Analiz I Ders Notları

Prof.Dr.Faruk UÇAR

Marmara Üniversitesi

2023-2024 Güz yarıyılı

MAT1011

ANALIZ I

Matematik Bölümü
İstanbul

Son Güncelleme Tarihi ve Saati: 2023-11-05 23:18:06

İçindekiler

§ 1

Diziler

1.1 Dizinin Tanımı

Tanım 1.1 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan fonksiyonlara *dizi* denir.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. a_n ifadesine dizinin *genel terimi* denir ve genel terimi a_n olan dizi

$$(a_n), \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ya da } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

biçiminde gösterilir. (a_n) reel sayı dizisinin görüntü kümesi $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ ile verilir.

Örnek 1.1

i) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n) = 1$ sabit fonksiyonu bir dizidir. $(a_n) = \{1, 1, 1, ...\}$ dir.

ii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n) = (-1)^n$ fonksiyonu bir dizidir. $(a_n) = \{-1, +1, -1, ...\}$ dir.

iii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n) = n$ fonksiyonu bir dizidir. $(a_n) = \{1, 2, 3, ...\}$ dir.

iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_n = f(n) = \dfrac{1}{n}$ fonksiyonu bir dizidir. $(a_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ dir.

Uyarı 1 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^x$ bir fonksiyon değildir.

Tanım 1.2 Tüm terimleri sabit bir reel sayı olan bir diziye *sabit dizi* denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = c$ ise $(a_n) = (c)$ dizisi sabit dizidir.

Tanım 1.3 Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine *eşit dizi* denir ve $(a_n) = (b_n)$ yazılır.

Örnek 1.2

a) $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ve $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ dizileri her $n \in \mathbb{N}$ için eşittir, bu nedenle $(a_n) = (b_n)$ dir.

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ve $b_n = (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-100) + \frac{n}{n+1}$ genel terimli dizilerin ilk 100 terimi birbirine eşittir ve 101. terimden sonraki terimleri farklıdır. Bu nedenle $(a_n) \neq (b_n)$ dir.

Bazen bir (a_n) dizisi, bir indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlanır:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \; (\forall n \geq 1)$$

bağınıtsıyla tanımlanan (a_n) dizisinin genel terimi:

$$a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{a_2}{1+a_2} = \frac{1}{3}, \ldots$$

ve tümevarımla $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ elde edilir.

Tanım 1.4 $a_1 = a$ olmak üzere $a_{n+1} = a_n + d$, $(\forall n \geq 1)$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisine aritmetik dizi denir. Aritmetik dizinin genel terimi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad (\forall n \geq 1)$$

ve ilk n-terim toplamı

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n+1)d\right]$$

ile verilir.

Tanım 1.5 $a_1 = a$ olmak üzere $a_{n+1} = r \cdot a_n$, $(\forall n \geq 1)$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisine geometrik dizi denir. Geometrik dizinin genel terimi

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad (\forall n \geq 1)$$

ve ilk n-terim toplamı

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

ile verilir.

Tanım 1.6 $a_1 = a$ olmak üzere $a_{n+1} = ra_n + d$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisinin genel terimi $r \neq 1$ için

$$a_n = a_1 r^{n-1} + d\frac{1-r^{n-1}}{1-r} = \frac{d}{1-r} + \left(a - \frac{d}{1-r}\right) r^{n-1}$$

ve $r = 1$ için

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

dir.

Sonuç 1.1 $r \neq 1$ olsun. $a_{n+1} = ra_n + d$ dizisinin her a_1 için yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $|r| < 1$ olmasıdır. Bu durumda,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{d}{1-r}.$$

(İspatı yakınsaklık kavramını verdikten sonra yapılacaktır.)

Örnek 1.3 $\left(a_n\right)$ dizisi $a_1 = 4$ ve $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ indirgeme bağıntısı ile verilsin. $\left(a_n\right)$ dizisinin genel terimi $a_n = -\frac{1}{2^{n-2}} + 6$, $\ n \in \mathbb{N}$ dir.

Sonuç 1.2 – Dikkat: Yukarıdaki indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisi; $r = 1$ için aritmetik diziye, $d = 0$ için geometrik diziye indirgenir.

Tanım 1.7 $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ olmak üzere $x_{n+1} = (1+q)x_n - qx_{n-1}$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(x_n\right)$ dizisinin genel terimi $q \neq 1$ için

$$x_n = \frac{a_2 - qa_1}{1-q} + \frac{a_1 - a_2}{1-q}q^n, \quad n \geqslant 2$$

ve $q = 1$ için

$$x_n = a_1 + n\left(a_2 - a_1\right)$$

dir.

Sonuç 1.3 Yukarıdaki indirgeme bağıntısı ile verilen (x_n) dizisi her $\left(a_1, a_2\right)$ çifti için $|q| < 1$ iken yakınsaktır:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a_2 - qa_1}{1-q}.$$

(İspatı yakınsaklık kavramını verdikten sonra yapılacaktır.)

Tanım 1.8 $A, B \neq 0$ sabitler olmak üzere sabit katsayılı ikinci mertebeden homojen indirgemeli diziler

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} \quad (\forall n \geq N)$$

bağıntısı ile verilir. $t \neq 0$ için $a_n = t^n$, $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ bağıntısının bir çözümü ise

$$t^n = At^{n-1} + Bt^{n-2} \quad (\forall n \geq 2)$$

dir. $n = 2$ ise $t^2 = At + B$ veya $t^2 - At - B = 0$ elde edilir. Bu denkleme $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ bağıntısının *"karakteristik denklemi"* denir.

Teorem 1.1 A, B sabitler ve $B \neq 0$ olmak üzere $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ indirgeme bağıntısını gözönüne alalım. Karakteristik denklemi $t^2 - At - B = 0$ olsun.

a) Karakteristik denklemin r_1 ve r_2 gibi *iki farklı reel kökü* varsa, genel çzüm

$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n.$$

b) Karakteristik denklemin r_1 gibi *çift katlı kökü* varsa, genel çzüm

$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot n \cdot r_1^n.$$

Her iki durumda da C ve D sabitleri başlangıç koşulundan bulunur.

Teorem 1.2 $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, (n-k)$ sabitler ve $A_{n-k} \neq 0$ olmak üzere

$$a_n = A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \cdots + A_{n-k} a_{n-k}$$

indirgeme bağıntısını gözönüne alalım. Karakteristik denklemi

$$t^k - A_1 t^{k-1} - \cdots - A_{n-k} = 0$$

dir.

a) Karakteristik denklemin $r_1, \ldots, r_k$ gibi k farklı kökü varsa

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + \cdots + C_k \cdot r_k^n$$

dir. C_i sayıları k tane başlangıç koşulundan bulunur.

b) Karakteristik denklemin $m+1$ katlı bir r kökü varsa

$$t^k - A_1 t^{k-1} - \cdots - A_{n-k} = (t-r)^{m+1} Q(t)$$

dir. Karakteristik denklemin $m+1$ katlı r_j kökleri varsa, genel çözüme $A_j r^n$ eklemek yerine,

$$A_j n^0 r_j^n + A_{j+1} n^1 r_j^n + A_{j+2} n^2 r_j^n + \cdots + A_{j+m} n^m r_j^n$$

yazılır. $A_j, \cdots, A_{j+m}$ sayıları verilen başlangıç koşullarından bulunur.

Örnek 1.4 $a_1 = 1, a_2 = 5$ olmak üzere $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $(n \geq 1)$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklemi: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$ ve $t = 3$. Genel çözüm: $a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n$ olur. Verilen başlangıç koşullarından

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = C \cdot 2^1 + D \cdot 3^1 = 2C + 3D = 1 \\ a_2 = C \cdot 2^2 + D \cdot 3^2 = 4C + 9D = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow C = -1 \wedge D = 1.$$

buradan da $a_n = -1 \cdot 2^n + 3^n$ elde edilir. □

Örnek 1.5 $a_1 = 1, a_2 = 5$ olmak üzere $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $(n \geq 1)$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklemi: $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1$ ve $t = 2$. Genel çözüm: $a_n = C \cdot (-1)^n + D \cdot 2^n$ olur. Verilen başlangıç koşullarından

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = C \cdot (-1)^1 + D \cdot 2^1 = -C + 2D = 1 \\ a_2 = C \cdot (-1)^2 + D \cdot 2^2 = C + 4D = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 1 \wedge D = 1.$$

buradan da $a_n = (-1)^n + 2^n$ elde edilir. □

Örnek 1.6 $a_1 = 3, a_2 = 21$ olmak üzere $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $(n \geq 3)$ indirgeme bağıntısı ile verilen $\left(a_n\right)$ dizisinin genel terimini bulunuz.

Çözüm. Karakteristik denklemi: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1$ ve $t = 3$. Genel çözüm: $a_n = C \cdot (-1)^n + D \cdot 3^n$ olur. Verilen başlangıç koşullarından

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = -C + 3D & = 3 \\ a_2 = C + 9D & = 21 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 3 \wedge D = 2.$$

buradan da $a_n = 3 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^n$ elde edilir. □

1.2 Dizilerin Sınırlılığı

Tanım 1.9 (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq K$ olacak biçimde bir K sayısı varsa, (a_n) dizisine *üstten sınırlı dizi* denir.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $k \leq a_n$ olacak biçimde bir k sayısı varsa, (a_n) dizisine *alttan sınırlı dizi* denir.

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $k \leq a_n \leq K$ olacak şekilde k ve K sayıları varsa, (a_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Sınırlı olmayan dizilere de sınırsız dizi denir.

Tanım 1.10 (a_n) reel sayı dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, (a_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 1.11 Üstten sınırlı bir dizinin üst sınırlarının en küçüğüne *en küçük üst sınır (supremum)* denir. Benzer şekilde, alttan sınırlı bir dizi için alt sınırlarının en büyüğü *en büyük alt sınır (infimum)* olarak adlandırılır. Bir dizinin de supremum veya infimum değerinin diziye ait olması gerekmez.

Örnek 1.7 i) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n = \frac{1}{n} \leq 1$ dir. (a_n) dizisi sınırlıdır.

ii) $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ dir. (a_n) dizisi sınırlıdır.

iii) $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ dir. (a_n) dizisi sınırlıdır.

iv) $(a_n) = ((-1)^n)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq a_n \leq 1$ dir. (a_n) dizisi sınırlıdır.

v) $(a_n) = (n)$ sınırsız bir dizidir.

Örnek 1.8 $(a_n) = \left(\dfrac{n^2}{n+2}\right)$ dizisi sınırsızdır.

Çözüm.

$$a_n = \frac{n^2}{n+2} \geq \frac{n^2}{n+2n} = \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3} =: b_n \qquad (\forall n \geq 1)$$

dir. $(b_n) = \left(\dfrac{n}{3}\right)$ dizisi sınırsızdır. O halde, (a_n) dizisi de sınırsızdır. □

Örnek 1.9 $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < n \cdot \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

olduğundan, (a_n) dizisi üstten sınırlıdır. □

Tanım 1.12 (a_n) bir reel sayı dizisi olsun.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine *artan* dizi,

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) dizisine *azalan* dizi denir.

Artan ya da azalan dizilere *monoton* dizi denir.

Uyarı 2 Bazı kaynaklarda, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine *(kesin) artan*, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine *(kesin) azalan* dizi denir.

Uyarı 3 Bir (a_n) dizisinin monotonluğunu incelemek için:

a) $a_{n+1} - a_n$ farkının işaretine bakılır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n - a_{n+1} \leq 0$ ise (a_n) dizisi artan, ≤ 0 ise (a_n) dizisi azalandır.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için a_n genel teriminin işareti biliniyor ise $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ oranı 1 ile karşılaştırılır. Örneğin, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ ise (a_n) dizisi artandır.

Örnek 1.10 $(a_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ olsun.

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olduğundan, (a_n) dizisi artandır.

Örnek 1.11 $(a_n) = ((-1)^n \cdot n)$ olsun.

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \cdot (n+1) - (-1)^n \cdot n = (-1)^{n+1} \cdot (2n+1)$$

$n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ise $a_{n+1} - a_n < 0$ ve (a_n) dizisi azalandır. $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ ise $a_{n+1} - a_n > 0$ ve (a_n) dizisi artandır. O halde, (a_n) dizisi monoton değildir.

Örnek 1.12 $(a_n) = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$ olsun. (a_n) dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olduğundan, (a_n) dizisi artandır. □

Örnek 1.13 $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$ olsun. (a_n) dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right) < 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

olduğundan, (a_n) dizisi azalandır. □

Örnek 1.14 $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$ olsun. (a_n) dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

olduğundan, (a_n) dizisi artandır. □

Örnek 1.15 $(a_1) = \sqrt{2}$ ve $n \geq 2$ için $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

Çözüm: $c_k = a_{k+1} - a_k$ denirse:

i) $k = 1$ için

$$c_1 = a_2 - a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2} > 0.$$

ii) $k = n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. $c_{n-1} = a_n - a_{n-1} > 0$ doğru olsun.

iii) $k = n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} c_n = a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n &= \frac{\sqrt{2 + a_n} - a_n}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \left(\sqrt{2 + a_n} + a_n \right) = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \\ &= \frac{2 + a_n - \left(2 + a_{n-1}\right)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, (a_n) dizisi artandır. □

Örnek 1.16 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dizisi artandır, kanıtlayınız.

Çözüm: **I. yol:**

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^{n+1}}{(n+1)^{2n+1+1}} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

olur. Bernoulli eşitsizliğinden,

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \geq 1 - (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

bulunur. O halde, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olur. (a_n) dizisi artandır.

II. yol:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$$

elde edilir. Her iki yanın n. kuvveti alınırsa; $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bulunur. O halde, $(a_n) \nearrow$.

III. yol: Bernoulli eşitsizliğinden,

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& 1-\frac{1}{n} < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
& \Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
& \Rightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
& \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

olur. O halde, $a_{n-1} < a_n$ ve $(a_n)\nearrow$. □

Örnek 1.17 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dizisi azalandır, kanıtlayınız.

Çözüm: **I. yol:**

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{n}$$

elde edilir. Her iki yanın n. kuvveti alınırsa; $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bulunur. O halde, $(a_n)\nearrow$.

II. yol: Bernoulli eşitsizliğinden,

$$\left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1} > 1+n\cdot\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

olur. Bu halde

$$1+\frac{1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

ve buradan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ bulunur. O halde, $(a_n)\swarrow$. □

Örnek 1.18 $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

Çözüm.

$$a_{n+1}-a_n = \frac{8(n+1)}{(n+1)^2+1} - \frac{8n}{n^2+1} = \frac{-8n^2-8n+8}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = -\frac{8(n^2+n-1)}{\underbrace{(n^2+2n+2)(n^2+1)}_{\geq 2\ (\forall n\in\mathbb{N})}}$$

Her $n \geq 1$ için $n^2+n-1 > 0$ olduğundan $a_{n+1}-a_n < 0$ dır. Bu durumda, a_n dizisi her $n\in\mathbb{N}$ için kesin azalandır. □

1.3 Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 1.13 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ pozitif sayısı için (x_n) dizisinin sonlu tane terimi hariç diğer bütün terimleri bir x reel sayısının $K(x, \varepsilon)$ komşuluğunda bulunuyorsa, (x_n) dizisinin *limiti* x tir (veya (x_n) dizisi x e *yakınsıyor*) denir.

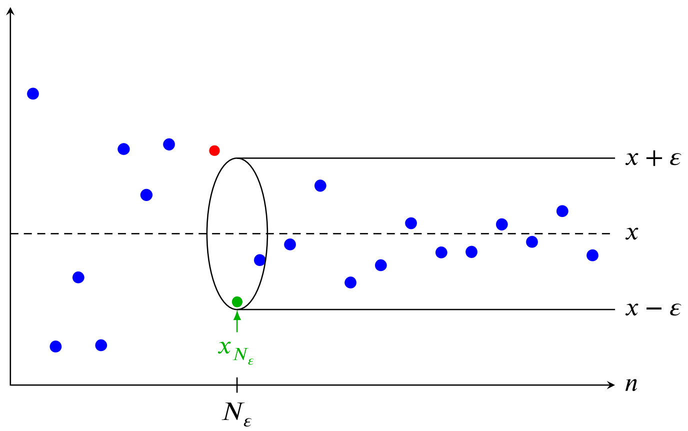
$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

yazılır, böyle bir diziye *yakınsak dizi* denir. Yakınsak olmayan dizilere *ıraksak* dizi denir.

Bu tanımın sonucu olarak, yakınsak bir dizi için dizinin sonsuz teriminin $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığında kaldığı söylenir. Bu aralık dışında kalan terimlerin indislerinden en büyüğü N_ε olarak gösterilirse yukarıdaki tanıma denk olan şu tanım verilebilir;

Tanım 1.14 (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısına karşılık bir N_ε doğal sayısı, her $n \geq N_\varepsilon$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilirse (x_n) dizisi x e *yakınsıyor* denir. Bu tanım matematiksel notasyonlar kullanılarak şöyle yazılabilir;

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x \iff (\forall\varepsilon > 0)\ \left(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\right)\ :\ \left(\forall n \geq N_\varepsilon\right)\ |x_n - x| < \varepsilon.$$



Örnek 1.19 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1000}{n-2} = 2$ dir, kanıtlayınız.

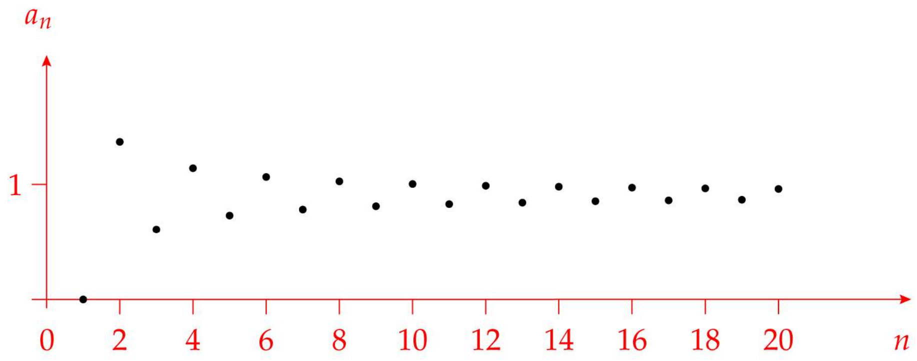
Çözüm. Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ bulmalıyız öyle ki her $n > N_\epsilon$ için $\left|\frac{2n+1000}{n-2} - 2\right| < \epsilon$ gerçeklensin.

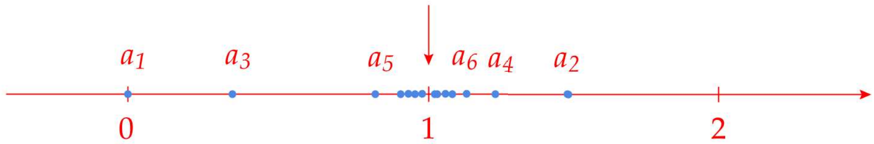
$$\left|\frac{2n+1000}{n-2} - 2\right| = \left|\frac{2n+1000-2(n-2)}{n-2}\right| = \left|\frac{1004}{n-2}\right| = \frac{1004}{n-2}, \quad (n \geq 3 \text{ için})$$

Buradan $\frac{1004}{n-2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1004}{\epsilon} + 2 < n$ olmalı. O halde, $\epsilon > 0$ verilsin, $N_\epsilon > \max\left\{\frac{1004}{\epsilon} + 2, 3\right\}$ seçilirse, verilen her $n \geq N_\epsilon$ için

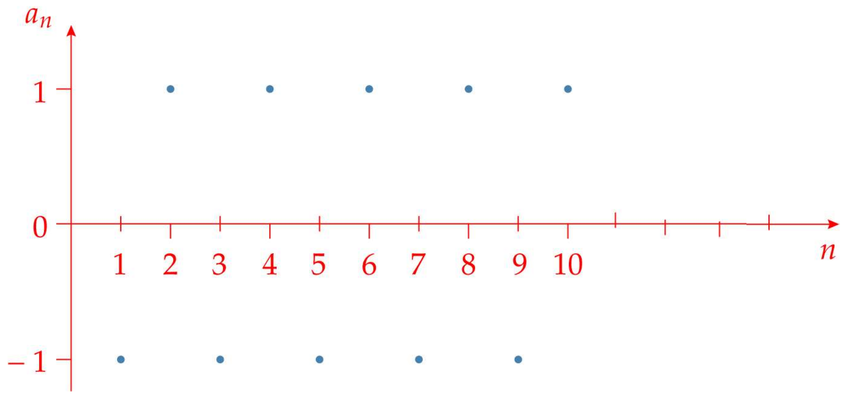
$$\left|\frac{2n+1000}{n-2} - 2\right| = \frac{1004}{n-2} \leq \frac{1004}{N-2} < \epsilon$$

gerçeklenir. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1000}{n-2} = 2$ dir. □

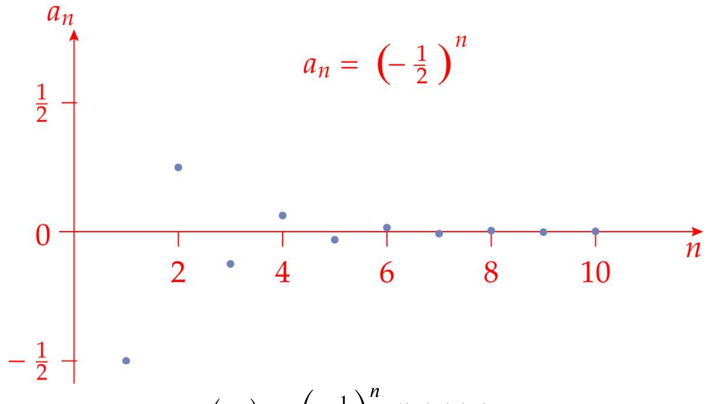




$\left(a_n\right) = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ dizisi için



$\left(a_n\right) = ((-1)^n)$ dizisi için



$\left(a_n\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ dizisi için

Örnek 1.20 $(x_n) = \left(\dfrac{3n^2+2}{n^3+2n}\right)$ dizisinin $l = 3$ limitine yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ olsun. Gösterilmek istenen; keyfi seçilen bu ε pozitif sayısı için öyle bir N_ε doğal sayısı vardır öyle ki bu indisten daha büyük indisler için dizinin terimleri $|x_n - l| < \varepsilon$ sağlar.

$$\left|\frac{3n^2+2}{n^3+2n} - 3\right| = \left|\frac{3n^2+2-3n^3-6n}{n^3+2n}\right| = \left|\frac{2-6n}{n^3+2n}\right| = \frac{6n-2}{n^3+2n} < \frac{6n}{n^3} = \frac{6}{n^2} < \varepsilon$$

$$N_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}\right] + 1 \text{ seçilirse her } n > N_\varepsilon \text{ için } \left|\frac{3n^2+2}{n^3+2n} - 3\right| < \varepsilon \text{ sağlanır.}$$ □

Örnek 1.21 $(x_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$ dizisi ve $l = 2$ için $\varepsilon_1 = \frac{1}{1000}$ ve $\varepsilon_2 = \frac{1}{500}$ için sırasıyla $|x_n - l| < \varepsilon_1$ ve $|x_n - l| < \varepsilon_2$ olacak şekilde en küçük N_1 ve N_2 doğal sayılarını bulunuz.

Çözüm. $\varepsilon_1 = \frac{1}{1000}$ olsun.

$$\begin{aligned} |x_n - l| < \varepsilon_1 = \frac{1}{1000} &\Leftrightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{1000} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{1000} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \frac{1}{1000} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{1000} \\ &\Leftrightarrow 2000 < n+1 \end{aligned}$$

Bu durumda en küçük doğal sayı $N_1 = 1999$.

Yukarıdaki örnekte $\varepsilon_2 = \frac{1}{500}$ olsun.

$$\begin{aligned} |x_n - l| < \varepsilon_2 = \frac{1}{500} &\Leftrightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow 1000 < n+1 \end{aligned}$$

Bu durumda en küçük doğal sayı $N_2 = 999$. □

Tanım 1.15 Limiti sıfır olan dizilere *sıfır dizisi* denir.

örneğin $\left(\frac{1}{n}\right)$ bir sıfır dizisidir.

Teorem 1.3 Bir (x_n) dizisi x e yakınsaktır ancak ve ancak $(x_n - x)$ dizisi bir sıfır dizisidir.

İspat: Kabul edelim ki (x_n) dizisi x e yakınsasın. Bu durumda

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_\varepsilon \text{ için } |x_n - x| < \varepsilon.$$

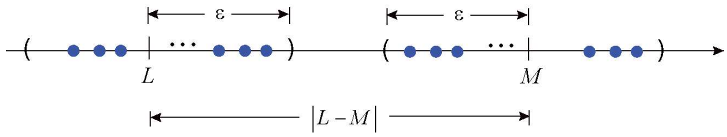
Buradan, $|x_n - x| = |(x_n - x) - 0| < \varepsilon$, yani $(x_n - x) \to 0$ elde edilir.

Tersine $(x_n - x) \to 0$ ise, benzer şekilde limit tanımından

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N_\varepsilon \ |(x_n - x) - 0| = |x_n - x| < \varepsilon$$

olduğundan (x_n) dizisi x reel sayısına yakınsak bulunur. □

Teorem 1.4 (x_n) reel sayı dizisi yakınsak ise limiti tekdir.



İspat: $L \neq M$ olmak üzere $(x_n) \to L$ ve $(x_n) \to M$ varsayalım ve $\varepsilon = \frac{1}{3}|L - M|$ diyelim. $(x_n) \to L$ ve $(x_n) \to M$ olduğundan $n > N_1$ iken $|x_n - L| < \varepsilon$ ve $n > N_2$ iken $|x_n - M| < \varepsilon$ olacak biçimde N_1 ve N_2 doğal sayıları vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ diyelim. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n > N$ olsun. Bu takdirde, aşikar olarak $n > N_1$ ve $n > N_2$ dir.

$$\begin{aligned} |L - M| &= \left|(L - x_n) + (x_n - M)\right| \\ &\leq |L - x_n| + |x_n - M| \\ &= |x_n - L| + |x_n - M| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|L - M| \end{aligned}$$

Böylece varsayımdan $L \neq M$ için $|L - M| < \frac{2}{3}|L - M|$ bulunur. $|L - M| > 0$ olduğundan bu mümkün değildir! □

İspat 2: $a \neq b$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ olsun. $\varepsilon = \frac{1}{4}|b - a| > 0$ sayısı için $k > N_a(\varepsilon)$ için $|x_k - a| < \frac{1}{4}|b - a|$ gerçeklenecek biçimde bir $N_a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer biçimde, $\varepsilon = \frac{1}{4}|b - a| > 0$ sayısı için $k > N_b(\varepsilon)$ için $|x_k - a| < \frac{1}{4}|b - a|$ gerçeklenecek biçimde bir $N_b(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. O halde,

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \leq \frac{1}{4}|b - a| + \frac{1}{4}|b - a| = \frac{1}{2}|b - a|$$

Buradan $|b - a| = 0$ ve $a = b$ bulunur. Bu ise $a \neq b$ varsayımı ile çelişir. □

Teorem 1.5 Yakınsak her dizi sınırlıdır.

İspat: (x_n) reel sayı dizisi x e yakınsak olsun. Bu durumda, limit tanımından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N_ε doğal sayısı vardır ki her $n \geq N_\varepsilon$ için $|x_n - x| < \varepsilon$, yani $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ olur. Dizinin N_ε tane terimi bu aralığın dışında kaldığından, bu sonlu tane terimin en küçüğü ve en büyüğü seçilebilir.

$$m = \min\{x_1, ..., x_{N_\varepsilon}, x - \varepsilon\} \text{ ve } M = \max\{x_1, ..., x_{N_\varepsilon}, x + \varepsilon\}$$

denirse, her n doğal sayısı için $m \leq x_n \leq M$ olur, (x_n) dizisi sınırlıdır. □

İspat 2: (x_n), ℓ ye yakınsayan bir dizi ve $\epsilon = 1$ olsun. Dizinin yakınsaklığı tanımından $n \geq N$ iken $|x_n - \ell| < \epsilon$ gerçeklenecek biçimde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$|x_n - \ell| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n - \ell < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + \ell < x_n < \epsilon + \ell \Rightarrow \ell - 1 < x_n < \ell + 1$$

olur. Diğer taraftan

$$\ell \leq |\ell| \Rightarrow \ell + 1 \leq |\ell| + 1$$

ve

$$-\ell \leq |\ell| \Rightarrow -|\ell| \leq \ell \Rightarrow -|\ell| - 1 \leq \ell - 1$$

olduğundan

$$-|\ell| - 1 \leq \ell - 1 < x_n < \ell + 1 \leq |\ell| + 1 \Rightarrow -|\ell| - 1 < x_n < |\ell| + 1 \Rightarrow |x_n| < |\ell| + 1.$$

dir. $M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |\ell| + 1\right\}$ diyelim. Her x_n için $n < N$ iken $|x_n| \leq M$ ve $n \geq N$ iken $|x_n| < |\ell| + 1 \leq M$ olur. Bu nedenle (x_n) dizisi M ile sınırlıdır. □

Uyarı 4 – Dikkat: Kolayca görülür ki bu theoremin tersi doğru değildir, sınırlı olmak yakınsaklık için yeterli değildir. örneğin $(-1)^n$ dizisi alttan -1 ve üstten 1 ile sınırlı olmasına rağmen yakınsak değildir.

Örnek 1.22 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^3} = 0$ dır, gösteriniz.

Çözüm.

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^3} - 0\right| = \frac{n^2+n+1}{n^3} < \frac{C}{n}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir C pozitif sabitinin varlığını göstermek istiyoruz. Yeterince büyük n için $\frac{n^2+n+1}{n^3} \approx \frac{1}{n}$ dir.

$$\left(n^2+n+1\right) n < C \cdot n^3 \ (*) \quad \Leftrightarrow \quad n^3+n^2+n < Cn^3 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n < (C-1)n^3$$

Yani $C > 1$ olmalıdır. $C = 2$ için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim. $C = 2$ için:

$$\begin{aligned} n^2+n < n^3 &\Leftrightarrow n+1 < n^2 \\ &\Leftrightarrow 1 < n^2 - n \\ &\Leftrightarrow 1 < n(n-1) \end{aligned}$$

Bu da $n > 1$ için doğrudur. Yukarıdaki tartışmadan, $n > 1$ ise, (*) eşitsizliğinden

$$\left(n^2+n+1\right) < 2n^3 \Leftrightarrow \frac{n^2+n+1}{n} < \frac{2}{n}$$

bulunur. O halde, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ seçilirse

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^3} - 0\right| < \frac{2}{n} \leq \varepsilon$$

olur. Böylece $N = \max\left\{1, \frac{2}{\varepsilon}\right\}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3} = 0$ dır. □

Örnek 1.23 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3}{2^n+n+10} = 1$ dir, gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \left|\frac{2^n+3}{2^n+n+10} - 1\right| &= \left|\frac{\cancel{2^n}+3-\cancel{2^n}-n-10}{2^n+n+10}\right| \\ &= \left|\frac{-n-7}{2^n+n+10}\right| = \frac{n+7}{2^n+n+10} < \frac{\delta_n}{2^n} \end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde δ_n sayısını belirlemek istiyoruz. $n > 1$ için

$$\begin{aligned} n > 1 &\Leftrightarrow 7_n > 7 \\ &\Leftrightarrow 7n + n > 7n + 7 \\ &\Leftrightarrow \delta_n > n + 7 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu durum (verilen her $\varepsilon > 0$ için), $\frac{\delta_n}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde N doğal sayısını bulmalıyız. Bunu elde etmek için aşağıdaki açılımı gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= 1 + \binom{n}{1}\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 1 + \binom{n}{3}\cdot 1 + \cdots + \binom{n}{n} \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots \\ &> \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\frac{\delta_n}{2^h} < \frac{\delta_n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{16\,\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} \qquad (n>1)$$

olur. O halde verilen verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\frac{16}{n-1} < \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde $N = \max\left\{1, \frac{16}{\varepsilon}+1\right\}$ seçilirse $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{2^n+n+10} = 1$ olur. □

Örnek 1.24 $a_n = (-1)^n \frac{2^n-1}{2^n+1}$ dizisinin limitinin varlığını inceleyiniz.

Çözüm. $2^n - 1 \geqslant 0$ ve $2^n + 1 > 0$ olduğundan

$$|x_n| = \left|(-1)^n \frac{2^n-1}{2^n+1}\right| = \left|\frac{2^n-1}{2^n+1}\right| = \frac{2^n-1}{2^n+1}$$

dir. Öte yandan

$$\frac{2^n-1}{2^n+1} = \frac{2^n+1-2}{2^n+1} = 1 - \frac{2}{2^n+1} < 1$$

olduğundan $|x_n| < 1 \Leftrightarrow -1 < x_n < 1$ olur.

i) n çift ise yani $n = 2k$ için:

$$a_{2k} = \frac{2^{2k}-1}{2^{2k}+1} = \frac{\frac{2^{2k}}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k}}}{\frac{2^{2k}}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}}} = \frac{1-\frac{1}{2^{2k}}}{1+\frac{1}{2^{2k}}}$$

ve buradan

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{2k}}}{1+\frac{1}{2^{2k}}} = 1.$$

ii) n tek ise yani $n = 2k-1$ için:

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}+1} = -1 \cdot \frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}+1} = -\frac{1-\frac{1}{2^{2k-1}}}{1+\frac{1}{2^{2k-1}}}$$

ve buradan

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -\lim_{k\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{2k-1}}}{1+\frac{1}{2^{2k-1}}} = -1$$

bulunur. O halde, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2^n-1}{2^n+1}$ yoktur.

□

Tanım 1.16 – (Alt Dizi) (a_n) dizisi verilmiş olsun. $k(n) = k_n$ doğal sayıların artan bir dizisi olmak üzere (a_{k_n}) dizisine, (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Örnek 1.25 $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ olsun. $(k_n) = (n^2)$ doğal sayıların artan bir dizisidir. $(a_{n^2}) = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin alt dizisidir.

|

Teorem 1.6 Yakınsak dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve aynı limite yakınsar.

İspat: (x_n) dizisi bir x limitine yakınsasın. Limit tanımından, x in her ε komşuluğunda dizinin sonlu terimi hariç, sonsuz terimi bulunacaktır. Dolayısı ile (x_n) dizisinin herhangi bir (x_{k_n}) alt dizisinin de bu komşulukta sonsuz terimi olacağından $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n}) = x$ tir. □

Uyarı 5 – Dikkat: Bu theoremin tersi doğru değildir! örneğin $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ dizisinin alt dizisi $(a_{2n}) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ yakınsak iken dizinin kendisi ıraksaktır.

Uyarı 6

1. Eğer bir dizi ıraksak bir alt diziye sahipse dizinin kendisi de ıraksaktır.

   örneğin,

$$(a_n) = \begin{cases} n^2 & ;\ n \text{ çift ise} \\ \dfrac{1}{n^2} & ;\ n \text{ tek ise} \end{cases}$$

   dizisinin alt dizisi $(a_{2n}) = (2n)^2$ dizisi ıraksak olduğundan (a_n) dizisi ıraksaktır.

2. Dizinin farklı limitlere sahip iki alt dizisi varsa dizinin kendisi ıraksaktır.

   örneğin, $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ dizisinin bir alt dizisi $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$, 1 e yakınsarken, başka bir alt dizisi $\left(-\frac{2n-1}{2n}\right)$ ise -1e yakınsar, bu durumda esas dizi $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ ıraksaktır.

Teorem 1.7 $(x_n) \to 0$ ve (y_n) sınırlı bir dizi ise $(x_n \cdot y_n)$ dizisinin limiti 0 dır.

İspat: (y_n) sınırlı verildiğinden $|y_n| < M$ olsun. $(x_n) \to 0$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ve her $n \geq N$ için $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ dir. Bu durumda

$$|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

olur ve bu da gösterir ki $(x_n \cdot y_n)$ bir sıfır dizisidir. □

Teorem 1.8 $(x_n) \to x$ ve $(y_n) \to y$ ise $(x_n \cdot y_n)$ dizisi de yakınsaktır ve $(x_n \cdot y_n) \to x \cdot y$dir.

İspat: (y_n) dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. Ayrıca, $(x_n - x)$ dizisi bir sıfır dizisi olduğundan, $(x_n - x) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n - x \cdot y_n)$ dizisi de bir sıfır dizisidir.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) &= \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n - x \cdot y_n + x \cdot y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n - x \cdot y_n) + \lim_{n\to\infty}(x \cdot y_n) = 0 + \lim_{n\to\infty}(x \cdot y_n) \end{aligned}$$

elde edilir. x sabit bir reel sayı olduğundan $\lim_{n\to\infty}(x \cdot y_n) = x \cdot \lim_{n\to\infty}(y_n) = x \cdot y$ dir, buradan $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$ bulunur. □

Uyarı 7 Yakınsak bir dizi ile ıraksak bir dizinin çarpımı yakınsak veya ıraksak olabilir. $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ sıfır dizisini sırasıyla $(y_n) = (n^2)$ ve $(z_n) = (n)$ ıraksak dizileri ile çarpalım.

$$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = (n) \text{ dizisi ıraksak,}$$
$$(x_n) \cdot (z_n) = (x_n \cdot z_n) = (1) \text{ sabit dizisi ise yakınsaktır.}$$

Teorem 1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = y$, $(y_n \neq 0, y \neq 0)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$ dir.

İspat: $y_n \neq 0$ olduğundan $\frac{1}{y_n} \neq 0$ dır. $y > 0$ kabulü ile başlayalım, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = y$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon$. Yani, $n \geq N_\varepsilon$için $y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$ olur. Bu eşitliğin sol tarafı gösterir ki her $n \geq N_\varepsilon$ için $y - \varepsilon < y_n$ dir. $\varepsilon > 0$ sayısı yeterince küçük seçilirse $y - \varepsilon > 0$ olur.

$$m = \min\{|y_1|, ...|y_{N_\varepsilon}|, |y - \varepsilon|\}$$

denirse, her n doğal sayısı için $|y_n| \geq m$ ve buradan $\left|\frac{1}{y_n}\right| < 1/m$ olur. Yani $(1/y_n)$ sınırlı bir dizidir. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N_\varepsilon$ için

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y_n - y}{y_n \cdot y}\right| < |y_n - y|\frac{1}{|y_n| \cdot y} \leq \frac{1}{y \cdot m}\varepsilon$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{y}$ olur.
$\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = (x_n)\left(\frac{1}{y_n}\right)$ olduğundan limit iki yakınsak dizinin çarpımının limiti olur ve buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty}(x_n)\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$$

bulunur. $y < 0$ olması durumunda, dizinin terimleri -1 ile çarpılarak $y > 0$ için yukarıdaki ispat kullanılır. □

Teorem 1.10 (x_n) pozitif terimli yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin limiti ≥ 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki $x < 0$. Bu durumda limit tanımından, her pozitif ε reel sayısı için dizinin sonsuz terimi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ aralığında kalacaktır. $\varepsilon = -x$ alınırsa, $x_n < x + \varepsilon = x - x = 0$ olur bu da dizinin pozitif terimli olması ile çelişir. □

Teorem 1.11 $(x_n) \to x$ ve $(y_n) \to y$ öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ olsun. Bu durumda $x \leq y$ dir.

İspat: $(z_n) = (y_n - x_n)$ pozitif terimli yakınsak bir dizidir ve $y - x$ değerine yakınsar. Teorem 1.10'den $y - x \geq 0$, yani $x \leq y$ dir. □

Teorem 1.12 (Sıkıştırma Teoremi)(a_n), (b_n), (c_n) reel sayı dizileri ve $N_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $(a_n) \to a$, $(b_n) \to a$ ve her $n \geq N_0$ doğal sayısı için

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (c_n) dizisi de aynı a değerine yakınsar.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. (a_n) ve (b_n) dizileri a değerine yakınsadığından

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \geq N_1 \text{ için } |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \; : \; \forall n \geq N_2 \text{ için } |b_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

olur. $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ olsun. $n \geq N$ için $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Buna göre $n \geq N$ için $|c_n - a| < \varepsilon$ olur, yani $(c_n) \to a$ elde edilir. $|c_n - a| < \varepsilon$ olduğu elde edilir. □

Örnek 1.26

$$\left(a_n\right) = \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: Sıkıştırma Teoremini kullanalım:

$$b_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}$$

ve

$$c_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n < a_n < c_n$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = 1$$

elde edilir. □

Örnek 1.27

$$\left(a_n\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\left(b_n\right) = \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ ve $\left(c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ dizilerini gözönüne alalım: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ dir. Benzer biçimde $\lim\limits_{n\to\infty}$ $c_n = 1$ olduğu kolayca gösterilir.

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = c_n$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < b_n$ dir. Öte yandan

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = b_n$$

dir. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n < a_n$ dir. Sonuç olarak, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ elde edilir. □