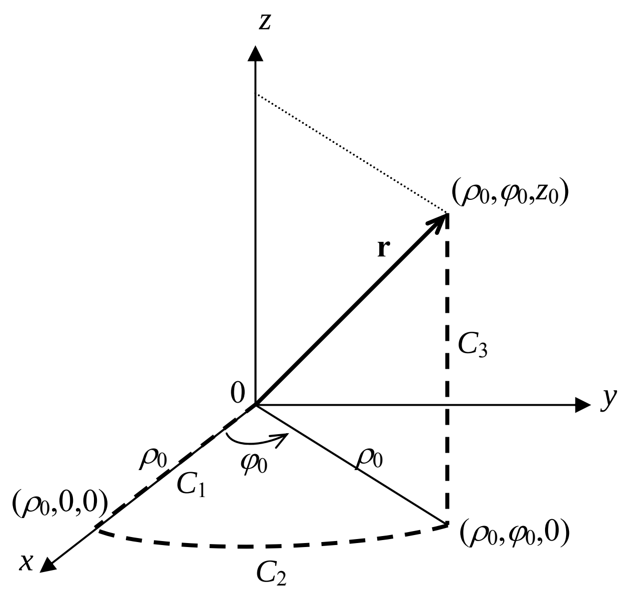
22.08.2011

MEKANİK
FİNAL

Soru 1. Bir parçacık

$$\mathbf{F} = a\rho\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} + b\rho\cos\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.1}$$

kuvveti altında hareket etmektedir. Bu kuvvetin korunumlu olması için *a* ve *b* katsayıları arasındaki ilişki ne olmalıdır. Buradan potansiyeli bulunuz. Aşağıdaki şekli kullanabilirsiniz. Orijinden başlayarak (ρ_0, φ_0, z_0) kadar integrasyonu alınır.



Cevap 1.
Kuvvet silindirik koordinatlarda verilmiş ve bundan dolayı silindirik koordinatlarda çalışmamız daha pratik ve hızlı olacaktır. O halde silindirik koordinatlarda kuvvet bileşenleri

$$F_\rho = a\rho\sin\varphi,\ F_\varphi = b\rho\cos\varphi,\ F_z = 0 \tag{1.2}$$

ile verilir. Bu korunumlu kuvvet ise silindirik koordinatlarda kuvvetin rotasyonu sıfır olmalıdır. O halde (1.2) ile verilen kuvvetin rotasyonunu

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho F_\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(-\frac{\partial(b\rho\cos\varphi)}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial(a\rho\sin\varphi)}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(b\rho^2\cos\varphi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial(a\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad (1.3) \\ &= 0\hat{\boldsymbol{\rho}} + 0\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(2b\rho\cos\varphi - a\rho\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{z}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2b\end{aligned}$$

ancak $a = 2b$ koşuluyla bütün bileşenleri sıfır olur. Bu koşul altında korunumlu olduğundan dolayı o halde potansiyel enerjiyi bulalım. Bunun için şekilde verilen C_1, C_2 ve C_3 ile isimlendirilmiş kesikli çizgili yolu orijinden başlayarak herhangi bir (ρ_0, φ_0, z_0) noktasındaki potansiyel enerjiyi hesaplayalım:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \left(F_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_z \hat{\mathbf{z}}\right)\cdot\left(d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\mathbf{z}}\right)$$
$$= -\underbrace{\int_{\rho_s}^{\rho} F_\rho d\rho}_{C_1} - \underbrace{\int_{\varphi_s}^{\varphi} F_\varphi \rho d\varphi}_{C_2} - \underbrace{\int_{z_s}^{z} F_z dz}_{C_3} \tag{1.4}$$

i. C_1 yolu boyunca $\varphi = 0$ and z = 0 olduğundan $F_\rho = 0$ olacak ve C_1 integrasyonundan

$$C_1 = \int_0^{\rho_0} F_\rho d\rho = 0 \tag{1.5}$$

hiç bir katkı gelmeyecektir.

ii. C_2 yolu boyunca $\rho = \rho_0$ and z = 0 olduğundan $F_\varphi = b\rho_0 \cos\varphi$ olacak ve C_2 integrasyonundan

$$C_2 = \int_0^{\varphi_0} F_\varphi \rho d\varphi = b\rho_0^2 \int_0^{\varphi_0} \cos\varphi d\varphi = b\rho_0^2 (-\sin\varphi)\Big|_0^{\varphi_0} = -b\rho_0^2 \sin\varphi_0 \tag{1.6}$$

katkısı gelecektir.

iii. C_3 yolu boyunca $\varphi = \varphi_0$ and $\rho = \rho_0$ ve $F_z = 0$ olduğundan C_3 integrasyonu

$$C_3 = \int_0^{z_0} F_z dz = 0 \tag{1.7}$$

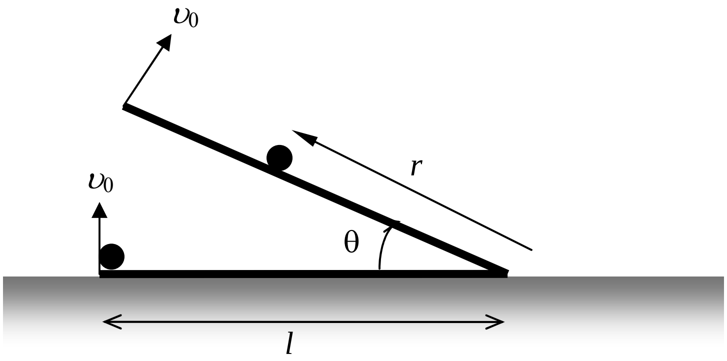
hiç bir katkı gelmeyecektir.

Bulduğumuz bu sonuçları (1.4)'de yerine koyarsak ve en genel şekilde ifade etmek için (ρ_0, φ_0, z_0) yerine (ρ, φ, z) konularak

$$V(\mathbf{r}) = b\rho^2 \sin\varphi \tag{1.8}$$

potansiyeli bulunmuş olur.

Soru 2. *m* kütleli bir parçacık şekilde gösterilen *l* uzunluğundaki sürtünmesiz bir tahta parçasının bir ucunda durmaktadır. Bu tahta parçacısının diğer ucu sabit kalmak koşulu ile kütlenin olduğu yerden teğet υ_0 hızıyla kaldırılmaktadır. Sistemin hareketini Lagrange tekniği kullanarak hareket denklemini çıkartınız ve çözünüz.



Çözüm 2. Parçacığın hareketi en güzel düzlem kutupsal koordinatlarda çözülerek elde edilir. Tahtanın dönme noktasını orijin kabul edersek şekilde gösterildiği gibi parçacığın konumu *r* ve tahtanın hareket doğrultusunda yapmış olduğu açıya θ dersek o zaman parçacığın Lagranjeni

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta \tag{2.1}$$

elde edilir. Tahta υ_0 hızıyla kaldırıldığından dolayı

$$\upsilon_0 = \dot{\theta}l \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\upsilon_0}{l} \qquad \text{ve} \qquad \theta = \frac{\upsilon_0}{l}t \tag{2.2}$$

olacaktır. O zaman Lagranjiyen

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\upsilon_0^2 r^2}{l^2}\right) - mgr\sin\left(\frac{\upsilon_0}{l}t\right) \tag{2.3}$$

olacaktır. O halde *r* için sistemin hareket denklemi

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ m\ddot{r} - m\frac{\upsilon_0^2}{l^2}r + mg\sin\left(\frac{\upsilon_0}{l}t\right) = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Soru 3. Kütlesi *m* ve açısal momentumu *l* olan bir cisim merkezcil bir kuvvet altında $u = \rho^{-1} = a\sin(n\theta)$ ile verilen yörüngede hareket etmektedir. Burada *a* ve *n* sabitlerdir.

a. Merkezcil kuvveti bulunuz (ρ cinsinden).
b. Etkin potansiyeli bulunuz (ρ cinsinden)?
c. Sistemin toplam enerjisini bulunuz.

Çözüm 3. Parçacığın yörünge denklemi verilmektedir. O halde bunu merkezcik kuvvet altında elde edilen yörünge denkleminde yerine koyarsak

$$\underbrace{\frac{d^2u}{d\theta^2}}_{-n^2u}+u=-\frac{m}{l^2u^2}F(u^{-1})$$

$$F(u^{-1})=-\frac{l^2u^2}{m}\left(-n^2u+u\right)=-\frac{l^2(1-n^2)}{m}u^3 \tag{3.1}$$

$$F(\rho)=-\frac{l^2(1-n^2)}{m}\frac{1}{\rho^3}$$

elde edilir.

Buradan potansiyel enerji

$$V(\rho)=-\int_{\infty}^{\rho}F(\rho)d\rho=\frac{l^2(1-n^2)}{m}\int_{\infty}^{\rho}\frac{1}{\rho^3}d\rho=-\frac{l^2(1-n^2)}{2m}\frac{1}{\rho^2} \tag{3.2}$$

elde edilir. Etkin potansiyel ise

$$V_{etk}=\frac{l^2}{2m\rho^2}+V(\rho)=\frac{l^2}{2m\rho^2}-\frac{l^2(1-n^2)}{2m}\frac{1}{\rho^2}=\frac{l^2n^2}{2m}\frac{1}{\rho^2} \tag{3.3}$$

elde edilir. Kinetik enerji ise

$$\dot{\rho}=\frac{d\rho}{\underbrace{du}_{-\rho^2}}\frac{du}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}=-\cancel{\rho^2}an\cos(n\theta)\frac{l}{m\cancel{\rho^2}}=-\frac{nl}{m}a\cos(n\theta), \qquad \dot{\theta}=\frac{l}{m\rho^2}$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2=\frac{1}{2}m\frac{n^2l^2}{m^2}a^2\cos^2(n\theta)=\frac{n^2l^2}{2m}a^2\left(1-\sin^2(n\theta)\right)=\frac{n^2l^2}{2m}\left(a^2-\frac{1}{\rho^2}\right) \tag{3.4}$$

elde edilir. Sistemin toplam enerjisi (3.3) ve (3.4)'den

$$E=T+V_{etk}=\frac{n^2l^2}{2m}\left(a^2-\cancel{\frac{1}{\rho^2}}\right)+\cancel{\frac{n^2l^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}}=\frac{n^2l^2a^2}{2m} \tag{3.5}$$

sabit bir enerji değeri bulunur.