§ 2 Reel Sayılar

Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

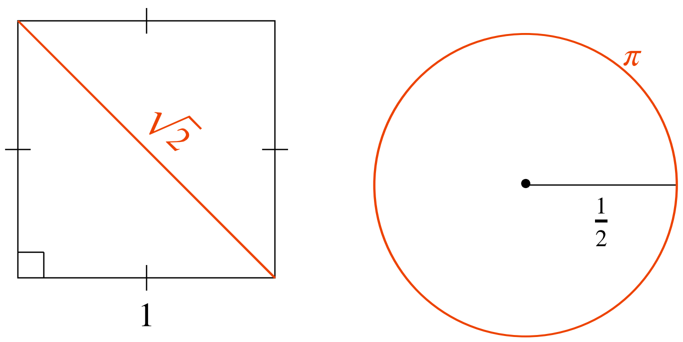
biçiminde tanımlanır.

Önerme 2.1 Bir sayı ancak ve ancak periyodik veya sonlu ondalıklı olarak yazılabiliyorsa rasyoneldir.

Örneğin;

$$\frac{2}{5} = 0,4 \qquad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad 1,283\,\underleftrightarrow{234}\,\underleftrightarrow{234}\,\underleftrightarrow{234}\ldots$$

Rasyonel olmayan sayılar da vardır, bunlar *irrasyonel* sayılardır. İrrasyonel sayılar doğal olarak geometrik şekillerde görülür: Örneğin, kenarı 1 olan bir karenin köşegeni $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısıdır; yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan bir dairenin çevresi π dir ve bu da irrasyonel bir sayıdır. Son olarak, $e = \exp(1)$ de irrasyoneldir.



Şimdi $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığını kanıtlayalım:

Önerme 2.2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

İspat. $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım. O halde, m ve n sayıları aralarında asal olmak üzere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

olacak biçimde $m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Bu durumda $2n^2 = m^2$ olur. Bu son eşitlik bir tamsayı eşitliğidir. Soldaki tamsayı çifttir, dolayısıyla m^2 de çifttir. O halde

m de çifttir: $m = 2k, k \in \mathbb{Z}$ olur. Böylece $2n^2 = 4k^2$ ve buradan da $n^2 = 2k^2$ elde edilir. Bu son eşitlikten n de çifttir: $n = 2j, j \in \mathbb{N}$ olur. Bu ise m ve n nin aralarında asal olması ile çelişir. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ dir. □

Bu sonuç oldukça önemli olduğu için ikinci bir ispat verelim:

2. İspat: $\sqrt{2}$ nin rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ve $n\sqrt{2} = m \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\mathcal{N} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bu küme boş değildir çünkü az önce $n\sqrt{2} = m \in \mathbb{N}$ yani $n \in \mathcal{N}$ olduğunu gördük. Böylece $\mathcal{N}$, $\mathbb{N}$ nin boştan farklı bir alt kümesidir ve bu yüzden en küçük elemanı $n_0 := \min \mathcal{N}$ vardır.

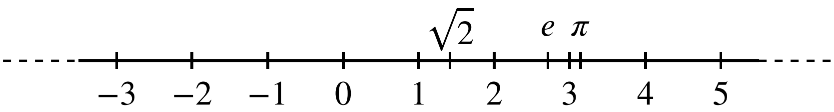
$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1)$$

diyelim. $1 < \sqrt{2} < 2$ olduğundan $0 < n_1 < n_0$ çıkar. Öte yandan

$$n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$$

dir. Bu nedenle $n_1 \in \mathcal{N}$ dir ve $n_1 < n_0$ olduğundan n_1, $\mathcal{N}$ nin en küçük elemanı olur. Bu ise n_0 ın en küçük eleman olması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Reel (gerçel) sayılar genellikle sayı doğrusu üzerinde gösterilir:



$$\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots \qquad \pi \simeq 3,14159265\ldots \qquad e \simeq 2,718\ldots$$

Tanım 2.1 Reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ sembollerinin eklenmesi ile elde edilen yeni kümeye *genişletilmiş reel sayılar* kümesi adı verilir ve $\tilde{\mathbb{R}}$ ile gösterilir: $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$0 + a = a$	Eğer $a \neq 0$ ise $1 \cdot a = a$
$a + b = 0 \iff a = -b$	$ab = 1 \iff a = \frac{1}{b}$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$a \cdot b = 0 \iff (a = 0 \text{ veya } b = 0)$$

Sonuç 2.1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *değişmeli gruptur.*

Tanım 2.2 Üzerinde "+" ve "$\cdot$" ikili işlemleri tanımlanmış ve aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen $\mathbb{F}$ kümesine *cisim* denir.

$$+ \ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \quad \text{ve} \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

(T_1) *(Kapalılık Özelliği)* Her $x, y \in \mathbb{F}$ için $x + y \in \mathbb{F}$ dir.

(T_2) *(Değişme Özelliği)* Her $x, y \in \mathbb{F}$ için $x + y = y + x$ dir.

(T_3) *(Birleşme Özelliği)* Her $x, y, z \in \mathbb{F}$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir.

(T_4) *(Etkisiz eleman Özelliği)* Her $x \in \mathbb{F}$ için $x + 0 = x$ ve $0 + x = x$ olmak üzere bir $0 \in \mathbb{F}$ elemanı vardır.

(T_5) *(Ters eleman Özelliği)* Her bir $x \in \mathbb{F}$ için $x + (-x) = 0$ ve $(-x) + x = 0$ olacak biçimde bir $-x \in \mathbb{F}$ elemanı vardır.

(C_1) *(Kapalılık Özelliği)* Her $x, y \in \mathbb{F}$ için $x \cdot y \in \mathbb{F}$ dir.

(C_2) *(Değişme Özelliği)* Her $x, y \in \mathbb{F}$ için $x \cdot y = y \cdot x$ dir.

(C_3) *(Birleşme Özelliği)* Her $x, y, z \in \mathbb{F}$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ dir.

(C_4) *(Etkisiz eleman Özelliği)* Her $x \in \mathbb{F}$ için $x \cdot 1 = x$ ve $1 \cdot x = x$ olacak biçimde bir $1 \in \mathbb{F}$ (ve $1 \neq 0$) elemanı vardır.

(C_5) *(Ters eleman Özelliği)* Her bir $x \in \mathbb{F}$ $(x \neq 0)$ için $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$ ve $\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1$ olacak biçimde bir $\frac{1}{x} \in \mathbb{F}$ elemanı vardır.

(D) *(Dağılma Özelliği)* Her $x, y, z \in \mathbb{F}$ için çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Reel sayılar kümesi üzerinde yukarıdaki aksiyomları gerçekleyen işlemlerle *cisim* adı verilen bir cebirsel yapı oluşur. Cisim aksiyomları sayesinde reel sayılarla hesap yapabiliriz.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde çıkarma işlemi, toplama işlemi yardımıyla tanımlanır:

$$x - y = x + (-y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Tanım 2.3 E bir küme olsun.

(i) E kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısı $E \times E$ nin bir alt kümesidir. $(x, y) \in E \times E$ ise x, y ile bağıntılıdır denir ve $(x, y) \in \mathcal{R}$ ise $x\mathcal{R}y$ yazılır.

(ii) Aşağıdaki özellikleri gerçekleyen $\mathcal{R}$ bağıntısına *sıralama bağıntısı* denir:

- $\mathcal{R}$ *yansıyandır* : Her $x \in E$ için $x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ *antisimetriktir* : Her $x, y \in E$ için $(x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
- $\mathcal{R}$ *geçişkendir* : Her $x, y, z \in E$ için $(x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Örnek 2.1 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bir cisimdir. Diğer taraftan, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi cisim değildir. Çarpma işlemine göre ters eleman özelliği gerçeklenmediği için cisim yapısı göstermez. Örneğin, $2x = 1$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

Sonuç 2.2 "$\leq$" bağıntısı $\mathbb{R}$ üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

Gerçekten;

- Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \leq x$,
- Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,
- Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$.

Tanım 2.4 "$<$" bağıntısı ile aşağıdaki özellikleri gerçekleyen S kümesine *tam sıralanmış küme* denir.

(i) Her $x, y \in S$ için $x < y$, $x = y$ ve $y < x$ ifadelerinden bir ve yalnız bir tanesi doğrudur.

(ii) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

Uyarı 2 Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için:

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$$
$$x < y \iff x \leq y \text{ ve } x \neq y$$

Uyarı 3 Her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için $\leq$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri gerçekler:

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ ve } c \leq d &\implies a + c \leq b + d \\ a \leq b \text{ ve } c \geq 0 &\implies a \cdot c \leq b \cdot c \\ a \leq b \text{ ve } c \leq 0 &\implies a \cdot c \geq b \cdot c \end{aligned}$$

Tanım 2.5 Aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir $\mathbb{F}$ cismine *sıralanmış cisim* denir:

(i) $x, y, z \in \mathbb{F}$ için $x < y$ ise $x + z < y + z$ dir.

(ii) $x, y \in \mathbb{F}$ için $x < y$ ve $c > 0$ ise $x \cdot c < y \cdot c$ dir.

Önerme 2.3 $\mathbb{F}$ sıralı bir cisim ve $x, y, z \in \mathbb{F}$ olsun.

(i) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ dır.

(ii) $x > 0$ ve $y < z$ ise $x \cdot y < x \cdot z$ dir.

(iii) $x < 0$ ve $y < z$ ise $x \cdot y > x \cdot z$ dir (Özel olarak $-y > -z$ dir).

(iv) $x \neq 0$ ise $x^2 > 0$ dır.

(v) $0 < x < y$ (veya $x < y < 0$) ise $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ dir.

Tanım 2.6 a ve b reel sayılarının maksimumu

$$\max(a, b) = \begin{cases} a\,; & a \geq b \text{ ise} \\ b\,; & b > a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

2.1 Sınırlı Kümeler

Tanım 2.7 S sıralanmış bir küme ve $M \subset S$ olsun.

(i) Her $x \in M$ için $x \leq \alpha$ olacak biçimde bir $\alpha \in S$ *varsa*, M kümesine *üstten sınırlıdır* denir ve α ya da M nin *üst sınırı* denir.

(ii) Her $x \in M$ için $x \geq \beta$ olacak biçimde bir $\beta \in S$ *varsa*, M kümesine *alttan sınırlıdır* denir ve β ya da M nin *alt sınırı* denir.

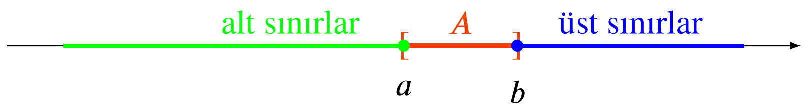
Alttan ve üstten sınırlı bir kümeye *sınırlı küme* denir.

Örnek 2.2 $(2, 3]$ yarı açık aralığı sonsuz elemanlı, sınırlı bir kümedir. 2 ve 2 den küçük her reel sayı $(2, 3]$ yarı açık aralığı için bir alt sınır, 3 ten büyük her sayı $(2, 3]$ yarı açık aralığı için bir üst sınırdır.

Örnek 2.3 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sınırlı değildir, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq \alpha$ olacak şekilde bir α reel sayısı yoktur.

Örnek 2.4 $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ aralıkları sınırlıdır.

Gerçekten; $A = [a, b]$ kümesini gözönüne alalım.



i) A kümesinin üst sınırlarının kümesi $[b, +\infty)$,

ii) A kümesinin alt sınırlarının kümesi $(-\infty, a]$.

Örnek 2.5 $S := \{x : x < a\}$ kümesi üstten sınırlıdır.

Örnek 2.6 $S = \{0, 1, 2\}$ kümesi hem alttan hem de üstten sınırlıdır.

Uyarı 4 – Dikkat: Üstten sınırlı bir kümenin üst sınırlarının bir en küçüğü, alttan sınırlı bir kümenin alt sınırlarının bir en büyüğü vardır.

Tanım 2.8 S sıralanmış bir küme ve $M \subset S$ olsun.

(i) u, M kümesinin herhangi bir üst sınırı olmak üzere, $u_0 \leq u$ olacak biçimde M kümesinin bir u_0 üst sınırı varsa, u_0 sayısına M kümesinin *en küçük üst sınırı* ya da *supremumu* denir.

$$\sup M := u_0$$

(ii) a, M kümesinin herhangi bir alt sınırı olmak üzere, $a_0 \geq a$ olacak biçimde M kümesinin bir a_0 alt sınırı varsa, a_0 sayısına M kümesinin *en büyük alt sınırı* ya da *infimumu* denir.

$$\inf M := a_0$$

Uyarı 5 – Not: Bir kümenin supremum ve infimumu olmak zorunda değildir, fakat bununla beraber, eğer supremum veya infimum var ise tektir.

Uyarı 6 – Dikkat: E nin supremumu ve infimumu E ye ait olmak zorunda değildir.

Örnek 2.7 $E := \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$ kümesinin supremumu 1 dir ve E kümesinin elemanı değildir. Öte yandan, $G := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 1\}$ kümesinin supremumu 1 dir ve aynı zamanda G kümesinin bir elemanıdır.

Örnek 2.8 Üstten sınırlı $M = \{x : x < 1\}$ kümesinin en küçük üst sınırı $s_0 = 1$ dir. $s < 1$ sayısı M nin üst sınırı olamayacağından, $\sup M = 1$ olur. Gerçekten; $s < 1, s \in M$ olsun. $s < \frac{s+1}{2} < 1$ olur. $\frac{s+1}{2} \in M$ olduğundan, $\sup S = s < 1$ olamaz. Bu nedenle, $\sup M = 1$ bulunur. M, en küçük üst sınırını kapsamaz. Kümenin alt sınırı yoktur, dolayısıyla en büyük alt sınırı da yoktur.

Tanım 2.9 Bir M kümesinin supremum değeri bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin *maksimum elemanı* denir ve $\max M$ ile gösterilir. Benzer şekilde, küme infimum değerini içeriyorsa bu infimum değerine kümenin *minimum elemanı* denir ve $\min M$ ile gösterilir.

Uyarı 7 – Not: *En küçük üst sınır özelliğine bazen tamlık özelliği (tamlık aksiyomu) ya da Dedekind tamlık özelliği de denir.*

Uyarı 8 – Ek Bilgi: İnfimum ve supremum ile ilgili daha detaylı inceleme için Prof.Dr. H. Nurettin ERGUN, Analiz III ders notları kitabına bakılabilir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde çıkarma işlemi, toplama işlemi yardımıyla tanımlanır:

$$x - y = x + (-y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

Örnek 2.9 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bir cisimdir. Diğer taraftan, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi cisim değildir. Çarpma işlemine göre ters eleman özelliği gerçeklenmediği için cisim yapısı göstermez. Örneğin, $2x = 1$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

Önerme 2.4 $x \in \mathbb{R}$ ve $x \geq 0$ olmak üzere verilen her $\varepsilon > 0$ için $x \leq \varepsilon$ ise $x = 0$ dır.

İspat: $x > 0$ ise $0 < \frac{x}{2} < x$ dir (Neden?). $\varepsilon = \frac{x}{2}$ alınırsa çelişki elde edilir. Böylece $x = 0$ bulunur. □

Tanım 2.10 $M \subset \mathbb{R}$ olsun. Her (a, b) açık aralığı için $a < r < b$ olmak üzere bir $r \in M$ varsa, M kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur denir.

Teorem 2.1 – (Arşimet Özelliği)

(i) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x > 0$ ise

$$nx > y$$

olacak biçimde en az bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

(ii) ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ ise $x < r < y$ olacak biçimde en az bir $r \in \mathbb{Q}$ vardır.

İspat: (a) $x > y$ ise $n = 1$ olarak alınabilir.

$x \leq y$ olsun ve $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi gözönüne alınsın. Kabul edelim ki (i) yanlış olsun: $nx > y$ olacak şekilde n doğal sayısı bulunmasın. Bu durumda, her n için $nx \leq y$ bulunur. Bu ise y nin A kümesi için bir üst sınır olduğunu gösterir. Tamlık aksiyomu nedeniyle üstten sınırlı olan bir reel sayı kümesi supremuma sahip olmalıdır. O halde A kümesi bir supremuma sahiptir, $a = \sup A$ olsun. $x > 0$ olduğundan $a - x < a$ eşitsizliği sağlanır ve (supremum a olduğundan) $a - x$ supremum değildir. Bu durumda, $a - x < mx$ olacak şekilde bir $mx \in A$ elemanı bulunmalıdır ($m \in \mathbb{N}$), bu ise $a < (m+1)x$ olduğunu gösterir. $m+1 \in \mathbb{N}$ dir ve $(m + 1)x \in A$ dır. Bu ise, a nın supremum olması ile çelişir.

(b) $y - x > 0$ olduğundan, Arşimet Özelliği'nden $n \cdot (y - x) > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < y - x$ gerçeklenmek üzere daima bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böyle bir n sayısını belirleyelim.
$x > 0$ olduğunu kabul edelim. Yine, Arşimet Özelliği'nden en az bir m doğal sayısı $m \cdot \frac{1}{n} > x$ gerçeklenmek üzere vardır.

$$M = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x \right\} = \{ m \in \mathbb{N} : m > n \cdot x \}$$

kümesi boş değildir ve doğal sayılar kümesinin iyi sıralılık özelliğinden bir en küçük k elemanına sahiptir. $x < \frac{k}{n}$ olduğu biliniyor. $\frac{k}{n} < y$ olduğu gösterilmelidir. $\frac{k}{n} \geq y$ olsaydı,

$$\frac{k-1}{n} \geq y - \frac{1}{n} > y - (y - x) = x$$

çıkardı! Bu, ise k nın M kümesinin en küçük elemanı olmasına aykırıdır. $\frac{k}{n} < y$ olmalıdır.
$x \leq 0$ hâli, x ve y yerine $c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $x + c, y + c$ sayı çifti alınarak yürütülür.

$\square$

Sonuç 2.3 Her $x \in \mathbb{R}$ için $n > x$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Yani, her x reel sayısından daha büyük bir n doğal sayısı vardır.

Sonuç 2.4 Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç 2.5 Her $x \in \mathbb{R}$ için $n < x < m$ gerçeklenecek biçimde $n, m \in \mathbb{Z}$ vardır.

Sonuç 2.6 Her $x \in \mathbb{R}$ için $n \leq x < n + 1$ gerçeklenecek biçimde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır.

Önerme 2.5 $x \in \mathbb{R}$ olsun. $E(x) := [x]$ ile gösterilen ve x in tam kısmı olarak adlandırılan *yegâne* (bir ve yalnız bir) tamsayı *vardır*.

İspat:
Varlık. $x \geq 0$ olsun. Arşimet özelliğinden $n > x$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle $M = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq x \right\}$ kümesi sonludur (çünkü her $k \in M$ için $0 \leq k < n$

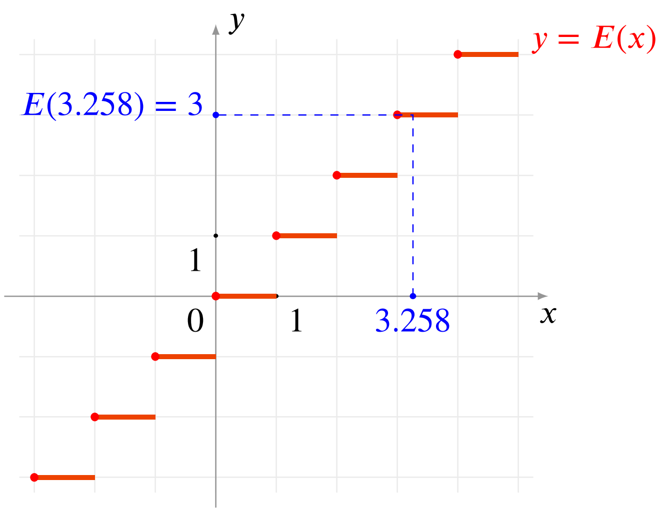
dir). O halde M kümesinin bir en büyük elemanı vardır. $k_{max} = \max M$ diyelim. $k_{max} \in K$ olduğundan $k_{max} \leq x$ dir ve $k_{max} + 1 > x$ olduğundan $k_{max} + 1 \notin K$ dir. Böylece $k_{max} \leq x < k_{max} + 1$ ve $E(x) = k_{max}$ olur.

Teklik. k, ℓ sayıları $k \leq x < k+1$ ve $\ell \leq x < \ell + 1$ gerçekleyen iki tamsayı ise $k \leq x < \ell + 1$ yazılabilir ve buradan da $k < \ell + 1$ elde edilir. ℓ ve k nın yerleri değiştirilerek benzer biçimde $\ell < k + 1$ elde edilir. Buradan $\ell - 1 < k < \ell + 1$ sonucuna varırız, fakat $\ell - 1$ ve $\ell + 1$ arasındaki tek tamsayı ℓ olduğundan $k = \ell$ olmak zorundadır. $x < 0$ durumu da benzer biçimde incelenir. □

Örnek 2.10

$$E(1,642) = [1,642] = 1, E(\pi) = [\pi] = 3, E(-3,25) = [-3,25] = -4$$

$x \mapsto E(x) = [x]$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



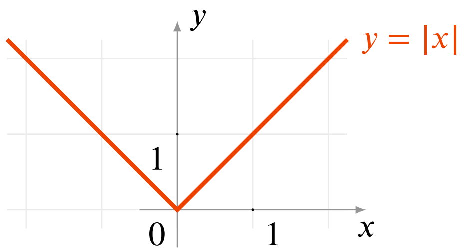
Sonuç 2.7 Her $x \in \mathbb{R}$ için $[x] \leq x < [x] + 1$ dir.

$$\boxed{E(x) \leq x < E(x) + 1}$$

Tanım 2.11 Bir x reel sayının mutlak değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}}$$

$x \mapsto |x|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



Önerme 2.6

(i) $|x| \geq 0 \quad ; \quad |-x| = |x| \quad ; \quad |x| > 0 \iff x \neq 0$

(ii) $\sqrt{x^2} = |x|$

(iii) $|xy| = |x||y|$

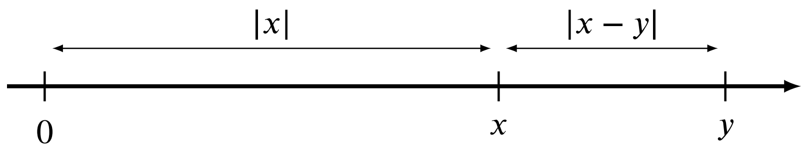
(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Üçgen eşitsizliği)

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

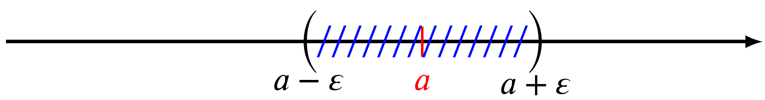
İspat:

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$ ve $-|y| \leq y \leq |y|$ eşitsizliklerinin taraf tarafa toplanmasıyla $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ ve buradan da $|x+y| \leq |x|+|y|$ elde edilir.

(ii) $x = (x-y)+y$ yazılırsa, ilk eşitsizlikten $|x| = \big|(x-y)+y\big| \leq |x-y|+|y|$ elde edilir. Donc $|x|-|y| \leq |x-y|$, x ve y nin yerleri değiştirilerek $|y|-|x| \leq |y-x|$ bulunur. Öte yandann $|y-x| = |x-y|$ olduğundan $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ bulunur. □



$$|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Leftrightarrow x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



Problem 2.1

1) $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $|x| \geq \Big| |x+y| - |y| \Big|$ dir, gösteriniz.
2) $x_1, \ldots, x_n$ reel sayıları için $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ dir. Gösteriniz.
3) $x, y > 0$ olsun. $E(x+y)$ ile $E(x) + E(y)$ ve $E(x\dot{y})$ ile $E(x)\dot{E}(y)$ değerlerini karşılaştırınız.

Greek Sembolleri

α	A	alpha
	B	beta
γ	Γ	gamma
	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
$\mathbb{Z}eta$	Z	zeta
η	H	eta
θ	Θ	theta
ξ	Ξ	xi
ι	I	iota
κ	K	kappa
	Λ	lambda
μ	M	mu
$\mathbb{N}u$	N	nu
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ, φ	Φ	phi
ψ	Ψ	psi
χ	X	chi
ω	Ω	omega