MAT1011 Analiz I

| Diziler / Okumalık |

Prof.Dr.Faruk Uçar
faruk.ucar@marmara.edu.tr

Veriliş Tarihi: 04/11/2023 Teslim tarihi: –

Stolz-Cesàro Kriteri

Lemma 1 (Stolz-Cesàro, $\frac{\infty}{\infty}$ durumu) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizileri olmak üzere

1. $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \tilde{\mathbb{R}}$.

Bu takdirde $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ vardır ve $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$ dir.

İspat. İlk olarak l nin sonlu olduğu durumu gözönüne alalım. $\varepsilon > 0$ olsun ve N öyle bir doğal sayı olsun ki her $n > N$ için

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gerçeklensin. Bu, $b_{n+1}-b_n > 0$ olduğundan, her $n > N$ için

$$(l-\varepsilon/2)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (l+\varepsilon/2)(b_{n+1}-b_n)$$

biçiminde yazılabilir.

$$\frac{a_n - a_{N+1}}{b_n - b_{N+1}} = \frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N+2}-a_{N+1})}{b_n-b_{N+1}}$$

ifadesinin payında bulunan parantezlerin her birine yukarıdaki eşitsizlikleri uygularsak her $n > N+1$ için

$$\left|\frac{a_n - a_{N+1}}{b_n - b_{N+1}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Dersin Sorumlusu. Faruk Uçar, H.B. Karataş elde edilir. Öte yandan

$$\frac{a_n}{b_n} - l = \frac{a_{N+1} - lb_{N+1}}{b_n} + \left(1 - \frac{b_{N+1}}{b_n}\right)\left(\frac{a_n - a_{N+1}}{b_n - b_{N+1}} - l\right)$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \left|\frac{a_{N+1} - lb_{N+1}}{b_n}\right| + \left|\frac{a_n - a_{N+1}}{b_n - b_{N+1}} - l\right| \tag{2}$$

bulunur. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ olduğundan her $n > N'$ için

$$\left|\frac{a_{N+1} - lb_{N+1}}{b_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

gerçeklenecek biçimde bir $N' \in \mathbb{N}$ vardır. $N'' = \max\{N+1, N'\}$ diyelim. (1)-(3) den, her $n > N''$ için

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon$$

olur. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ çıkar. Şimdi $l = \infty$ durumunu inceleyelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \infty$$

olsun. Her $n > N$ için $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n$ olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Bu, $(a_n)_{n\geq N+1}$ dizisinin arttığı ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ olduğu anlamına gelir. Şimdi yukarıdaki durumu $\frac{b_n}{a_n}$ dizisine uygulayalım ve ardışık iki terimin farkının bölümünün limiti sonlu olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = 0$$

elde edilir. Bu da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ anlamına gelir. □

Not: Lemmanın tersi doğru değildir. Bunu görmek için, $a_n = 3n - (-1)^n$ ve $b_n = 3n + (-1)^n$ dizilerini gözönüne alalım. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ dir ve

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{3 + 2(-1)^n}{3 + 2(-1)^{n+1}}$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ limiti yoktur.

Lemma 2 (Stolz-Cesàro, $\frac{0}{0}$ durumu) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizileri olmak üzere

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,
2. (b_n) kesin azalan,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \tilde{\mathbb{R}}$.

olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ dir.

İspat. Yukarıdakine benzer biçimde ilk olarak l nin sonlu olması durumunu inceleyelim: $\varepsilon > 0$ için,

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for all } n > n_\varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. $b_n - b_{n+1} > 0$ olduğundan her $n > n_\varepsilon$ için

$$(l-\varepsilon/2)\left(b_n - b_{n+1}\right) < a_n - a_{n+1} < (l+\varepsilon/2)\left(b_n - b_{n+1}\right)$$

dir. p pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} = \frac{(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

yazarak, yukarıdaki eşitsizlikleri sağ taraftaki kesrin payında bulunan parantezlerin her birine uygulanırsa $n > n_\varepsilon$,

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. $p \longrightarrow \infty$ iken her $n > n_\varepsilon$ için $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ olur.

Şimdi de $l = \infty$ durumunu inceleyelim: $\operatorname{lím}_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \infty$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > N_\varepsilon$ için $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > 2\varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan her $n > N_\varepsilon$ için $a_n - a_{n+1} > 2\varepsilon\left(b_n - b_{n+1}\right)$bulunur. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere $m > n$ ve $n, m > N_\varepsilon$ olsun. Bu durumda

$$a_n - a_m = \sum_{k=n}^{m-1}\left(a_k - a_{k+1}\right) > 2\varepsilon \sum_{k=n}^{m-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) = 2\varepsilon\left(b_n - b_m\right)$$

olur ve bu eşitsizliğin her iki tarafı $b_n > 0$ ile bölünürse

$$\frac{a_n}{b_n} > 2\varepsilon\left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right) + \frac{a_m}{b_n}.$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $m \to \infty$ için limite geçilirse, her $n > N_\varepsilon$ için $\frac{a_n}{b_n} \geq 2\varepsilon > \varepsilon$ elde edilir.

$l = -\infty$ durumunun incelenmesi de bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. □

Not: Lemmanın tersi doğru değildir. Bunu görmek için, $a_n = \dfrac{1}{3n-(-1)^n}$ ve $b_n = \dfrac{1}{3n+(-1)^n}$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ dir. Öte yandan

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\left(3n+3+(-1)^{n+1}\right)\left(3n+(-1)^n\right)}{\left(3n+3-(-1)^{n+1}\right)\left(3n-(-1)^n\right)} \cdot \frac{-3-2\cdot(-1)^n}{-3+2\cdot(-1)^n}$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ limiti yoktur.

Ancak, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerindeki belirli koşullar altında Stolz-Cesàro Lemması'nın tersinin geçerli olduğunu kanıtlayalım:

Lemma 3 (Stolz-Cesàro Lemması'nın tersi) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizileri olmak üzere

1. $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = L \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$ dir.

İspat:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\left(1-\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) + \frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

biçiminde yazıp daha sonra $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$l = (1-L)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} + l\cdot L$$

olur. Bu lemma, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ varsa ve 1 e eşit değilse, Stolz-Cesàro Lemması'nın tersinin geçerli olduğunu göstermektedir. □

Kaynakça

[1] O. Furdui, Limits, Series, and Fractional Part Integrals: Problems in Mathematical Analysis, Problem Books in Mathematics, DOI 10.1007/978-1-4614-6762-5, Springer Science+Business Media New York 2013