8.08.2011

**MEKANİK VİZE**

**Soru 1.** Bir cismin hareket denklemi

$$m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0$$

ile verilmektedir. Bu hareket denklemindeki her bir terimi tek tek izah ediniz. $\gamma = b/2m$ ve $\omega_0^2 = k/m$ olmak üzere $\gamma < \omega_0$ ise bu hareket denklemini çözünüz? $t = 0$'da cisim $x = 0$ ve $\upsilon = \upsilon_0$ ise cismin konumunu ve hızını ifade ediniz. Grafiğini kabaca çiziniz. (30 puan)

**Soru 2.** Düzlem kutupsal (polar) koordinatlarda bir parçacığın konumu $\mathbf{r} = re^{-\gamma t}\hat{r}$ ile verilmektedir. Bu parçacığın hız ve ivmesini kutupsal koordinatlarda bulunuz. Kinetik enerjiyi bulunuz. (30 puan)

**Soru 3.** Başlangıç hızı $\upsilon_0$ olan bir sandal sürtünme kuvveti $F(\upsilon)$ tarafından durdurulmaktadır. Sandal

$$\upsilon = \gamma(x_s - x)$$

hız formülü ile yavaşlamaktadır. Burada $\gamma$ bir sabit ve $x_s$ ise sandalın durduğu yerdir. (30 puan)

i. Sandala etki eden F(υ) sürtünme kuvvetini υ cinsinden ($F(\upsilon)$) ve $x$ cinsinden ($F(x)$) ifade ediniz. (10)

ii. $\gamma$ sabitini $\upsilon_0$ ve $x_s$ cinsinden ifade ediniz? (10)

iii. Hareket denklemini çözerek hızın zamana göre fonksiyonunu ifade ediniz. (10)

iv. Sandalın durana kadar aldığı yolun %63'üne ( $x_s(1-e^{-1})$ ) erişmesi için geçen zaman nedir. (10)

Prof. Dr. Uğur Yahşi

**Cevap 1.**

Hareket denklemindeki her bir terimi tek tek izah edelim:

$m\ddot{x}$: kütle ivme çarpımı ile verilen bu nicelik cismin kuvvetler altında alabileceği hareketin şeklini ve değişimini veren niceliktir.

$b\dot{x}$: cisme etki eden hıza bağımlı bir kuvvet olup cismin hareketi yönünde ve pozitif katkısı olan bir niceliktir ve cismin hızının etkili bir şekilde artmasını sağlar.

$-kx$: cisme etki eden restore kuvvet olup basit harmonik hareket olarak tanımladığımız sistemlerin hareketinde kullanılır.

Hareket denklemini çözelim. Soruda verilen yeni verilen $\gamma = b/2m$ ve $\omega_0^2 = k/m$ nicelikler cinsinden hareket denklemini

$$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{0.0.1}$$

yazılabilir. Bu denklem sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklem olup bunun çözümü için $x = e^{pt}$ gibi çözümler bu denklemin çözümü olduğu varsayımı ile bu çözüm önerisini (0.0.1)'de yerine koyalım ve *p* değerlerini bulalım:

$$\underbrace{e^{pt}}_{\neq 0}(\underbrace{p^2 - 2\gamma p + \omega_0^2}_{0}) = 0 \tag{0.0.2}$$

ve buradan *p* için

$$p_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{0.0.3}$$

iki çözüm elde edilir. $\gamma < \omega_0$ için çözüme bakalım, karekök içi negatif olacaktır, bundan dolayı:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \tag{0.0.4}$$

tanımı ile *p* değerleri

$$p_\pm = \gamma \pm i\omega_1 \tag{0.0.5}$$

şeklinde sanal olmaktadır. Buradan (0.0.1)'nin çözümü iki çözümün uygun sabitlerle çözümlerin toplamı şeklinde verebiliriz:

$$x = C_1 e^{(\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(\gamma - i\omega_1)t} \tag{0.0.6}$$

Bu çözümde eksponansiyel terimler sanal fonksiyonlardır, fakat ölçtüğümüz uzunluk birimi *x* ise reel çözüm olması gerekmektedir. Bundan dolayı $C_1$ ve $C_2$ sabitleri öyle seçilmelidir ki sonuçta reel *x* fonksiyonu bulunsun. Bir sanal sayının kompleks eşleniği ile toplamına bakalım

$$\left.\begin{aligned} z &= a + ib \\ z^* &= a - ib \end{aligned}\right\} \Rightarrow z + z^* = 2a \tag{0.0.7}$$

burada verildiği gibi reel olmaktadır. Bundan dolayı (0.0.6) ifadesinin reel olması için terimlerden birinin diğerinin sanal eşleniği (konjugesi) olmalıdır. Burada

$$C_1 = C_2^* = C = a + bi = re^{i\theta} \tag{0.0.8}$$

olmalıdır, burada en sağdaki ifade bir sanal sayının ( $a+ib$ ) kutupsal (polar) gösterimidir. (0.0.6) ifadesi o zaman

$$\begin{aligned} x &= re^{\gamma t}\left(e^{i(\omega_1 t+\theta)}+e^{-i(\omega_1 t+\theta)}\right) \\ &= Ae^{\gamma t}Cos\left(\omega_1 t+\theta\right) \end{aligned} \tag{0.0.9}$$

formunu alır ve buradan cismin hızı

$$\upsilon = Ae^{\gamma t}\left[\gamma Cos\left(\omega_1 t+\theta\right)-\omega_1 Sin\left(\omega_1 t+\theta\right)\right] \tag{0.0.10}$$

bulunur. Burada *A*(=2*r*) ve $\theta$, (0.0.1) ile verilen ikinci mertebenden diferansiyel denklemin çözümünden elde ettiğimiz sabitlerdir. Bu sabitler cismin başlangıcında bilmemiz gereken başlangıç konumu ve hızı gibi başlangıç koşulundan elde edilir.

*t* = 0'da cisim *x* = 0 ise Denklem (3.10)'den

$$x\big|_{t=0} = ACos(\theta)=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \tag{0.0.11}$$

elde edilir ve *t* = 0'da $\upsilon = \upsilon_0$ ise Denklem (3.11)'den

$$\upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0 = A\left[\gamma \underbrace{Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \omega_1 \underbrace{Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right] \Rightarrow A = -\frac{\upsilon_0}{\omega_1} \tag{0.0.12}$$

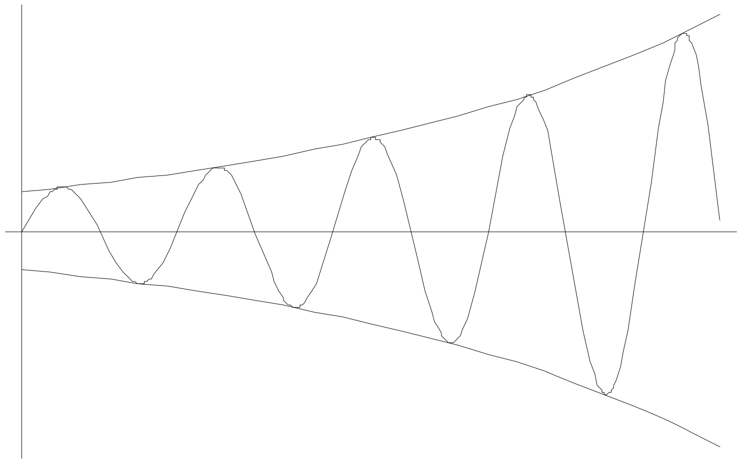
*A* sabiti de bulunur. Konum ve hız ifadeleri o zaman:

$$x = -\frac{\upsilon_0}{\omega_1}e^{\gamma t}Cos\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\upsilon_0}{\omega_1}e^{\gamma t}Sin\left(\omega_1 t\right) \tag{0.0.13}$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{\omega_1}e^{\gamma t}\left[\gamma Sin\left(\omega_1 t\right)-\omega_1 Cos\left(\omega_1 t\right)\right] \tag{0.0.14}$$

ile verilir.

Konum-zaman grafiği zaman bağımlı olarak eksponansiyel olarak artan $\pm(\upsilon_0/\omega_1)e^{\gamma t}$ genliğinde kılavuz içerisinde sinüzodial olarak ileri geri hareket ederek konumun genliği artarak gider,



ve hız-zaman grafiği ise

**Cevap 2.**

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}e^{-\gamma t}\hat{r} + re^{-\gamma t}\frac{d\hat{r}}{dt} - \gamma re^{-\gamma t}\hat{r} = \dot{r}e^{-\gamma t}\hat{r} + re^{-\gamma t}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\dot{\theta} - \gamma re^{-\gamma t}\hat{r}$$
$$= \left(\dot{r} - \gamma r\right)e^{-\gamma t}\hat{r} + re^{-\gamma t}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - 2\gamma\dot{r} + \gamma^2 r\right)e^{-\gamma t}\hat{r} + \left(\dot{r} - \gamma r\right)e^{-\gamma t}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}e^{-\gamma t}\dot{\theta}\hat{\theta} - \gamma re^{-\gamma t}\dot{\theta}\hat{\theta} + re^{-\gamma t}\ddot{\theta}\hat{\theta} - re^{-\gamma t}\dot{\theta}^2\hat{r}$$
$$= \left(\ddot{r} - 2\gamma\dot{r} + \left(\gamma^2 - \dot{\theta}^2\right)r\right)e^{-\gamma t}\hat{r} + \left(2\left(\dot{r} - \gamma r\right)\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e^{-\gamma t}\hat{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{r} - \gamma r\right)^2 + r^2\dot{\theta}^2\right]e^{-2\gamma t}$$

**Cevap 3.**

i. $F(\upsilon) = m\dfrac{d\upsilon}{dt} = m\dfrac{d\left[\gamma(x_s - x)\right]}{dt} = -m\gamma\dfrac{dx}{dt} = -m\gamma\upsilon \quad \therefore \quad F(x) = -m\gamma^2(x_s - x)$

ii. $t = 0'da \quad x = 0$ ve $\upsilon = \upsilon_0 \;\Rightarrow\; \upsilon_0 = \gamma x_s \;\Rightarrow\; \gamma = \upsilon_0 / x_s$

iii. $\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\gamma\int_0^t dt \;\Rightarrow\; \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\gamma t \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 e^{-\gamma t}$

$$\int_0^x dx = \upsilon_0\int_0^t e^{-\gamma t}dt \;\Rightarrow\; x = \frac{\upsilon_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) = x_s\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$$

iv. $\%63x = x_s(1 - e^{-1}) = x_s\left(1 - e^{-\gamma t_e}\right) \;\Rightarrow\; t_e = \gamma^{-1}$