanımı geçerlidir.

Bölüm 4

Dik Polinom Serileri

Bu bölümde çok ünlü dik polinom dizileri aracılığıyla elde edilen açılımlardan bahsedeceğiz. Bu tür polinomların en ünlüleri Legendre ve Hermite polinomlarıdır. Bölüm boyunca , dereceleri $\leq n$ olan tüm gerçel katsayılı polinomların $[a,b]$ aralığına kısıtlanışlar kümesi $Pol_n[a,b]$ ile yazılacaktır. Apaçıktır ki $p_1, p_2 \in Pol_n[a,b]$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri ne olursa olsun $c_1p_1 + c_2p_2$ gerçel katsayılı bir polinom olup , onun $[a,b]$ aralığına kısıtlanışı $\in Pol_n[a,b]$ gerçekler . Bu nedenle $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olan $Pol_n[a,b]$ üzerinde , eskiden olduğu gibi

$$\langle p,q\rangle = \int_a^b p(x).q(x)\,dx \qquad (p,q \in Pol_n[a,b])$$

iç çarpımı tanımlanır ve eskiden olduğu gibi , ancak ve yalnız $\langle p,q\rangle = 0$ gerçeklendiğinde bunlara **dik polinomlar** denir.

Önerme 1 : Eğer $\{p_0, p_{1,..}, p_n\}$ kümesi $Pol_n[a,b]$ vektör uzayında bir dik kümeyse , lineer bağımsızdır ve herbir $q \in Pol_n[a,b]$ için

$$q = \alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 + .. + \alpha_np_n \qquad \text{yani } q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_kp_k(x) \quad (\forall x \in [a,b])$$

olacak biçimde **tek türlü belirlenebilen** $\alpha_k \in \mathbb{R}$ katsayıları vardır.

Kanıtlama: Sözü edilen katsayılar , her $k = 0, 1, .., n$ için

$$\alpha_k = \frac{\langle q, p_k\rangle}{\|p_k\|_t^2} \qquad \in \mathbb{R}$$

gerçel sayılarıdır, çünkü sözgelimi her $k \neq 1$ için $0 = \langle p_k, p_1\rangle$ olduğundan , $q = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_kp_k$ ise $\langle q, p_1\rangle = \left\langle \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_kp_k, p_1 \right\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \langle p_k, p_1\rangle = \alpha_1 \langle p_1, p_1\rangle + 0 = \alpha_1. \|p_1\|_t^2$ ve böylece $\alpha_1 = \frac{\langle q,p_1\rangle}{\|p_1\|_t^2}$ bulunur , öteki α_k katsayıları benzer biçimde bulunur. Artık $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ dik kümesinin lineer bağımsız olduğu kolayca gözlenir (nasıl?).

Önerme 2 : Her dik polinom dizisi, $Pol_n[a,b]$ vektör uzayında lineer bağımsız bir doğuray takıma sahiptir.

Kanıtlama : $\{p_0, p_1, p_2, ...\}$ sözü edilen dik polinomlar kümesi, üstelik $derp_n = n \; (\forall n \geq 0)$ gerçeklesin. $q \in Pol_n[a,b]$ için , var olan uygun $\alpha_k \in \mathbb{R}$ katsayıları aracılığıyla $q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_kp_k$ yani $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_kp_k(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ olarak biçimde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ katsayılarının , tek türlü biçimde belirlenip $\alpha_k \frac{\langle q,p_k\rangle}{\|p_k\|_t^2} =$ olduğu Önerme

1'deki gibi kanıtlanır. Eğer $0 = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k p_k$ (yani $0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(x)$ $(\forall x \in [a,b])$) ise $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$ olduğu benzer biçimde gösterilir, (nasıl?) , bu nedenle $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ lineer bağımsızdır.

Tanım: P_n ile yazılan $n-$inci dereceden **Legendre polinomları** $P_0(x) = 1$ ve $P_n(x) = \frac{1}{2^n,n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ biçiminde tanımlanır , böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{1}{2^1.1!} \frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = x \ , \\
P_2(x) &= \frac{1}{2^2.2!} \frac{d^2}{dx^2}\left(\left(x^2-1\right)^2\right) = \frac{1}{8}\left(x^4-2x^2+1\right)'' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ve benzer biçimde şunlar bulunur :

$$
P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad , \quad P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \quad .
$$

Önerme3: P_{2n} polinomu $derP_{2n} = 2n$ gerçekleyen tek bir fonksiyondur.

Kanıtlama: Kısalık amacıyla $w(x) = \left(x^2-1\right)^{2n}$ yazılırsa , $n-$inci türev için ünlü $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ eşitliği nedeniyle

$$
\begin{aligned}
P_{2n}(x) &= \frac{1}{2^{2n}.(2n)!}\left(w(x)\right)^{(2n)} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\binom{2n}{k}(-1)^{2n-k}}{2^{2n}.(2n)!}\left(x^{2k}\right)^{(2n)} \\
&= \frac{1}{2^{2n}.(2n)!}\left(x^{4n}\right)^{(2n)} + \frac{\binom{2n}{2n-1}(-1)^1}{2^{2n}.(2n)!}\left(x^{4n-2}\right)^{(2n)} + ... \\
&= \frac{4n(4n-1)...(2n+1)}{2^{2n}.(2n)!}x^{2n} - \frac{2n.(4n-2)(4n-3)...(2n+3)}{2^{2n}.(2n)!}x^{2n-2} + -...
\end{aligned}
$$

olduğu ve üstelik x^{2n} ' in katsayısı pozitif $\frac{(4n)!}{2^{2n}.((2n)!)^2}$, rasyonel sayısı olduğundan $derP_{2n} = 2n$ bulunur. Bu polinomda yalnızca x^2 ' nin kuvvetleri yer aldığından apaçık biçimde $P_{2n}(-x) = P_{2n}(x)$ bulunur. Siz şunları gösterin:

$$
derP_{2n-1} = 2n-1 \text{ ve } P_{2n-1}(-x) = -P_{2n-1}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}) \ .
$$

Önerme4: P_n Legendre polinomu , ikinci dereceden ünlü

$$
\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0
$$

Legendre diferansiyel denklemi'nin bir çözümüdür.

Kanıtlama: Bu kez $w(x) = \left(x^2-1\right)^n$ polinomu ile çalışarak ve $P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\left(w(x)\right)^{(n)}$ gözleyerek , sırasıyla

$$(w(x))' = (w(x))^{(1)}) = 2nx\left(x^2-1\right)^{n-1} \ , \ \left(x^2-1\right)(w(x))^{(1)} - 2nxw(x) = 0 \ ,$$

bulunacağından , son sonucu ard arda türeterek

$$\left(x^2-1\right)(w(x))^{(2)} - 2(n-1)x(w(x))^{(1)} - 2nw(x) = 0 \ ,$$
$$\left(x^2-1\right)(w(x))^{(3)} - 2(n-2)x(w(x))^{(2)} - 2[n+(n-1)]w(x)^{(1)} = 0 \ ,$$

ve $k+2$-inci adıma gelindiğinde

$$\left(x^2-1\right)(w(x))^{(k+2)} - 2(n-(k+1))x(w(x))^{(k+1)} - 2[n+(n-1)+...+(n-k)]w(x)^{(k)} = 0*$$

bulunur, oysa $n+(n-1)+...+(n-k) = (k+1)n-(1+2+...+k) = (k+1)n-\frac{(k+1)k}{2} = \frac{(k+1)(2n-k)}{2}$ olduğundan sonuçta

$$\left(x^2-1\right)(w(x))^{(k+2)} - 2x(n-(k+1))(w(x))^{(k+1)} - (2n-k)(k+1)(w(x))^{(k)} = 0$$

bulunur ve $k=n$ alınırsa

$$-\left(1-x^2\right)(w(x))^{(n+2)} + 2x(w(x))^{(n+1)} - n(n+1)(w(x))^{(n)} = 0$$

olur , oysa $P_n''(x) = \frac{1}{2^n.n!}(w(x))^{(n+2)}$ ve $P'(x) = \frac{1}{2^n.n!}(w(x))^{(n+1)}$ gözleyip, son bağıntıyı $\frac{-1}{2^n.n!}$ rasyonel sayısı ile çarparak istenen aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Teorem 1: $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ Legendre polinomlar dizisi $PC[-1,1]$ vektör uzayında dik bir dizidir ve $P_0, P_1, .., P_n$ polinomları ise $Po\ell_n[-1,1]$ vektör uzayında lineer bağımsız bir tabandır.

Kanıtlama: Amacımız $n \neq m$ ise $\langle P_n, P_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)\,dx = 0$ göstermektir.Oysa , Önerme 4 nedeniyle P_n ve P_m Legendre polinomları $\left(1-x^2\right)P_n''(x) - 2xP'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ ve $\left(1-x^2\right)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$ gerçeklediğinden birincisini $P_m(x)$ ikincisini $P_n(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarıp

$$\left(1-x^2\right)\left(P_m(x).P_n''(x)-P_n(x).P_m''(x)\right)-2x\left(P_m(x).P_n'(x)-P_n(x).P_m'(x)\right)$$
$$=P_n(x).P_m(x)\left(m(m+1)-n(n+1)\right)$$

bulunur,oysa $n\neq m$ için $n(n+1)\neq m(m+1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}P_n(x).P_m(x)&=\frac{1}{m(m+1)-n(n+1)}\Big[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_n''(x)-P_n(x)P_m''(x)\right)\\&\quad-2x\left(P_m(x)P_n'(x)-P(x)P_m'(x)\right)\Big]\\&=c_{n,m}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x).P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right]'\end{aligned}$$

bulunarak , tümlev alınırsa

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=c_{n,m}\ \left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x).P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right)\right]\Big|_{x=-1}^{x=+1}=0$$

bulunur, çünkü $\left(1-x^2\right)$ çarpanı hem $x=+1$ hem de $x=-1$ için sıfır olur.

Önerme5: P_n Legendre polinomu $Po\ell_{n-1}[-1,1]$ vektör uzayındaki tüm elemanlara (polinomlara) diktir.

Kanıtlama: Herhangi gerçel katsayılı $q\in Po\ell_{n-1}[-1,1]$ alındığından, Teorem1 nedeniyle $Po\ell_{n-1}[-1,1]$ vektör uzayı için $P_0,P_1,..,P_{n-1}$ Legendre polinomları bir doğuray olduğundan $q=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_k$ yazılışı geçerli ve $\alpha_k=\frac{\langle q,P_k\rangle}{\|P_k\|_k^2}\ (k=0,..,n-1)$ olur. Kolayca

$$\langle q,P_n\rangle=\left\langle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_k,P_n\right\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\langle P_k,P_n\rangle=0$$

bulunur, çünkü tüm k indisler için $k\leq n-1<n$ nedeniyle $k\neq n$ ve böylece $\langle P_k,P_n\rangle=0$ geçerlidir.

Örnekler1:

1) $q(x)=x^2$ ikinci dereceden polinomu için

$$q=\frac{\langle q,P_0\rangle}{\|P_0\|_t^2}P_0+\frac{\langle q,P_1\rangle}{\|P_1\|_t^2}P_1+\frac{\langle q,P_2\rangle}{\|P_2\|_t^2}P_2$$

olup , bu katsayıları hesaplayıp ve $\langle q,P_1\rangle=\int_{-1}^{1}q(x).P_1(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$ gözleyerek , sonuçta $q(x)=x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$ bulunur.

2) $x^3=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$ **gösteriniz.**

Teorem2: Legendre polinomlarının **indirgeme bağıntısı şudur:**

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$$

Kanıtlama: $q(x) = x.P_n(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ biçiminde tanımlanan polinom apaçık biçimde $derq = n+1$ sağladığından Teorem1 nedeniyle $P_0, .., P_n, P_{n+1}$ Legendre polinomları tarafından doğurulur, sonuçta $q = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k P_k$ yazılışı geçerli ve $k \leq n-2$ için $x.P_k(x)$ polinomunun derecesi $= k+1 \leq n-1 < n$ nedeniyle , bu k indisleri için

$$\alpha_k = \frac{\langle q, P_k \rangle}{\|P_k\|_t^2} = \frac{1}{\|P_k\|_t^2} . \int_{-1}^{1} q(x) . P_k(x)\, dx = \frac{1}{\|P_k\|_t^2} \int_{-1}^{1} P_n(x) . (x P_k(x))\, dx = 0$$

bulunarak

$$q(x) = x.P_n(x) = \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n+1} P_{n+1}(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur, oysa $(P_n(x))^2$ bir çift fonksiyon ve sonuçta $x.P_n^2(x)$ kesinlikle bir tek fonksiyon olduğundan onu $[-1, 1]$ aralığında tümlevi sıfırdır.

$$\alpha_n = \frac{1}{\|P_n\|_t^2} . \int_{-1}^{1} q(x) . P_n(x)\, dx = \frac{1}{\|P_n\|_t^2} . \int_{-1}^{1} x . P_n^2(x)\, dx = 0$$

böylece

$$x P_n(x) = \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) + \alpha_{n+1} P_{n+1}(x)$$

bulunur, artık yalnızca α_{n-1} ve α_{n+1} katsayılarının hesaplanması gerekecektir. Şimdi yukardaki son eşitliğin sol ve sağ yanındaki x^{n+1} ' in katsayılarının eşit olması gerekeceği ve üstelik

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n . n!} \left(\left(x^2 - 1 \right)^n \right)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} (-1)^{n-k}}{2^n . n!} x^{2k} \right)^{(n)} \\ &= \left(\frac{\binom{n}{n}}{2^n . n!} x^{2n} - \frac{\binom{n}{n-1}}{2^n . n!} x^{2n-2} + - ... \right)^{(n)} \\ &= \frac{2n (2n-1) ... (n+1)}{2^n . n!} x^n - \frac{n . (2n-2)(2n-3) ... (n-1)}{2^n . n!} x^{n-2} + - ... \\ &= \frac{(2n)!}{2^n . (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n . (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + - ... \end{aligned}$$

böylece

$$xP_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n.(n!)^2}x^{n+1} - \frac{(2n-2)!}{2^n.(n-1)!(n-2)!}x^{n-1} + -... \quad \text{ve}$$
$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}.((n+1)!)^2}x^{n+1} - \frac{(2n)!}{2^{n+1}.n!(n-1)!}x^{n-1} + ...$$

nedeniyle sonuçta sözü edilen eşitlikte x^{n+1} 'in katsayılarını eşitleyerek

$$\frac{(2n)!}{2^n.(n!)^2} = \alpha_{n+1}.\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}.((n+1)!)^2} = \alpha_{n+1}.\frac{(2n)!(2n+1)}{2^n.n!.(n+1)!}$$

ve dolayısıyla kolayca $\alpha_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$ ve ayrıca x^{n-1} 'in her iki yandaki katsayılarını eşitleyerek

$$-\frac{(2n-2)!}{2^n.(n-1)!.(n-2)!} = -\frac{n+1}{2n+1}.\frac{(2n)!}{2^{n+1}.n!(n-1)!} + \alpha_{n-1}.\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}.((n-1)!)^2}$$

ve gerekli kısaltmalarla $\alpha_{n-1} = \frac{n}{2n+1}$ bulunarak istenen elde edilir.

Önerme6: Tüm Legendre polinomlarının tüm katsayıları birer rasyonel sayıdır.

Kanıtlama: P_0, P_1, P_2 polinomları zaten bilinmektedir.$n \geq 3$ için P_n polinomunun katsayılarının birer rasyonel sayı olduğu, tümevarım kullanılıp, Teorem2'den yararlanarak gösterilir, bu ödevdir.

Teorem3: Her $n \geq 0$ için $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$ ve ayrıca $\|P_n\|_t^2 = \frac{2}{2n+1}$ geçerlidir.

Kanıtlama: Zaten $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ nedeniyle $P_0(1) = P_1(1) = 1$ bulunur.$P_0(1) = .. = P_n(1) = 1$ varsayımı altında, indirgeme bağıntısını kullanıp

$$P_{n+1}(1) = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(1) = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

ilk iddia tümevarımla gösterilmiş olur . ikincisi tümüyle benzer biçimde yapılır ve ödevdir.Şimdi, gerektiği için

$$q(x) = P_n(x) - \frac{2n-1}{n}x.P_{n-1}(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

polinomunun derecesinin $derq = n-2$ olduğunu gösterelim. Dikkat edilirse $P_{n-1}(x)$ polinomunda x^{n-1}'in katsayısı $\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}.((n-1)!)^2}$ ve sonuçta $q(x)$ polinomunda x^n'in katsayısı sıfırdır , çünkü bu katsayı

$$\frac{(2n)!}{2^n.(n!)^2} - \frac{2n-1}{n}.\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}.((n-1)!)^2} = \frac{(2n-1)!.2n}{2^n.n!.n!} - \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}.n!(n-1)!} = 0$$

Öte yandan , zaten $q(x)$ polinomunda hiç x^{n-1} 'li terim bulunmaz ve x^{n-2} ' nin katsayısı ise sıfırdan farklı $-\frac{(2n-2)!(n-1)^2}{2^{n-1}.n!(n-2)!}$ rasyonel sayısıdır, o helde $derq = n-2$ olur. Ayrıca, ünlü indirgeme bağıntısı $P_{n-1}(x)$ ile çarpılıp tümlev alınırsa

$$0=\langle P_{n+1},P_{n-1}\rangle=\int_{-1}^{1}P_{n+1}\left(x\right)P_{n-1}\left(x\right)dx=\frac{2n+1}{n+1}.\int_{-1}^{1}xP_{n-1}\left(x\right)P_{n}\left(x\right)dx-\frac{n}{n+1}\left\|P_{n-1}\right\|_{t}^{2}$$

ve sonuçta , $derq=n-2<n$ bilgisiyle, yukardaki eşitlikten bulunan

$$\int_{-1}^{1}x.P_{n-1}\left(x\right).P_{n}\left(x\right)dx=\frac{n+1}{2n+1}.\frac{n}{n+1}\left\|P_{n-1}\right\|_{t}^{2}=\frac{n}{2n+1}\left\|P_{n-1}\right\|_{t}^{2}$$

sonucu birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}0=\langle P_{n},q\rangle&=\langle P_{n},P_{n}\rangle-\frac{2n-1}{n}.\int_{-1}^{1}xP_{n-1}\left(x\right)P_{n}\left(x\right)dx\\&=\left\|P_{n}\right\|_{t}^{2}-\frac{2n-1}{2n+1}.\left\|P_{n-1}\right\|_{t}^{2}\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left\|P_{n}\right\|_{t}^{2}&=\frac{2n-1}{2n+1}\left\|P_{n-1}\right\|_{t}^{2}=\frac{\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)}{\left(2n+1\right)\left(2n-1\right)}.\left\|P_{n-2}\right\|_{t}^{2}\\&=\frac{\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)..3.1}{\left(2n+1\right)\left(2n-1\right)..5.3}.\left\|P_{0}\right\|_{t}^{2}=\frac{1}{2n+1}.\left\|P_{0}\right\|_{t}^{2}=\frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$

istenen sonucu bulunur.

Önerme7: $k<n$ ise $\left.\left(\left(x^{2}-1\right)^{n}\right)^{k}\right|_{x=+1}=0=\left.\left(\left(x^{2}-1\right)^{n}\right)^{(k)}\right|_{x=-1}$ olur.

Kanıtlama: Bir çarpım fonksiyonunun n-inci basamaktan türevini hesaplayan aşağıdaki ünlü **Leibniz bağıntısı** olan

$$(f.g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}.g^{(n-k)} \qquad (1)$$

kullanılırsa, $k<n$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\left(x^{2}-1\right)^{n}\right)^{(k)}&=\left(\left(x-1\right)^{n}\left(x+1\right)^{n}\right)^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\left(x-1\right)^{n}\right)^{(i)}.\left(\left(x+1\right)^{n}\right)^{(k-i)}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}M_{n,k,i}\left(x-1\right)^{n-k}\left(x+1\right)^{n-(k-i)} \qquad (2)\end{aligned}$$

gerçeklenir, çünkü kolayca

$$\left(\left(x-1\right)^{n}\right)^{(i)}=\left(\prod_{j=0}^{i-1}\left(n-j\right)\right)\left(x-1\right)^{n-i}\ ,\ \left(\left(x+1\right)^{n}\right)^{k-i}=\left(\prod_{j=0}^{k-i-1}\left(n-j\right)\right)\left(x+1\right)^{n-k+i}$$

olduğundan, bunların çarpımındaki katsayıya kısalık amacıyla $M_{n,k,i}$ denilirse yukardaki eşitlik elde edilir. Oysa (2) toplamında $i \leq k < n$ nedeniyle hem $0 < n-i$ ve $k-i \leq k < n$ nedeniyle $0 \leq n-(k-i) = n-k+i$ olduğundan, toplama katılan **tüm terimlerden** hem $(x-1)$ ve hem de $(x+1)$' in pozitif kuvvetleri yer alır, böylece $\left.\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(k)}\right|_{x=+1} = 0 = \left.\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(k)}\right|_{x=-1}$ bulunur.

Teorem4: Her $n \in \mathbb{N}$ için P_n polinomunun, hepsi $(-1,1)$ aralığında bulunan tam n tane gerçel kökü vardır.

Kanıtlama: Dikkat edilirse , Önerme7 ve P_n polinomunun tanımı gereği $P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)} = \frac{1}{2^n.n!}\left(\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n-1)}\right)'$ gerçeği kullanılırsa, ayrıca $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = f(x)|_{x=a}^b$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx &= \frac{1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1}\left[\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n-1)}\right]' dx = \frac{1}{2^n.n!}.\left[\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n-1)}\right]_{x=-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1}\left[\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n-1)}\right]_{x=1} - \frac{1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1}\left[\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n-1)}\right]_{x=-1} = 0\end{aligned}$$

kısacası her $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0$ sonucu bulunur. Böylelikle, her $n \in \mathbb{N}$ için P_n Legendre polinomunun $[-1,1]$ aralığında en az bir kökünün var olduğu anlaşılır, aksi halde ünlü Ara Değer Teoremi ile bir $[a,b]$ kapalı-sınırlı aralığında sürekli bir f gerçel değerli fonksiyonu $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her c değerini en az uygun bir $x_c \in [a,b]$ noktasında aldığı yani $f(x_c) = c$ gerçekleştiğinden, özel olarak $f(a)\cdot f(b) < 0$ ise $\exists \xi_0 \in [a,b]$ için $f(\xi) = 0$ olur, dolayısıyla $\exists \xi_0 \in [-1,1]$, $P_n(\xi_0) = 0$ **olmuyorsa**, P_n polinomu $[-1,1]$ aralığında hiç işaret değiştirmez, yani ya $0 < P_n(x) \quad (\forall x \in [-1,1])$ olur ve sonuçta $0 < \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx$ olur, ya da $P_n(x) < 0 \quad (\forall x \in [-1,1])$ olur ve $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx < 0$ olurdu, oysa bu tümlevin değerinin sıfır olduğu yukarda gösterilir. Demek ki P_n polinomunun $[-1,1]$ aralığında en az bir kökü vardır. Şimdi, eğer P_n polinomunun bu aralıktaki tüm kökleri, $m < n$ olmak üzere $x_1, x_2, .., x_m$ olsaydı bir çelişkiye varılacağını gösterelim. O halde

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2)..(x - x_m)$$

polinomu apaçık biçimde $derq = m < n = derP_n$ gerçekler ve üstelik $P_n(x) = p(x).q(x)$ yazılışı geçerli olacak biçimde, $[-1,1]$ aralığında hiç kökü olmayan ve $derp = n - m$ gerçekleyen bir p polinomu **vardır**. Dolayısıyla $p(x)$ polinomu $[-1,1]$ aralığında hiç işaret değiştirmez veya $p(x) > 0 \quad (\forall x \in [-1,1])$ olur. Bu gerçekleşirse

$$P_n(x).q(x) = p(x).q^2(x) \geq 0 \qquad (\forall x \in [-1,1])$$

olur, üstelik hem $p(x)$ hem de $P_n(x).q(x)$ birer polinom olarak sürekli olduklarından, ünlü **İntegral Hesabın**

Birinci Aradeğer Teoremi kıllanılırsa var olan uygun bir $\xi_0 \in [-1,1]$ aracılığıyla

$$\int_{-1}^{1} p(x)\left(P_n(x)\, q(x)\right) dx = P(\xi_0) . \int_{-1}^{1} P_n(x)\, q(x)\, dx = p(\xi_0) . \langle P_n, q \rangle = 0$$

bulunur, son eşitlik yazılırken $derq = m < n$ yani $q \in Po\ell_{n-1}[-1,1]$ gözleyip Önerme5 kullanılmıştır. Tüm bunlardansa

$$\frac{2}{2n+1} = \|P_n\|_t^2 = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} p(x) . \big(P_n(x)\, q(x)\big) dx = 0$$

çelişkisi doğardı; benzer biçimde eğer $p(x) < 0 \quad (\forall x \in [-1,1])$ olsaydı

$$-\|P_n\|_t^2 = \int_{-1}^{1} \left(-P_n(x)\right) . P_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(-p(x)\right) . \big(P_n(x)\, q(x)\big) dx = -p(\xi_0) \langle P_n, q \rangle = 0$$

çelişkisi doğardı. Demek ki P_n polinomunun $[-1,1]$ aralığındaki köklerinin sayısının n'den küçük olması kesinlikle olanaksızdır. Böylelikle P_n polinomunun $[-1,1]$ aralığında en az n tane kökünün bulunması gerektiği anlaşılır. Oysa zaten bir polinomun derecesinden daha fazla kökünün var olması, ünlü **Cebirin Temel Teoremi** nedeniyle olanaksızdır, bulunan bu köklerin P_n polinomunun tüm kökleri olduğu ve ayrıca Teorem3 nedeniyle $P_n(1) = 1$ ve $P_n(-1) = (-1)^n \neq 0$ bilindiğinden, bu köklerin hepsinin $(-1,1)$ açık aralığında yer aldığı anlaşılır.

Teorem5: Legendre polinomları aşağıdaki bağıntıyı gerçekler.

$$P'_{n+1}(x) = x . P'_n(x) + (n+1)\, P_{n+1}(x) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$$

Kanıtlama: Önerme7'deki Leibniz bağıntısı (1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1} . (n+1)!} \left(\left(x^2-1\right)^{n+1}\right)^{(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!} . \left(x^2-1\right)\right]^{(n+1)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left[\binom{n+1}{0} \left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n+1)} . \left(x^2-1\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2(n+1)} \left[\binom{n+1}{1} \left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n)} \left(x^2-1\right)' + \binom{n+1}{2} \left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n-1)} \left(x^2-1\right)''\right] \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left[\left(\left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n)}\right)' . \left(x^2-1\right) + 2(n+1)\, x . P_n(x) + n(n+1) \left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n-1)}\right] \\
&= \frac{1}{2(n+1)} P'_n(x) . \left(x^2-1\right) + x P_n(x) + \frac{n}{2} \left(\frac{\left(x^2-1\right)^n}{2^n . n!}\right)^{(n-1)}
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla bir kez daha türeterek

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2(n+1)} P''_n(x) \,.\left(x^2-1\right) + \frac{xP'_n(x)}{n+1} + P_n(x) + xP'_n(x) + \frac{n}{2}P_n(x) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} P''_n(x) \,.\left(x^2-1\right) + \frac{n+2}{n+1} xP'_n(x) + \frac{n+2}{2}P_n(x) \end{aligned}$$

bulunur.Ohalde bu bulunan sonuç ve Legendre diferansiyel denklemi nedeniyle $\left(x^2-1\right) P''_n(x) = n(n+1)P_n(x) - 2xP'_n(x)$ olduğundan, tüm bu sonuçları kullanarak istenen bağıntı bulunur:

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2(n+1)} \left[n(n+1)P_n(x) - 2xP'_n(x)\right] + \frac{n+2}{n+1} xP'_n(x) + \frac{n+2}{2}P_n(x) \\ &= xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}) \quad . \end{aligned}$$

Önerme8: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |P_n(x)|\, dx = 0$ geçerlidir.

Kanıtlama: Dikkat edilirse $\|P_n\|_t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olduğundan , Cauchy-Schwarz Eşitsizliğiyle

$$0 \le \int_{-1}^{1} |P_n(x)|\,.1dx \le \sqrt{\int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2\, dx}.\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = \sqrt{2}.\,\|P_n\|_t < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \;\; (\forall n \in \mathbb{N})$$

olduğundan istenen kolayca bulunur.

Ödevler

1) Legendre polinomlarının indirgeme bağıntısı ve Teorem5'den yararlanıp $xP'_n(x) - P'_{n-1} = n.P_n(x)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ gösteriniz

2) Gösteriniz: $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

3) Gösteriniz: $\left(1-x^2\right) P'_n(x) = n.P_{n-1}(x) - nxP_n(x)$

4) Her $n \in \mathbb{N}$ için gösterin: $\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)\, dx = \dfrac{2n}{4n^{2-1}}$

5) Her $n \ge 0$ için $2 = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,.P'_{n+1}(x)\, dx = \left\langle P_n, P'_{n+1}\right\rangle$ gösteriniz.

6) Her $n \ge 0$ için $\int_{-1}^{1} xP'_n(x)P_n(x)\, dx = \dfrac{2n}{2n+1}$ gösteriniz.

7) Her $n \ge \mathbb{N}$ için $\mathrm{P}_{2n-1}(0) = 0$ ve $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$ gösterin.

8) Gösterin: $P_n(x) = xP_{n-1}(x) + \frac{x^2-1}{n}P'_{n-1}(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$

(Yol gös:Yukardaki 3) şıkkından yararlanınız)

9) Gösterin: $\frac{1-x^2}{n^2}\left(P'_n(x)\right)^2 + \left(P_n(x)\right)^2 = \frac{1-x^2}{n^2}\left(P'_{n-1}(x)\right)^2 + \left(P_{n-1}(x)\right)^2 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R})$ (Yol gös:Teorem5'deki bağıntı aracılığıyla $P'_n(x) = xP'_{n-1}(x) + P_n(x)$ gözleyip 8) şıkkından yararlanınız.)

10) Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [-1,1]$ için gösteriniz:

$$\frac{1-x^2}{n^2}\left(P_n'(x)\right)^2 + \left(P_n(x)\right)^2 \le 1.$$

11) Her $n \ge 0$ ve her $x \in [-1,1]$ için $|P_n(x)| \le 1$ olduğunu gösterin.

12) Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki bağıntıyı kanıtlayınız:

$$P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + (2n-9)P_{n-5}(x) + ...$$

Önerme9: Legendre polinomları aşağıdaki **Christoffel Özdeşliğini** gerçekler:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)P_k(t).P_k(x) = (n+1).\frac{P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)}{t-x} \qquad (t \neq x)$$

Kanıtlama: Legendre polinomlarının ünlü indirgeme bağıntısı ile

$$(2k+1)x.P_k(x) = (k+1)P_{k+1}(x) + k.P_{k-1}(x)$$

bu eşitliği $P_k(t)$ ile çarpıp, sonta t ve x'in görevlerini değiştirerek

$$(2k+1)xP_k(t)P_k(x) = (k+1)P_{k+1}(x)P_k(t) + kP_k(t)P_{k-1}(x)$$
$$(2k+1)tP_k(x)P_k(t) = (k+1)P_{k+1}(t)P_k(x) + kP_k(x)P_{k-1}(t)$$

ve bunları taraf tarafa çıkartarak

$$\begin{aligned}(2k+1)(t-x)P_k(t)P_k(x) &= (k+1)\Big[P_{k+1}(t)P_k(x) - P_k(t)P_{k+1}(x)\Big] \\ &\quad - k\Big[P_k(t)P_{k-1}(x) - P_{k-1}(t)P_k(x)\Big]\end{aligned}$$

bulunup, toplam alınırsa sağ yan teleskopik toplam olduğundan

$$\begin{aligned}&(t-x)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(t)P_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\Big[(k+1)\big(P_{k+1}(t)P_k(x) - P_k(t)P_{k+1}(x)\big) - k\big(P_k(t)P_{k-1}(x) - P_{k-1}(t)P_k(x)\big)\Big] \\ &= (n+1)\big(P_{n+1}(t)P_n(x) - P_n(t)P_{n+1}(x)\big)\end{aligned}$$

bulunarak, $t \neq x$ nedeniyle $0 \neq t-x$ ile bölerek istenen elde edilir.

Teorem6: Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in (-1,1)$ için

$$|P_n(x)| < \frac{M}{\sqrt{n(1-x^2)}}$$

geçerli olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti vardır.

Kanıtlama: Uzun hesaplamalar gerektiren bu kanıtlamayı yapmıyoruz.

Önerme 10: $f \in PC[-1,1]$ ne olursa olsun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}.\langle f, P_n\rangle = 0$ olur.

Kanıtlama: $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ Legendre polinomlar dizisi $C[-1,1]$ vektör uzayında dik bir dizi olduğundan, Bölüm2, Teorem1'de kanıtlanan ünlü Bessel Eşitsizliğiyle, bu kez $c_n = \frac{1}{\|P_n\|_t^2}\langle f, P_n\rangle \in \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|P_n\|_t^2 \leq \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx < +\infty$$

bulunur, yani $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|P_n\|_t^2$ serisinin yakınsadığı anlaşılır böylelikle $0 = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n| \|P_n\|_t$ bulunur, oysa dikkat edilirse $|c_n|.\|P_n\|_t = \frac{|\langle f,P_n\rangle|}{\|P_n\|_t} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,|\langle f, P_n\rangle|$ olduğundan ve üstelik

$$0 \leq \sqrt{n}.|\langle f, P_n\rangle| = \sqrt{\frac{2n}{2}}\,|\langle f, P_n\rangle| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.|\langle f, P_n\rangle| \to 0$$

nedeniyle istenen bulunur. Bitti!

Şimdi bu bölümün **ana teoremi**ne geldik:

Teorem 7: $f \in PC[-1,1]$ olsun. f' türevi $[-1,1]$ aralığında sonlu nokta dışında heryerde tanımlı, sonlu noktada ise f'in sol ve sağ türevleri tanımlı ise, $(-1,1)$ aralığında aşağıdaki açılım geçerlidir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle f, P_n\rangle|}{\|P_n\|_t^2}.P_n(x) \qquad (\forall x \in (-1,1))$$

Kanıtlama: Kısalık amacıyla

$$c_k = \frac{|\langle f, P_k\rangle|}{\|P_k\|_t^2} = \frac{2k+1}{2}.\langle f, P_k\rangle = \frac{2k+1}{2}.\int_{-1}^{1} f(x).P_k(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

yazılırsa $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k P_k$ polinomlarının **her** $x \in (-1,1)$ için

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.P_n(x)$$

gerçeklediği gösterilmelidir. Dikkat edilirse

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2k+1}{2} . \int_{-1}^{1} f(t) . P_k(t) . P_k(x) \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(t) P_k(x) \right] f(t) \, dt$$

olduğundan, Christoffel özdeşliğini kullanarak aşağıdaki bulunur:

$$s_n(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)}{t-x} . f(t) \, dt \tag{1}$$

oysa

$$\frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)}{t-x} dt = 1 \tag{2}$$

gerçeklediğini görmek için, her $x \in [-1, 1]$ için $f(x) = 1$ gerçekleyen f sabit fonksiyonu için, yukardaki $s_n(x)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2} . \sum_{k=0}^{n} (2k+1) . \int_{-1}^{1} P_k(t) . P_k(x) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_0(t) . P_0(x) \, dt + 0 = \frac{1}{2} . 2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur, çünkü dikkat edilirse Teorem4 içinde gösterilen $\int_{-1}^{1} P_n(t) \, dt = 0$ bilgisiyle

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) . \int_{-1}^{1} P_k(t) . P_k(x) \, dt = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x) . \int_{-1}^{1} P_k(t) . dt = 0$$

ve $P_0(t) = 1 = P_0(x)$ $(\forall x \in [-1, 1])$ nedeniyle $\int_{-1}^{1} P_0(t) . P_0(x) \, dt = \int_{-1}^{1} 1 . dt = 2$ olur. O halde (2) bağıntısı bulunur ve dolayısıyla sabit bir $x_0 \in [-1, 1]$ için

$$f(x_0) = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(t) P_n(x_0) - P_n(t) P_{n+1}(x_0)}{t-x_0} . f(x_0) \, dt \tag{3}$$

geçerli olduğundan (1) ve (3) den yararlanarak

$$\begin{aligned} s_n(x_0) - f_n(x_0) &= \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - f(x_0)}{t - x_0} . \big(P_{n+1}(t) P_n(x_0) - P_n(t) P_{n+1}(x_0) \big) dt \\ &= \frac{n+1}{2} P_n(x_0) \int_{-1}^{1} g(t) P_{n+1}(t) \, dt - \frac{n+1}{2} P_{n+1}(x_0) \int_{-1}^{1} g(t) P_n(t) \, dt \end{aligned}$$

bulunur, burada yeni $g(t)$ fonksiyonu $t \neq x_0$ için $g(t) = \frac{f(x) - f(x_0)}{t - x_0}$ ve $g(x_0) = \frac{1}{2} \left(f'(x_0+) + f'(x_0-) \right)$ biçiminde tanımlanmıştır. Dikkat edilirse $g \in PC[-1, 1]$ olur(bu kolay bir ödevdir), üstelik Teorem6 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+1}{2} . P_n(x_0) \right| &= \frac{n+1}{2} . |P_n(x_0)| < \frac{M(n+1)}{2\sqrt{n(1 - x_0^2)}} = \left(\frac{n+1}{2n} . \frac{M}{2\sqrt{1 - x_0^2}} \right) \sqrt{n} \\ &< \frac{M}{\sqrt{1 - x_0^2}} \sqrt{n} = M_0 . \sqrt{n} \end{aligned}$$

bulunur, burada $\frac{n+1}{2n} \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gözlenip $M_0 = M / \sqrt{1 - x_0^2}$ yazılmıştır. O halde, bu $x_0 \in [-1, 1]$ için

$$\left| \frac{n+1}{2} . P_n(x_0) \right| \leq M_0 . \sqrt{n} \text{ ve } \left| \frac{n+1}{2} . P_{n+1}(x_0) \right| \leq M_0 . \sqrt{n}$$

gözleyip, $g \in PC[-1, 1]$ olduğu için Önerme10 kullanılıp

$$0 \leq |s_n(x_0) - f(x_0)| \leq M_0 \left[\sqrt{n} \langle g, P_n \rangle + \sqrt{n} \langle g, P_{n+1} \rangle \right] \to 0$$

istenen sonucu elde edilir. Siz neden aşağıdakinin geçerli olduğunu gösterin.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \langle g, P_{n+1} \rangle = 0$$

Demek ki herhangi bir $x_0 \in (-1, 1)$ için $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} s_n(x_0)$ olduğu kanıtlanmış olmaktadır, bu istenendir.

Örnekler2:

1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^1 P_n(x) \, dx = \frac{P_{n-1}(0)}{n+1}$ geçerlidir, çünkü ünlü indirgeme bağıntısıyla

$$n(n+1) P_n(x) + \left(\left(1 - x^2 \right) P_n'(x) \right)' = 0$$

olduğundan

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{(-1)}{n(n+1)}.\int_0^1 \left(\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right)'dx = \left.\frac{\left(1-x^2\right)P_n'(x)}{n(n+1)}\right|_1^0$$
$$= \frac{1}{n(n+1)}P_n'(0) = \frac{n.P_{n-1}(0)}{n(n+1)} = \frac{P_{n-1}(0)}{n+1}$$

bulunur, çünkü Ödev3) kullanılarak aşağıdaki yazılmıştır.

$$P_n'(0) = n.P_{n-1}(0) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

2) $f(0)=0$ ve $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \in (-1,0) \\ 1 & ; x \in (0,1) \end{cases}$ fonksiyonunun, Legendre polinomları aracılığıyla açılımını bulunuz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = \frac{1}{\|P_n\|_t^2}\langle f, P_n\rangle = \frac{2n+1}{2}\langle f, P_n\rangle$ olmak üzere, Teorem7'teki koşulları yerine getiren f tek fonksiyonu için, $x \in (-1,1)$ ne olursa olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}.P_{2n-1}(x) = \frac{3x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3).(2n-1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}P_{2n+1}(x)$$

bulunur, çünkü f tek P_{2n} polinomları çift ve sonuçta $f.P_{2n}$ çarpım fonksiyonları yine birer tek fonksiyonu olduğundan

$$c_{2n} = \frac{4n+1}{2}\langle f, P_{2n}\rangle = \frac{4n+1}{2}.\int_{-1}^1 f(x)P_{2n}(x)\,dx = 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

buna karşılık $f.P_{2n-1}$ çarpım fonksiyonları, iki tek fonksiyonun çarpımı olarak çift fonksiyon ve böylece, bir önceki Örnek kullanılıp

$$\langle f, P_{2n-1}\rangle = \int_{-1}^1 f(x).P_{2n-1}(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x).P_{2n-1}(x)\,dx = 2\int_0^1 P_{2n-1}(x)\,dx = \frac{2P_{2n-2}(0)}{2n}$$

yani $\langle f, P_{2n-1}\rangle = \frac{P_{2n-2}(0)}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve ayrıca $P_{2n}(0) = (-1)^n.\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$ bilindiğinden

$$c_{2n+1} = \frac{2(2n+1)+1}{2}.\langle f, P_{2n+1}\rangle = \frac{4n+3}{2n+2}P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{4n+3}{2n+2}\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$$
$$= (-1)^n\frac{(4n+3)(2n-1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}$$

ve $c_1 = \frac{3}{2}\langle f, P_1\rangle = 3.\int_0^1 f(x).P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}$ bulunarak istenen açılım elde edilir.

3) Yukardaki açılımda $x = \frac{1}{2}$ alınırsa şu bulunur:

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+3)(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$