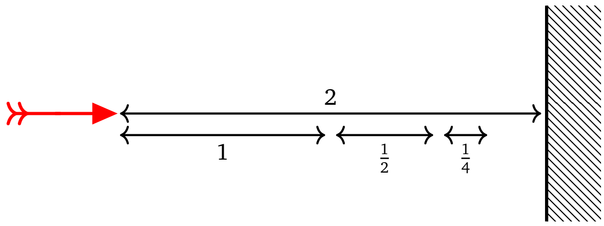
Seriler

Bu bölümde sonsuz sayıda terime sahip toplamlarla ilgileneceğiz. Örneğin, aşağıdaki sonsuz toplamın değeri ne olabilir :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \quad = \ ?$$



Yukarıdaki görsel popüler adıyla ***Zeno'nun paradoksu*** olarak bilinir : Bir ok, 2 metre uzaktaki bir hedefe fırlatılır. Zeno'ya göre ok'un hedefe varmak için önce kat etmesi gereken mesafenin yarısını, daha sonra kalan mesafenin yarısını,... bu şekilde devam ederek kalan mesafenin yarısını kat etmesi gerekmektedir. Böylece sıfır olmayan sürelerden oluşan sonsuz toplamla karşılaşır. Zeno ok'un hedefine asla ulaşmadığı sonucuna varır ! Zeno, sonlu bir zamanda sonsuz sayıda sonlu mesafenin katedilebileceğini düşünmemişti. Bu bölümde sonsuz sayıda terimin toplamının sonlu bir değer olabileceğini göreceğiz.

1. Sonsuz Seriler

Tanım 1.
$(a_k)_{k\geqslant 1}$ reel(veya kompleks) sayıların bir dizisi olsun.

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\sum_k a_k$$

yazılışına a_k genel terimli ***sonsuz seri*** veya kısaca ***seri*** denir. $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ ile üretilen (S_n) dizisine ***kısmi toplamlar dizisi*** denir.

Örnek 1.
$q\in\mathbb{R}$ sabit olsun. $a_k=q^k$ denirse $(S_n)_{n\geqslant 1}$dizisini oluşturalım : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ***geometrik seri***sinin kısmi toplamlar dizisinin terimleri :

$$S_0=1 \qquad S_1=1+q \qquad S_2=1+q+q^2 \qquad \ldots \qquad S_n=1+q+q^2+\cdots+q^n \quad \ldots$$

Tanım 2.
$(S_n)_{n\geqslant 1}$ kısmi toplamlar dizisinin $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) de sonlu bir limiti varsa

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

yazılır. Bu durumda $S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sayısına $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin ***toplamı*** denir ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine ***yakınsaktır*** denir. Yakınsak olmayan serilere ***ıraksaktır*** denir.

Notasyon : Serilerin farklı şekillerde gösterilişleri vardır :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \qquad \sum_{k\geqslant 1} a_k \qquad \sum_{k} a_k.$$

Bazı durumlarda $\sum_{k=1} a_k$, bazı durumlarda ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gösterilişini kullanacağız.

2. Serilerin Toplamı

2.1. Geometrik Seri

Önerme 1.
$q\in\mathbb{R}$ olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ serisi $|q|<1$ için yakınsaktır ve toplamı

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+q^3+\cdots = \frac{1}{1-q}.}$$

İspat : Kısmi toplamlar dizisinin genel terimini gözönüne alalım :

$$S_n = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n.$$

- $q=1$ için $S_n=n+1$ olur ve $n\to+\infty$ iken $S_n\to+\infty$ olduğundan (S_n) kısmi toplamlar dizisi ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri de ıraksaktır.
- $q\neq 1$ olsun. S_n ni $1-q$ ile çarpalım :

  $$(1-q)S_n = (1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n)-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$$

  olur ve buradan

  $$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

  elde edilir. $|q|<1$ için $q^n\to 0$ ve $q^{n+1}\to 0$ olduğundan $(S_n)\to\frac{1}{1-q}$ dir. Bu durumda $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ serisi yakınsaktır.

  $|q|\geqslant 1$ ise (q^n) nin limiti sonlu değildir : Örneğin, $q=2$ için $(q^n)\to+\infty$ olur. $q=1$ için (q^n) dizisi ıraksaktır. $q=-1$ için (q^n) dizisi yakınsak değildir. Sonuç olarak, $|q|\geqslant 1$ için (S_n) yakınsak olmadığından $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ serisi de ıraksaktır.

□

Örnek 2. 1. $q=\frac{1}{2}$ için $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ dir. Bu, Zeno'nun paradoksunun cevabını verirr : Ok gerçekten de duvara ulaşır !

2. $q=\frac{1}{3}$ için :

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{13}{9}=\frac{3}{2}-\frac{13}{9}=\frac{1}{18}$$

olur.

3. Serinin toplamını $k=0$ dan başlatmak geleneksellleşmiştir. Farklı bir çözüm yöntemi aşağıdaki gibi olabilir : $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ ifadesinde $n=k-3$ denirse ;
$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+3}}=\frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{27}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{18}$$
bulunur.

4. $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{4}{5}.$$

Örnek 3.
$q\in\mathbb{R}$ ve $|q|<1$ olsun.
$$\sum_{k=0}^{\infty}kq^k$$
toplamını hesaplayınız.

Çözüm : $|q|<1$ için $\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$ olduğunu biliyoruz. $S=\sum_{k=0}^{\infty}kq^k$ diyelim.
$$\begin{aligned}
S=\sum_{k=0}^{\infty}kq^k&=\sum_{k=1}^{\infty}kq^k=q\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\\
&=q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}+q\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)q^{k-1}\\
&=q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}+q\sum_{m=0}^{\infty}mq^m \qquad m=k-1 \text{ yazılırsa}\\
&=q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}+q\cdot S\\
(1-q)S&=q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}
\end{aligned}$$
$|q|<1$ olduğundan
$$(1-q)S=q\cdot\frac{1}{1-q}\ \Rightarrow S=\sum_{k=0}^{\infty}kq^k=\frac{q}{(1-q)^2}\quad(|q|<1)$$
bulunur. □

2.2. Teleskopik Seri

Hatırlayacak olursa, $\sum_{k=1} a_k$ serisinin yakınsak olması için g.y.k. genel terimi $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ olan $(S_n)_{n\geqslant1}$ kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır. Bu nedenle, serilerin yakınsaklığı ile dizilerin yakınsaklığı birbiri ile doğrudan ilişkilidir. Tersine, $(a_k)_{k\geqslant1}$ dizisini incelemek istiyorsak aşağıdaki sonucu kullanabiliriz :

> **Önerme 2.**
> $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)$$
> *biçimindeki serilere teleskopik seri adı verilir. Teleskopik serinin yakınsak olması için g.y.k. $\ell:=\lim_{n\to\infty}a_n$ limitinin var olmasıdır. Bu durumda :*
> $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)=\ell-a_1.$$

İspat :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) \\ &= (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n) \\ &= -a_1+\cancel{a_2}-\cancel{a_2}+\cancel{a_3}-\cancel{a_3}+\cdots+\cancel{a_n}-\cancel{a_n}+a_{n+1} \\ &= a_{n+1}-a_1 \end{aligned}$$

□

Aşağıdaki örneği inceleyelim :

Örnek 4.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

serisi yakınsak ve toplamı 1 dir. Kısmi toplamlar dizisini oluşturalım :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = 1-\frac{1}{n+2} \to 1 \quad (n\to\infty \text{ için })$$

Uyarı .

Yukarıdaki seride indis değişikliği yapılırak elde edilen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ ve $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}$ serileri de yakınsak ve toplamı 1 dir.

3. Seriler için Yakınsaklık Testleri

Şu ana kadar geometrik seriler ve teleskopik seriler dışında toplamını bildiğimiz çok fazla seri yok. Serilerin toplamını hesaplamak için ilerideki bölümleri ve diğer teknikleri beklememiz gerekecek. Şimdi esas olarak bir seri yakınsak mı yoksa ıraksak mı sorusuna odaklanacağız.

Bir serinin yakınsaması, ilk terimlerine bağlı değildir : Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek ya da çıkarmak serinin yakınsak veya ıraksak olmasını değiştirmez. Öte yandan, eğer seri yakınsaksa, toplamı açıkça değişir.

Bir serinin yakınsamasını incelemenin pratik bir yolu da kalanını incelemektir : $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ yakınsak serisinin ***n. kalan terimi*** :

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$$

ile gösterilir.

Önerme 3.
Bir seri yakınsak ise $S = S_n + R_n$ $(\forall n \geqslant 1)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ dir.

İspat :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}u_k = \sum_{k=0}^{n}u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}u_k = S_n + R_n$$

biçiminde yazılırsa, $n\to\infty$ için $R_n = S - S_n \to S - S = 0$ elde edilir. □

3.1. n. terim Kriteri

Teorem 1.
$\sum\limits_{k}a_k$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Burada kilit nokta, genel terimi kısmi toplamlar dizisinin yardımıyla yazabilmemizdir :

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

İspat : $n \geqslant 1$ olmak üzere kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ i gözönüne alalım. $n \geqslant 1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$. $\sum_k a_k$ serisi yakınsak ise (S_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve serinin toplamı S olduğundan $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dir. (S_n) yakınsak olduğundan (S_{n-1}) de yakınsak ve limiti S dir. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [S_n - S_{n-1}] = S - S = 0$$

yani $(a_n) \to 0$ bulunur. □

Serilerin yakınsaklığı incelenirken bu sonucun tersi oldukça sık kullanılır

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ ise } \sum_k a_k \text{ serisi ıraksaktır.}}$$

Örnek 5. 1. $\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ serileri ıraksaktır.

2. Genel terimi

$$a_k = \begin{cases} 1 & k = 2^\ell,\ \ell \geqslant 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{dd.} \end{cases}$$

ile verilen $\sum_k a_k$ serisi de ıraksaktır.

3.2. Lineerlik

Önerme 4.
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ herhangi iki yakınsak seri ve toplamları sırasıyla A ve B olsun. $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ serisi de yakınsak ve $\lambda A + \mu B$ dir. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

İspat : $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to A \in \mathbb{R}, B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \to B \in \mathbb{R}$ olsun. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k = \lambda A_n + \mu B_n \to \lambda A + \mu B$$

. □

Örnek 6.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{5}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 5\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 5\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{19}{2}\ .$$

3.3. Cauchy Kriteri

Dikkat ! $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ serisi için $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olmasına rağmen $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ ıraksak olabilir. Örneğin

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \text{serisi ıraksaktır.}}$$

Tanım 3.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ serisine ***harmonik seri*** denir.

Serinin ıraksak olduğunu göstermek için Cauchy kriterini kullanacağız.
Hatırlatma : Bir (a_n) reel sayı dizsinin yakınsak olması için g.y.k. Cauchy dizisi olmasıdır :

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall m,n\geqslant n_\varepsilon\qquad |a_n-a_m|<\varepsilon$$

Bunu serilere uygulayacak olursak :

Teorem 2 (Cauchy Kriteri)**.**
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ *serisi yakınsak ise*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall m,n\geqslant n_\varepsilon\qquad \left|a_n+\cdots+a_m\right|<\varepsilon$$

dir veya

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall m,n\geqslant n_\varepsilon\qquad \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon$$

veya

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant n_\varepsilon\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad \left|a_n+\cdots+a_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

İspat : (S_n) kısmi toplamlar dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left|S_m-S_{n-1}\right|=\left|a_n+\cdots+a_m\right|$$

□

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ harmonik serisine geri dönelim : Kısmi topmalar dizsinin genel terimi $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ dir. $\varepsilon=\frac{1}{4}$ olsun.
Her $n\geqslant n_\varepsilon$ için

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$$

olur. O halde, (S_n) Cauchy dizisi değildir. Dolayısıyla yakınsak değildir.

İspatı Cauchy yakınsaklık kriterini kullanmadan kanıtlayalım : $n\to+\infty$ için $S_n\to\ell\in\mathbb{R}$ olsun. $n\to+\infty$ için $S_{2n}\to\ell$ olur. Bu durumda $n\to+\infty$ için $S_{2n}-S_n\to\ell-\ell=0$ bulunur. Bu ise $S_{2n}-S_n\geqslant\frac{1}{2}$ ile çelişir.

Harmonik seriyi daha fazla inceleyelim :

Önerme 5.
$\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{1}{k}$ *harmonik serisinin kısmi toplamlar dizisi* $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *ıraksaktır :* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$.

İspat : $M>0$ olsun.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{16}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$

olduğundan $m \geqslant 2M$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ seçelim. $n \geqslant 2^m$ için :

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{n} \\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right) \\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+\cdots+2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\
&= 1+m\frac{1}{2} \geqslant M
\end{aligned}$$

İşin püf noktası terimleri gruplandırmaktır. Her parantez arasında ard arda $2, 4, 8, \ldots$ terimleri vardır :

$$2^m-(2^{m-1}+1)+1 = 2^m-2^{m-1} = 2^{m-1} \quad \text{terim}$$

Böylece her $M>0$ için bir $n_0 \geqslant 0$ vardır öyle ki her $n \geqslant n_0$ için $S_n \geqslant M$. Bu durumda, $(S_n) \to +\infty$. O halde, harmonik seri ıraksaktır. □

Problem. 1. Genel terimi $\frac{1}{4^k}$ olan serinin kısmi toplam dizisinin genel terimi S_n i bulunuz. Bu seri yakınsak mıdır? Yakınsak ise toplamı S yi ve kalan terimi R_n i hesaplayınız.

2. Yukarıdaki soruyu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty}3^k$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}$, $\sum_{k=2}^{\infty}e^{-k}$ serileri için cevaplayınız.

3. Aşağıdaki seriler neden ıraksaktır?

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+(-1)^k\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}k\cos(k), \quad \sum_{k=1}^{\infty}e^{1/k}$$

.

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ serisinin kısmi toplamlar dizisini bulunuz. Seri yakınsak mıdır?

5. $\sum_{k=0}^{\infty}k^2q^k = \frac{q^2+q}{(1-q)^3}$ olduğunu gösteriniz.

4. Pozitif Terimli Seriler

Pozitif terimli seriler artan diziler gibi davrandığından incelemek daha kolaydır.

4.1. Kısmi toplamlar dizisi ile yakınsaklık

Hatırlatma : $(s_n)_{n\geqslant 1}$ reel sayıların artan bir dizisi olsun.

- (s_n) dizisi üstten sınırlı ise yakınsaktır. O halde, sonlu bir limiti vardır.
- Aksi takdirde $(s_n) \to +\infty$ dur.

Şimdi bunu serilere uygulayalım :

Her k için $a_k \geqslant 0$ olmak üzere *pozitif terimli* $\sum a_k$ serisini gözönüne alalım. Bu duurmda genel terimi $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olan kısmi toplamlar dizisi (S_n) kesin artandır :

$$S_n - S_{n-1} = a_n \geqslant 0.$$

Önerme 6.
Pozitif terimli bir serinin yakınsak olması için g.y.k. kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır. Başka bir deyişle, her $n \geqslant 1$ için $S_n \leqslant M$ olacak biçimde bir $M>0$ sayısının bulunabilmesidir.

Ayrıca, yakınsaklık durumunda serinin toplamı S ise, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ve her n için $S_n \leqslant S$ dir.

4.2. Karşılaştırma Kriterleri

Pozitif terimli bir serinin karakterini belirlemek için genel bir metod var mıdır? Aşağıdaki teorem yardımıyla karakteri daha önceden bilinen seriler ile karşılaştırarak serinin karakteri hakkında birşeyler söylemenin mümkün olduğunu görürüz :

> **Teorem 3** (Karşılaştırma Krtiteri).
> $\sum a_k$ *ve* $\sum b_k$ *pozitif terimli iki seri olsun. Her* $k \geqslant k_0$ *için* $a_k \leqslant b_k$ *olacak biçimde bir* $k_0 \in \mathbb{N}$ *olduğunu varsayalım. Bu durumda*
> - $\sum b_k$ *yakınsak ise* $\sum a_k$ *yakınsaktır,*
> - $\sum a_k$ *ıraksak ise* $\sum b_k$ *ıraksaktır.*

İspat : Daha önce gözlemlediğimiz gibi yakınsama ilk terimlere bağlı değildir. Bu nedenle genelliği bozmaksızın, $k_0 = 1$ alabiliriz. $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ ve $S'_n = b_1 + \cdots + b_n$ diyelim. (S_n) ve (S'_n) dizileri artandır ve ayrıca her $n \geqslant 1$ için $S_n \leqslant S'_n$ dir.
$\sum b_k$ serisi yakınsak ise (S'_n) dizisi yakınsatır ve sonlu bir S' limiti vardır. (S_n) artan ve üstten S' ile sınırlı olduğundan yakınsaktır. O halde, $\sum a_k$ serisi de yakınsaktır. Tersine, $\sum a_k$ serisi ıraksak ise $(S_n) \to +\infty$ olur ve (S'_n) dizisi de ıraksak olur. Bu nedenle, $\sum b_k$ serisi de ıraksak olur. □

4.3. Örnekler

Örnek 7.
Örnek 4 te
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
serisinin yakınsak olduğunu görtermiştik. Bunu kullanarak
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$
serisinin yakınsak olduğunu gösterelim.
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}$$
olduğundan, $k \geqslant k_0$ için
$$\frac{1}{2k^2} \leqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
olacak biçimde bir k_0 vardır. Aslında bu eşitsizlik $k \geqslant 4$ için doğrudur. Ancak k_0 sayısını tam olarak belirlemek gereksizdir. Çünkü lineerlik özelliğinden $\frac{1}{2k^2}$ serisinin yakınsaklığı kolayca görülür.

Örnek 8.
Bir diğer önemli seri *üstel seri* dir :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{yakınsak}}$$
$k \geqslant 2$ için $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ olduğundan indis değişimiyle elde edilen $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ serisi yakınsaktır.
O halde, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ üstel serisi de yakınsaktır. Tanımdan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ serisinin toplamı $e = \exp(1)$ dir.

Örnek 9.
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisinin ıraksak olduğunu biliyoruz. Bunun yardımıyla $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ serileri de ıraksaktır.
Gerçel bir sayının ondalık açılımını içeren ilginç bir örnek ile bitirelim :

Örnek 10.
$(a_k)_{k\geqslant 1}$ elemanları 0 ve 9 arasındaki rakamlar olan bir sayı dizisi olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$$

serisi yakınsaktır. Gerçekten, $b_k=\dfrac{a_k}{10^k}$ olsun. $b_k\leqslant\dfrac{9}{10^k}$ dır. Öte yandan, $\dfrac{1}{10}<1$ olduğundan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}$ geometrik serisi yakınsaktır. Sonuç olarak lineerlik özelliğinden, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}$ serisi de yakınsaktır.

Dikkat! $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$ serisi $0\leqslant x\leqslant 1$ olmak üzere x sayısının ondalık açılımıdır.
Örneğin, her k için $a_k=3$ olsun :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots=0,3+0,03+0,003+\cdots=0,333\ldots=\frac{1}{3}$$

Aynı sonucu geometrik seri kullanılarak bulunabilir :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}=\frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

4.4. Denklik (Eşdeğerlik) Kriteri

Eşdeğer diziler kavramıyla karşılaştırma teoremini geliştirebiliriz. Bunun için aşağıdaki tanımı verelim :

Tanım 4.
(a_n) ve (b_n) ***kesin pozitif*** terimli diziler olsun.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

ise (a_n) ve (b_n) dizilerine ***denktir (eşdeğerdir)*** denir ve

$$a_n\sim b_n$$

yazılır.

Teorem 4 (Denklik Teoremi).
(a_n) ve (b_n) kesin pozitif terimli diziler olsun. $a_n\sim b_n$ ise $\sum_k a_n$ ve $\sum_k b_n$ serileri aynı karakterdedir.

Diğer bir ifadeyle, diziler denk ise serilerin her ikisi de yakınsak veya ıraksaktır. Yakınsaklık durumunda, her iksinin toplamının eşit olması gerekmez. Son olarak, dizilerin her ikisi de kesin negatif ise teorem yine geçerlidir.

İspat : Varsayımdan, her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir n_ε sayısı her $n\geqslant n_\varepsilon$ için

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right|<\varepsilon,$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Bu eşitsizlik

$$(1-\varepsilon)b_n<a_n<(1+\varepsilon)b_n$$

biçiminde yazılabilir. $\varepsilon<1$ sabit olsun. $\sum a_n$ yakınsak ise Teorem 3 karşılaştırma kriterinden $\sum(1-\varepsilon)b_n$ yakınsaktır ve lineerlik özelliğinden $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır. $\sum a_n$ ıraksak ise $\sum(1+\varepsilon)b_n$ ve $\sum b_n$ ıraksaktır. □

Yukarıdaki teoremin uygulamasına bakalım : Genel terimleri $\dfrac{1}{n^2}$ ve $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n^2+3n+2}$ olan diziler denk dizilerdir. $\displaystyle\sum_n\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (Örnek 4) serisi yakınsak olduğundan $\displaystyle\sum_n\frac{1}{n^2}$ serisi de yakınsaktır.

4.5. Örnekler

Örnek 11.

$$\sum_k \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4} \qquad \text{ve} \qquad \sum_k \frac{k+\ln(k)}{k^3}$$

serileri yakınsaktır. Her iki serinin genel terimi $\frac{1}{k^2}$ ile eşdeğerdir. $\sum_k \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan verilen seriler de yakınsaktır.

Örnek 12.

$$\sum \frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4} \qquad \text{ve} \qquad \sum \frac{k+\ln(k)}{k^2}$$

serileri ıraksaktır. Her iki serinin genel terimi $\frac{1}{k}$ ile eşdeğerdir. $\sum_k \frac{1}{k}$ serisi ıraksak olduğundan verilen seriler de ıraksaktır.

Aşağıdaki ilginç örneği inceleyelim :

Örnek 13.

$$\sum_{k\geqslant 1} \ln\big(\operatorname{th} k\big)$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Genel teriminin eşdeğerini bulmaya çalışalım :

- $k>0$ için $0<\operatorname{th} k<1$ dir.
- $\operatorname{th} k$ yı üstel fonksiyon cinsinden yazalım :

$$\operatorname{th} k = \frac{\operatorname{sh} k}{\operatorname{ch} k} = \frac{e^k-e^{-k}}{e^k+e^{-k}} = 1+\frac{-2e^{-k}}{e^k+e^{-k}} = 1+\frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ olduğundan $a_k \to 0$ için $\ln(1+a_k) \sim a_k$ dir. Buradan

$$\ln(\operatorname{th} k) = \ln\left(1+\frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}}\right) \sim \frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}} \sim -2e^{-2k}$$

  olur.
- $\frac{1}{e^2}<1$ için $\sum e^{-2k} = \sum (e^{-2})^k$ geometrik serisi yakınsaktır.
- Genel terimi $\ln(\operatorname{th} k)$ ve $-2e^{-2k}$ olan diziler kesin negatif terimli dizilerdir ve $\ln(\operatorname{th} k) \sim -2e^{-2k}$ dir. Teorem 4 den $\sum -2e^{-2k}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum \ln(\operatorname{th} k)$ serisi de yakınsaktır. Benzer biçimde $-\ln(\operatorname{th} k)$ ve $2e^{-2k}$ kesin pozitif terimli serilere de uygulanabilir.

Problem. 1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^\alpha}{k^3}$ serisinin her $\alpha \in \mathbb{R}$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

2. Pozitif terimli $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ serisinin de yakınsak olduğunu gösteriniz.

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ kesin pozitif terimli seriler olmak üzere $k \geqslant 0$ için $0<m\leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant M$ olsun. Her iki serinin de aynı karakterde olduğunu gösteriniz.

4. Karşılaştırma kriteri veya denklik kriterini kullanarak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ serisinin karakterini inceleyiniz. Aynı şekilde aşağıdaki genel terimi verilen serilerin karakterini belirleyiniz :

$$\sin\left(\frac{1}{(k-1)(k+1)}\right), \quad \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}, \quad \ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}}\right)$$

5. Ondalık açılımı $0,99999\ldots$ olan seriyi yazınız. Bu serinin toplamı S ise $10\cdot S - S$ yi oluşturarak, geometrik seri yardımıyla S yi hesaplayınız.

6. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. $\frac{1}{k^2-1}$ ifadesini basit kesirlerine ayırarak S_n i belirleyiniz.

Bunun yardımıyla, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$ olduğunu gösteriniz.

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$ olduğu biliniyor. Aşağıdaki serilerin toplamını bulunuz :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!}$$

5. Alterne Seriler

Bu bölümde Alterne Seriler ile ilgileneceğiz. İlk olarak alterne serinin tanımını verelim :

Tanım 5.
$a_k \geqslant 0$ olmak üzere (a_k) dizisini gözönüne alalım. $\displaystyle\sum_k(-1)^k a_k$ serisine *Alterne Seri* denir.

5.1. Leibniz Kriteri

Alterne serilerin yakınsaklığını göstermeye yarayan aşağıdaki kriteri verelim :

Teorem 5 (Leibniz Kriteri)**.**
$(a_k)_{k\geqslant 0}$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dizi olsun :

1. *Her $k \geqslant 0$ için $a_k \geqslant 0$,*
2. *(a_k) dizisi azalan,*
3. *$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Bu durumda $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ serisi yakınsaktır.

İspat : Eş diziler tanımından faydalanacağız :
- (S_{2n+1}) dizisi artandır : $S_{2n+1}-S_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n+1}\geqslant 0$.
- (S_{2n}) dizisi azalandır : $S_{2n}-S_{2n-2}=a_{2n}-a_{2n-1}\leqslant 0$.
- $S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}\leqslant 0$ olduğundan $S_{2n}\geqslant S_{2n+1}$ dir.
- Sonuç olarak $n\to\infty$ için $S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}\to 0$ olduğundan $(S_{2n+1}-S_{2n})\to 0$ dır.

Böylece (S_{2n+1}) ve (S_{2n}) dizileri yakınsaktır ve aynı S limitine yakınsar. O halde, (S_n) yakınsak ve limiti S dir. Ayrıca her n için $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ dir. Buradan

$$0\geqslant R_{2n}=S-S_{2n}\geqslant S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}$$

ve

$$0\leqslant R_{2n+1}=S-S_{2n+1}\leqslant S_{2n+2}-S_{2n+1}=u_{2n+2}$$

olduğundan, n ne olursa olsun $|R_n|=|S-S_n|\leqslant u_{n+1}$ bulunur. □

Örnek 14.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

*Alterne Harmonik seri*si yakınsaktır. Gerçekten, $a_k=\dfrac{1}{k+1}$ için

1. $a_k\geqslant 0$,
2. (a_k) azalan,
3. (a_k) dizisi 0 a yakınsar.

Alterne seriler için Leibniz krtiterinden (Teorem 5), $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$ Alterne Harmonik serisi yakınsaktır.

Leibniz kriteri yalnızca $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ serisinin yakınsaklığını ispatlamakla kalmaz, ayrıca bize toplam için üst sınır ve kalan terimin artanlığı gibi iki ek önemli sonucu da verir :

Sonuç 1.
$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ *alterne serisi Teorem 5 in koşullarını sağlasın. Serinin toplamı S ve kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun.*

1. *Serinin toplamı S aşağıdakileri sağlar :*
$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant S \leqslant \cdots \leqslant S_{2n} \leqslant \cdots \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$
2. *Ayrıca $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ kalan terimi için*
$$|R_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Örnek 15.
Örneğin, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ alterne harmonik serisi yakınsaktır. Toplamını S ile gösterelim. Kısmi toplamı

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1,\\
S_1 &= 1 - \frac{1}{2},\\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\\
S_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\\
S_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Böylece
$$1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant S \leqslant \cdots \leqslant S_{2n} \leqslant \cdots \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leqslant 1$$
olduğu kolayca görülür. Özel olarak birkaç toplamı hesaplayalım :
$$S_3 = \frac{35}{60} \simeq 0,58333\ldots \leqslant S \leqslant S_4 = \frac{47}{60} \simeq 0,78333\ldots$$
ve $n = 200$ için
$$S_{201} \simeq 0,69067\ldots \leqslant S \leqslant S_{200} \simeq 0,69562\ldots$$
elde edilir. Buradan yaklaşık olarak $S \simeq 0,69\ldots$ olduğu görülür. Ek olarak, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ eşitsizliği yardımıyla S ile S_{200} arasındaki hata payının $|S - S_{200}| = |R_{200}| \leqslant u_{201} = \frac{1}{202} < 5 \cdot 10^{-3}$ olduğu görülür. Aslında daha sonra göreceğiz ki $S = \ln 2 \simeq 0,69314\ldots$ dir.

5.2. Ters Örnek

Aşağıdaki iki uyarıya dikka ediniz :

1. Leibniz kriterinde (a_k) dizisinin azalanlığından vazgeçilemez,
2. Teorem 5 de a_k eşdeğer bir dizi ile değiştirilemez.

Örnek 16.
Aşağıdaki alterne serileri gözönüne alalım :
$$\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{yakınsak,} \qquad \sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} \quad \text{ıraksak}$$

1. Teorem 5 i uygulayalım : $(a_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ dizisi pozitif terimli azalan bir dizidir. $(a_k) \to 0$ olduğundan $\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ alterne serisi yakınsaktır.

2.
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} = a_k.$$
Ancak ; $(b_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k}\right)$ dizisi $k \geqslant 2$ için pozitif terimli ve 0 a yakınsamasına rağmen azalan değildir. Bu nedenle Leibniz kriteri uygulanamaz.

$\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ serisinin ıraksak olduğunu kanıtlayalım :
$$(-1)^k a_k - (-1)^k b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} = (-1)^k \frac{\sqrt{k}+(-1)^k-\sqrt{k}}{k+(-1)^k\sqrt{k}} = \frac{1}{k+(-1)^k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$$
dır. Böylece $c_k = (-1)^k a_k - (-1)^k b_k$ genel terimli seri ıraksaktır. Çünkü genel terimi ıraksak olan $\sum \frac{1}{k}$ harmonik serisine denktir.

$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k b_k$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k a_k$ serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla toplamın doğrusallığından $\sum_{k\geqslant 2} c_k = \sum_{k\geqslant 2}(-1)^k a_k - \sum_{k\geqslant 2}(-1)^k b_k$ serisi de yakınsak olacaktır. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak $\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ serisi ıraksaktır.

Problem. 1. Aşağıdaki seriler için Leibniz kriteri uygulanabilir mi ?
$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\ln k} \qquad \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\frac{k+1}{k}} \qquad \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{(-1)^{k+1}(\sqrt{k}-\ln k)}$$
$$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) \qquad \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k \ln k} \qquad \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{3k+(-1)^k}$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi S_n n nin hangi değeri için serinin toplamı S ye $0,1$ ve $0,001$ hata ile yakınsar ? Aynı soruyu $\frac{(-1)^k}{2^k}$; $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$; $\frac{(-1)^k}{k!}$ için cevaplayınız.

6. Mutlak Yakınsak Seriler – d'Alembert Kriteri

6.1. Mutlak Yakınsaklık

Tanım 6.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ reel (veya kompleks) terimli seri olsun.

Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine ***mutlak yakınsak***tır denir.

Örnek 17.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$ serisi mutlak yakınsaktır. $a_k = \frac{\cos k}{k^2}$ için $|a_k| \leqslant \frac{1}{k^2}$ dir. $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundnan $\sum_{k\geqslant 1} |a_k|$ serisi mutlak yakınsaktır.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ Alterne harmonik serisi mutlak yakınsaktır. Ancak $b_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ serisi ıraksaktır.

Alterne harmonik seri gibi kendisi yakınsak olan fakat mutlak yakınsak olmayan serilere ***yarı-yakınsak*** seri denir.

Mutlak yakınsaklık yakınsaklıktan daha güçlüdür :

Teorem 6.
Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

İspat : $\sum a_k$ mutlak yakınsak bir seri olsun. $\sum |a_k|$ yakınsaktır, $R'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ toplamı 0 a yakınsadığından (R'_n) kalan dizisi Cauchy dizisidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde her $n \geqslant n_0$ için $p \geqslant 0$ olmak üzere

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

gerçeklenecek biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle $n \geqslant n_0$ ve $p \geqslant 0$ için :

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| \leqslant |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cauchy yakınsaklık kriterinden (Teorem 2) $\sum a_k$ serisi yakınsaktır. □

6.2. d'Alembert Oran Kriteri

d'Alembert oran kriteri, reel (veya karmaşık) sayılardan oluşan bir serinin yakınsaklığını incelemek için en etkili yollardan biridir.

Teorem 7 (d'Alembert Kriteri)**.**
$\sum a_k$ genel terimi sıfırdan farklı olan reel (veya karmaşık) terimli bir seri olsun.

1. *$0 < q < 1$ olmak üzere her $k \geqslant k_0$ için,*
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q < 1$$
gerçeklenecek biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\sum a_k$ serisi mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır.
2. *Her $k \geqslant k_0$ için,*
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant 1$$
gerçeklenecek biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

Uygulamada serinin karakterini incelemek için $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ dizisinin yakınsaklığı incelenir. d'Alembert Kriterinin reel ve pozitif terimli seriler için en sık kullanılan uygulaması aşağıdaki sonuç ile verelim :

İspat : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ geometrik serisinin $|q| < 1$ için yakınsak, $|q| \geqslant 1$ için ıraksak olduğunu hatırlayalım. Hipotezin ilk kısmından

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q \Rightarrow |a_{k_0+1}| \leqslant |a_{k_0}|q \Rightarrow |a_{k_0+2}| \leqslant |a_{k_0}|q^2$$

bulunur. Buradan $k \geqslant k_0$ için, c bir sabit olmak üzere :

$$|a_k| \leqslant |a_{k_0}|q^{-k_0} \cdot q^k = c \cdot q^k$$

olur. $0 < q < 1$ olduğundan $\sum q^k$ serisi yakınsaktır. Sonuç olarak, Teorem 3 den $\sum |a_k|$ serisi yakınsaktır.

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant 1$ ise $(|a_k|)$ dizisi artandır ve bu nedenle 0 a yakınsamaz. Teorem 1 den $\sum a_k$ serisi ıraksaktır. □

Sonuç 2 (d'Alembert Oran Kriteri)**.**

$a_k > 0$ olmak üzere $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

olsun.

1. *$\ell < 1$ ise $\sum a_k$ yakınsak,*
2. *$\ell > 1$ ise $\sum a_k$ ıraksak,*
3. *$\ell = 1$ birşey söylenemez.*

Örnek 18. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$ serisini gözönüne alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ serisini gözönüne alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = 4 > 1$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

Uyarı (Önemli)**.** 1. Yukarıdaki kriter, daha sonra göreceğimiz, Cauchy kök kriterinin aksine bazı a_k terimleri sıfır ise uygulanamaz.

2. Teoremin her zaman bir sonuca götürmediğini unutmayın. Ayrıca varsayımın $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant q < 1$ olmasına dikkat edin, bu $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ den daha güçlüdür.

3. Benzer biçimde $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ da sonuç vermez. Örneğin, $\sum a_k = \sum \frac{1}{k}$ ve $\sum b_k = \sum \frac{1}{k^2}$ serilerini gözönüne alalım.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \to 1$$

ve

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$$

dir. Ancak biliyoruz ki $\sum \frac{1}{k}$ serisi ıraksak, $\sum \frac{1}{k^2}$ serisi yakınsaktır.

Daha karmaşık bir örnekle bitirelim :

Örnek 19.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{k\geqslant 0} \binom{k}{3} x^k$ serisi mutlak yakınsaktır.

$a_k = \binom{k}{3}x^k$ için $x \neq 0$ ise $k \to \infty$ için

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\binom{k+1}{3}|x|^{k+1}}{\binom{k}{3}|x|^k} = \frac{\frac{(k+1)k(k-1)}{3!}}{\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}}|x| = \frac{k+1}{k-2}|x| \to |x|$$

dir.

$|x| < 1$ ise yeterince büyük k için $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q < 1$ olur ve $\sum_k a_k$ serisi mutlak yakınsaktır.

$|x| \geqslant 1$ ise yeterince büyük k için $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \dfrac{k+1}{k-2}|x| \geqslant \dfrac{k+1}{k-2} > 1$ olur ve $\sum_k a_k$ serisi ıraksaktır.

6.3. Cauchy Kök Kriteri

Teorem 8 (Cauchy Kök Kriteri)**.**
$\sum a_k$ reel (veya kompleks) terimli bir seri olsun.

1. *Eğer $0 < q < 1$ olacak biçimde bir q sabiti ve her $k \geqslant k_0$ için*
$$\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant q < 1$$
gerçeklenecek biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\sum |a_k|$ serisi yakınsaktır. Bu durumda $\sum a_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir.
2. *Her $k \geqslant k_0$ için*
$$\sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 1$$
ise $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

Pozitif terimli seriler uygulanan aşağıdaki sonucu verelim :

Sonuç 3 (Cauchy Kök Kriteri)**.**
$\sum_n a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ olsun.

1. *Eğer $\ell < 1$ ise $\sum_n a_n$ serisi yakınsaktır,*
2. *Eğer $\ell > 1$ ise $\sum_n a_n$ serisi ıraksaktır,*
3. *Eğer $\ell = 1$ ise birşey söylenemez.*

Uygulamada, n-inci kök ile ilgilenirken

$$\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\tfrac{1}{n}\ln a_n\right)$$

gösterilişinden de faydalanılır.

İspat : Serinin karakterinin ilk terimlerine bağlı olmadığını unutmayalım. İlk durumda, $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q \Rightarrow |a_n| \leqslant q^n$ anlamına gelir. $0 < q < 1$ olduğundan, $\sum_n q^n$ serisi yakınsar, dolayısıyla sonuç Teorem 3 ile elde edilir.

İkinci durumda, $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$, yani $|a_n| \geqslant 1$. Bu durumda genel terimin limiti 0 dan farklıdır, bu nedenle seri ıraksar.
Son olarak, $\ell = 1$ durumu için : $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ olsun. Hem $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ hem de $\sqrt[n]{b_n} \to 1$ dir. Ancak $\sum_n \dfrac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak iken $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır. □

Örnek 20. 1. $\sum_n \left(\dfrac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ serisiinin karakterini inceleyiniz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{3n+4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3} < 1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

2. $\alpha > 0$ için $\sum_n \dfrac{2^n}{n^\alpha}$ serisi ıraksaktır. Gerçekten ;

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp(\frac{1}{n}\ln n)\right)^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1.$$

Örnek 21.
$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ serisi $x \in \mathbb{R}$ in hangi değerleri için mutlak yakınsaktır?

Çözüm : $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ diyelim.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| \to e|x|$$

olur. $e|x| < 1$ yani $|x| < \frac{1}{e}$ için verilen seri yakınsaktır.

- Eğer $|x| < \frac{1}{e}$ ise $\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.
- Eğer $|x| > \frac{1}{e}$ ise yeterince büyük n ler için $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ dir ve $\sum_n a_n$ serisi ıraksaktır.
- Eğer $|x| = \frac{1}{e}$ ise Cauchy kök kriteri cevap vermez. Genel terimi inceleyelim :

$$|a_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\ln|a_n| &= n^2\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) + n\ln\tfrac{1}{e} \\
&= n\left[n\ln(1+\tfrac{1}{n}) - 1\right] \\
&= n\left[n\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] \\
&= n\left[1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right] \\
&= -\tfrac{1}{2} + o(1) \\
&\to -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur. O halde, $|a_n| \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ bulunur. Sonuç olarak $\sum_n |a_n|$ serisi ıraksaktır..

□

6.4. D'Alembert Oran Kriteri mi Cauchy Kök Kriteri mi ?

Bu bölümde d'Alembert Oran Kriteri ile Cauchy Kök kriterini karşılaştıracağız. Cauchy Kök kriterinin d'Alembert Oran kriterinden daha güçlü olduğunu göreceğiz. Bununla birlikte, uygulamada, d'Alembert Oran kriteri en yaygın kullanılan kriter olduğunu da vurgulamadan geçmeyelim.

Önerme 7.
(a_n) kesin pozitif terimli bir dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell\ .$$

Başka bir ifadeyle, eğer d'Alembert Oran kriteri uygulanabiliyorsa Cauchy Kök kriteri de uygulanabilir.

İspat : Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle her $n \geqslant n_0$ için

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$$

dir. Buradan

$$a_{n_0}(\ell-\varepsilon)^{n-n_0} \leqslant a_n \leqslant a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^{n-n_0}\ .$$

veya

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n_0}(\ell-\varepsilon)^{n-n_0}} = \ell - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^{n-n_0}} = \ell + \varepsilon\ .$$

Yani öyle bir $n_1 > n_0$ vardır ki, $n > n_1$ için,

$$\ell - 2\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + 2\varepsilon\ ,$$

olur. Bu ise istenendir. □

6.5. Raabe-Duhamel Kriteri

D'Alembert Oran kriteri ile Cauchy Kök kriteri Riemann serileri için cevap vermez. Çünkü

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$$

Riemann serisi için $\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\to 1$ ve $\sqrt[n]{a_n}\to 1$ dir.

Teorem 9 (Raabe-Duhamel Kriteri)**.**
(a_n) hepsi sıfır olmayan reel sayılardan oluşan bir dizi olsun. Bu durumda

1. *Eğer her $n\geqslant n_0$ için $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant 1-\frac{\beta}{n}$, $\beta>1$ ise $\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.*
2. *Eğer her $n\geqslant n_0$ için $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant 1-\frac{1}{n}$, ise $\sum_n a_n$ serisi mutlak yakınsak değildir.*

Dikkat! $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant 1-\frac{1}{n}$ iken yakınsak seriler vardır. Ancak mutlak yakınsak değillerdir.
Örneğin; $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ alalım. Bu durumda

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\geqslant 1-\frac{1}{n}.$$

İspat : 1. Hipotezden her $n\geqslant n_0$ için $n|a_{n+1}|\leqslant n|a_n|-\beta|a_n|$ dir. Bu nedenle

$$(\beta-1)|a_n|\leqslant(n-1)|a_n|-n|a_{n+1}|$$

olur. $\beta>1$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikten $(n-1)|a_n|-n|a_{n+1}|>0\Rightarrow(n-1)|a_n|>n|a_{n+1}|$ olur. $(n|a_{n+1}|)_{n\geqslant n_0}$ dizisi azalandır ve limiti 0 dır. Dolayısıyla $\sum_n\big[(n-1)|a_n|-n|a_{n+1}|\big]$ teleskopik serisi yakınsaktır.

$$(\beta-1)|a_n|\leqslant(n-1)|a_n|-n|a_{n+1}|$$

olduğundan, $\sum_n(\beta-1)|a_n|$ serisi yakınsak ve dolayısıyla $\sum_n|a_n|$ serisi de yakınsaktır.

2. Hipotezden her $n\geqslant n_0$ için $n|a_{n+1}|\geqslant(n-1)|a_n|>0$ olur. Bu durumda $(n|a_{n+1}|)_{n\geqslant n_0}$ artan olduğundan $n|a_{n+1}|\geqslant\varepsilon>0$ yazılabilir. Buradan her $n\geqslant n_0$ için $|a_{n+1}|\geqslant\frac{\varepsilon}{n}$ olur. O halde, $\sum_n|a_n|$ ıraksaktır ve bu nedenle de $\sum_n\frac{1}{n}$ serisi de ıraksaktır.

□

Önerme 8 (Riemann Serisi)**.**
$\alpha>0$ olsun. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ serisi ancak ve ancak $\alpha>1$ ise yakınsaktır.

İspat : $\alpha>1$ olsun. $\Delta(n):=\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$ diyelim. Şimdi $\beta>1$ olmak üzere her $n\geqslant n_0$ için

$$\Delta(n)\leqslant 1-\frac{\beta}{n}$$

gerçeklenecek biçimde bir $n_0\in\mathbb{N}$ var olduğunu gösterelim. $1<\beta<\alpha$ olacak biçimde bir β seçelim. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^\alpha}+\beta x$ fonksiyonunu gözönüne alalım. f fonksiyonu $[0,\infty[$ aralığında sürekli ve her mertebeden türevlidir. Ayrıca $f(0)=1$ dir. Buradan $f'(0)=\beta-\alpha<0$ olduğundan $0<x_0<1$ olmak üzere $[0,x_0]$ aralığında f azalan bir fonksiyondur. Yani $[0,x_0]$ üzerinde $f(x)\leqslant 1$ dir ve bu nedenle de $\frac{1}{n_0}\leqslant x_0$ gerçekleyen n_0 tamsayısı için $\Delta(n)+\frac{1}{n}=f(\frac{1}{n})\leqslant 1$ dir. Dolayısıyla $\Delta(n)\leqslant 1-\frac{\beta}{n}$ ve Raabe-Duhamel kkriterinden $\sum_n\frac{1}{n^\alpha}$ yakınsaktır.

Eğer $0<\alpha\leqslant 1$ ise $\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^\alpha}$ dir. Karşılaştırma kriteriyle $\sum_n\frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan dolayısıyla $\sum_n\frac{1}{n^\alpha}$ serisi de ıraksaktır. □

Problem. 1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığı ile mutlak yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{n^3} e^{in}}{n^2+n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n \ln n}$$

2. d'Alembert Oran kriteri veya Cauchy Kök kriterini kullanarak aşağıda genel terimi verilen serilerin yakınsaklığını inceleyiniz :

$$\frac{n^{100}}{n!} \qquad \frac{n!}{(2n)!} \qquad \frac{\ln n}{2^n+1} \qquad \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n^n}$$

$$\left(\sin\tfrac{1}{n}\right)^n \qquad \left(\frac{7n-2}{3n+1}\right)^n \qquad \frac{2^n}{e^n-1}$$

3. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ için d'Alembert Oran kriterini uygulayın ve $n\to\infty$ için $\sqrt[n]{a_n}$ değerini bulunuz.

4. Aşağıdaki ifadeleri $\alpha > 0$ parametresinin bir fonksiyonu olarak inceleyiniz :

$$\frac{k}{k^\alpha+1} \qquad \frac{\ln k}{k^\alpha} \qquad \sqrt{k}\alpha^k \qquad \frac{\alpha^k}{k^2} \qquad \ln(1+k^\alpha)$$