

Modern Fizik Finali

1. Basit Harmonik Titreşken

Bir basit Harmonik titreşicinin dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = Cxe^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \quad (1.1)$$

ile verilmektedir. Bu dalga fonksiyonuna karşılık gelen enerjiyi bulunuz. Bu durumun hangi uyarılmış seviyeye karşılık gelmektedir?

Çözüm:

Denklem (1.1)'i ikinci mertebeden türevini peşpeşe alırsak

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Cxe^{-\alpha x^2}; \quad \alpha = m\omega / 2\hbar \\ \frac{d\psi}{dx} &= C(1 - 2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= C\{-4\alpha x - 2(1 - 2\alpha x^2)\alpha x\}e^{-\alpha x^2} \\ &= C(-6\alpha + 4\alpha^2 x^2)xe^{-\alpha x^2} = (-6\alpha + 4\alpha^2 x^2)\psi \end{aligned} \quad (1.2)$$

elde edilir. Bunu Harmonik titreşicinin potansiyeli $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ Shrödinger dalga denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (-6\alpha + 4\alpha^2 x^2)\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi \quad (1.3)$$

eşitliğinden karşılıklı terimler eşitlenirse (x^2 'nin katsayısı zaten eşit kalıyor) enerji teriminde

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 6\alpha = \frac{3m\omega}{\hbar} \Rightarrow E = \frac{3\hbar\omega}{2} \quad (1.4)$$

enerjinin özdeğeri bulunur. Harmonik titreştiricinin $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ enerji formülünden $n = 1$ ilk uyarılmış seviyenin enerjisi olduğu anlaşılır. (1.1) dalga fonksiyonu da Harmonik olarak titreşen bir elektronun birinci uyarılmış seviyesindeki dalga fonksiyonudur.

2. İki Duvar Arasında Görelî Bir Parçacık

Aralarındaki mesafe L olan iki sonsuz duvar arasında hareketi sınırlandırılan bir m_0 kütleli parçacık görelî hareket etmektedir (hızı ışık hızıyla kıyaslanabilir). Parçacığın enerji düzeyleri için bir ifade türetiniz.

Çözüm:

L boyutundaki bir kuyuda bulunan bir parçacığın kararlı dalga koşulu

$$L = \frac{n\lambda}{2} \quad (2.1)$$

parçacığa atfedilen dalga boyunun yarısının katları şeklinde yorumlayabiliriz. Buradan parçacığın de Broglie dalga boyuna karşılık gelen momentumu o zaman

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L} \quad (2.2)$$

ile verilecektir. Parçacığın hareketini göreceli olduğunu varsayarsak o zaman göreceli toplam enerjisi

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{(m_0 c^2)^2}} \Rightarrow E_n = mc^2 \sqrt{1 + \frac{n^2 h^2}{4L^2 m_0^2 c^2}} \quad (2.3)$$

ile verilir. Buradan parçacığın göreceli enerji düzeyleri durgun kütle enerjisi çıkarılırsa

$$K_n = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{nh}{2Lm_0 c} \right)^2} - 1 \right) \quad (2.4)$$

elde edilir.

3. Hidrojen Atomunda Elektronun En Olası Yeri

Hidrojen atomunda $2p$ durumunda bulunan bir elektronun dalga fonksiyonu

$$\psi_{2p} = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

ile verilmektedir. Böyle bir dalga fonksiyonu ile temsil edilen bir elektronun hidrojen atomunun çekirdeğinden itibaren bulunabileceği en olası yerini bulunuz?

Çözüm:

Hidrojen atomunda $2p$ durumunda bulunan bir elektronun bulunma olasılığı fonksiyonu

$$P = 4\pi r^2 |\psi|^2 = 4\pi r^2 \frac{1}{3(2a_0)^3} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/a_0} = \frac{4\pi}{24a_0^5} r^4 e^{-r/a_0} \quad (3.1)$$

ile verilir. Buradan en olası yerini bulmak için konuma göre türevini alacak olursak

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4\pi}{24a_0^5} \left(4r^3 - \frac{r^4}{a_0} \right) e^{-r/a_0} = 0 \Rightarrow r = 4a_0 \quad (3.2)$$

Bohr yarıçapının dört katı bulunur.

4. Hidrojen Atomunun 3d Açısal Momentum Kuantum Sayıları

Hidrojen atomunun 3d durumundaki bir elektronu için L , L_z ve θ 'nin mümkün değerlerini bulunuz?

Çözüm:

Hidrojen atomunun 3d durumundaki bir elektronu için $n = 3$ ve $l = 2$ (d) olmaktadır. Toplam açısal momentumu o zaman

$$L = \sqrt{l(l+1)\hbar} = \sqrt{2(2+1)\hbar} = \sqrt{6}\hbar = 2.58 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (4.1)$$

ve L_z 'nin izinli değerleri manyetik kuantum sayıları $m_l = -2, -1, 0, 1, 2$ olmak üzere

$$L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar \quad (4.2)$$

elde edilir. θ 'nin izinli değerleri

$$\cos \theta = \frac{L_z}{|L|} = \frac{m_l}{\sqrt{6}} = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, 0 = \pm 0.816, \pm 0.408, 0 \quad (4.3)$$

bulunur. Buradan açı değerleri büyükten küçüğe doğru

$$\theta = 145^\circ, 114^\circ, 90^\circ, 65.9^\circ, 35.3^\circ \quad (4.4)$$

elde edilir.

5. H₂ Molekülünün Dönme Enerji Seviyeleri

H₂ molekülünün protonlar arasındaki mesafe $r = 0.75 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) a) $J = 1$ ilk dönme durumunun enerjisini bulun, b) $J = 1$ 'den $J = 0$ 'a geçişte yayınlanan ışınımın dalga boyunu bulunuz.

Çözüm:

Hidrojen molekülünün indirgenmiş kütlesi

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} a.k.b. = \frac{1.66 \times 10^{-27}}{2} = 0.83 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (5.1)$$

ve buradan eylemsizlik momenti

$$I = \mu r^2 = (0.83 \times 10^{-27} \text{ kg})(0.75 \times 10^{-10} \text{ m})^2 = 0.467 \times 10^{-47} \text{ kgm}^2 \quad (5.2)$$

elde edilir.

a) $J = 1$ ilk dönme durumunun enerjisi

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{I} = \frac{(1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{0.467 \times 10^{-47} \text{ kgm}^2} = 2.38 \times 10^{-21} \text{ J} = 14.8 \text{ meV} \quad (5.3)$$

elde edilir.

b) $J = 0$ 'da $E = 0$ olduğu için $J = 1$ 'den $J = 0$ 'a geçişte yayınlanan ışınımın frekansı

$$E = 2.38 \times 10^{-21} \text{ J} = hf \Rightarrow f = 3.59 \times 10^{12} \text{ Hz} \quad (5.4)$$

ve dalga boyu

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3.59 \times 10^{12}} = 83.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 83.6 \mu\text{m} \quad (5.5)$$

6. H₃ Molekülü Niçin Oluşmaz

H₂ molekülüne üçüncü bir H atomu niye bağlanıp bir H₃ molekülü oluşmaz?

Çözüm:

Taban durumundaki H₂ molekülün iki elektronu Pauli Dışarlama ilkesine göre 1s yörüngesinde farklı kuantum sayıları alması gerektiğinden dolayı spinleri farklı olması gerekir. Bundan dolayı zıt spinlere sahip olmalıdır. Üçüncü bir Hidrojen atomu H₂ molekülü ile birleşebilmesi için H'nin elektronu Dışarlama ilkesine göre 1s seviyesinde farklı kuantum sayısı alamayacağından dolayı daha yüksek enerji seviyesinde yani 2s'de olması gerekir. Bu ise enerjik olarak kararlı bir durum değildir. Bundan dolayı H₃ molekülü oluşmaz.