IST2084/ IST104.1/ IST104.2 Biyoistatistik (Biyoloji Bölümü)

OLASILIK

Fatih Kızılaslan

Marmara Üniversitesi

2019-2020 Bahar 6. Hafta

Olasılık

Olasılığı farklı biçimlerde açıklayabiliriz.

- İlgilenilen olayın veya olayların meydana gelme olabilirliğinin ölçülmesidir.
- Tamamen şansa bağlı durumlarda ortaya çıkan belirsizliğin sayısal olarak ölçülmesidir.
- Rastgeleliğin ölçüsüdür.

Olasılık istatistiğin önemli bir kısmıdır. Rastgeleliğin veya belirsizliğin olduğu durumlarda karar vermede olasılık teorisi önemli bir rol oynar. Kitle (popülasyon) hakkında bu kararları verirken örneklemlerden elde edilen bilgiler kullanılır.
İlk olarak kümeler ile ilgili bazı temel kavramları hatırlayalım.

Kümeler

- Belirlenmiş bir evrendeki iyi tanımlanmış nesneler topluluğuna **küme** denir.
  Örneğin, A kümesinin elemanları 2,4,6 ise bu kümeyi $A = \{2, 4, 6\}$ biçiminde gösteririz ve bu kümeye dahil olan elemanları $2 \in A$ biçiminde, dahil olmayanları $8 \notin A$ biçiminde gösteririz.
  Ayrıca, bu A kümesini $A = \{2x : x = 1, 2, 3\}$ biçiminde de gösterebiliriz.
  Bu gösterimde, 1. kısım yani $2x$ kümedeki elemanların sağladığı kuralı ifade eder, 2. kısım ise ilk kısımdaki değişken (değişkenlerin) alabilecek olduğu değerleri gösterir.
  Örneğin, 1 den 12 ye kadar olan tek sayıların kümesini
  $$B = \{2x + 1 : x = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ veya } \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$
  biçiminde yazabiliriz.
- Bir kümenin sonlu sayıda elamanı varsa bu kümeye **sonlu küme**, sonsuz sayıda elemanı varsa **sonsuz küme** denir.
- Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\varnothing$ biçiminde gösterilir.
- Tüm elemanları kapsayan kümeye **evrensel küme** denir.

- A ve B herhangi iki küme olmak üzere A'nın her elamanı B kümesinin de elemanı ise A, B'nin bir **alt kümesidir** ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir.
  Örneğin, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ise $A \subset B$ dir.

A ve B herhangi iki küme olmak üzere,

- Kümelerin **birleşimi**: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$
- Kümelerin **kesişimi**: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$
- Kümenin **tümleyeni**: $A^C = \{x : x \notin A\}$
  biçiminde tanımlanır.

Deneyin sonuçlarının kümesi belli olan ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinemeyen bir deneye **rastgele deney** denir.

Örneğin, bir zar atma deneyindeki sonuçlarımız $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır. Bu deney gerçekleştirildiğinde yani zar atıldığında hangi sonucun elde edileceğini bilmiyoruz. Bu bir rastgele deneydir.

- Bir rastgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine **örnek uzay** denir ve genellikle S ile gösterilir.
- Örnek uzayın bir alt kümesine **olay** denir.

Örnek:

Deney	Örnek Uzay	Bir Olay
Bir zar atışı	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	Çift gelme $A = \{2, 4, 6\}$
Bir para atışı	$S = \{Yazı\ (Y), Tura\ (T)\}$	Yazı gelmesi $A = \{Y\}$
İki para atışı	$S = \{YY, YT, TY, TT\}$	İki atışında aynı olması $A = \{YY, TT\}$

İki para atılması deneyinde toplam 4 farklı sonuç vardır ve toplam alt kümelerinin sayısı 2^4 olduğundan bu deney için 2^4 tane olay vardır.

Bir olayın gerçekleşme olasılığına ilişkin farklı tanımlar yapılmıştır.

1. **Klasik Olasılık:** n sonucu olan bir deneyde bu sonuçların ortaya çıkması eşit olasılıklı olsun. Eğer bir A olayı m kez ortaya çıkıyor ise A olayının ortaya çıkma olasılığı
$$P(A) = \frac{m}{n}$$
olarak ifade edilir.
Örneğin, bir zar atışı deneyinde sonucun çift sayı gelmesi olasılığını bulalım. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve istenilen olay $A = \{2, 4, 6\}$ olduğundan $P(A) = 3/6 = 1/2$ dir.
2. **Deneysel Olasılık (Göreceli frekans):** Örnek uzayında A olayı olan bir deney aynı koşullarda n defa tekrar edilsin. Deneyin her tekrarında bu A olayı ya gerçekleşir ya da gerçekleşmez. Bu n tekrar içinde toplam m defa A olayı gerçekleşmiş olsun. Bu durumda, A olayı için deneysel olasılık
$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$
olarak ifade edilir.

Örnek: Hilesiz bir para atışı deneyinde tura gelme sayıları ve göreli frekanslar aşağıdaki gibi verilmiştir.

Deneme sayısı	Tura sayısı	Göreceli frekans
1	0	0
5	2	$2/5{=}0.4$
10	6	$6/10{=}0.6$
20	11	$11/20{=}0.55$
50	27	$27/50{=}0.54$
100	53	$53/100{=}0.53$
1000	495	$495/1000{=}0.495$
10000	5010	$5010/10000{=}0.501$

Bu deney için klasik olasılık $1/2$ dir. Örnekte olduğu gibi deneysel olasılık değeri yapılan tekrar sayısı arttıkça klasik olasılık değerine yaklaşacaktır.

Olasılık Aksiyomları

Olasılığın gerek oran gerekse limit olarak tanımlanmasındaki zorluklar nedeniyle matematikçiler olasılığı bir fonksiyon olarak ifade etmişlerdir. Rus matematikçi Andrey Kolmogorov (1933) dört aksiyomla olasılık fonksiyonunu tanımlamıştır.

Aksiyomlar

1. Herhangi bir olayın olasılığı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıdır. $A \subset S$ olmak üzere $0 \leq P(A) \leq 1$ dır.
2. $P(S) = 1$ dir. (S: örnek uzay)
3. A ve B, S örnek uzayındaki herhangi iki ayrık olay (yani $A \cap B = \varnothing$) olduğunda
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir.}$$
4. $A_1, A_2, \ldots$ olayları S örnek uzayında tanımlı ayrık olaylar olmak üzere
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ dir.}$$

Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

S örnek uzay, A ve B bu örnek uzayda iki olay olsun.

1. Eğer $P(A) = 0$ ise A olanaksız olaydır. Eğer $P(A) = 1$ ise A kesin olaydır.
2. Eğer $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.
3. Eğer A ile B ayrık olmayan iki olay ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ dir.}$$

   Not: $A \cap B = \varnothing$ olduğunda A ile B **ayrık** olaylardır.

4. Eğer A ile B ayrık iki olay ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir.}$$

   Not: Çünkü, $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ dır.

5. $P(A) + P(A^c) = 1$ dir. Çünkü, $A \cap A^c = \varnothing$ dir. Dolayısıyla $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Örnek 1: Bir paranın 3 kez atıldığı bir deney için örnek uzayı oluşturunuz.

Çözüm: Her bir atış için 2 sonuç olduğundan örnek uzayda toplam $2^3 = 8$ farklı durum vardır. Bunlar,

$$\underbrace{YYY}_{3 \text{ yazı}}, \underbrace{YYT, YTY, TYY}_{2 \text{ yazı}}, \underbrace{YTT, TYT, TTY}_{1 \text{ yazı}}, \underbrace{TTT}_{0 \text{ yazı}}$$

dır. Örnek uzayımız
$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$ dir.
Bu 3 atışta sadece 1 tane yazı gelme olasılığı: $P(1) = 3/8$ dir. Benzer olarak $P(2) = 3/8$, $P(3) = 1/8$ ve $P(0) = 1/8$ dir. Böylece, yazı ile ilgili tüm durumların olasılıklarının toplamı

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$$

dir.

Örnek 2: Hilesiz iki zar birlikte atılıyor. Zarlar üzerindeki sayıların toplamının **a)** 5 olma olasılığını, **b)** 9 olma olasılığını, **c)** 5 veya 9 olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bu deney için örnek uzayımız

$$S = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & \underline{(6,3)} \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \underline{(5,4)} & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & \underline{(4,5)} & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & \underline{(3,6)} & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{bmatrix}$$

biçiminde 36 farklı sonuçtan oluşur. $A = \{\text{İki sayının toplamının 5 olması}\}$, $B = \{\text{İki sayının toplamının 9 olması}\}$ olsun. Örnek uzaya göre $A = \{(1,4),(4,1),(3,2),(2,3)\}$ olmak üzere 4 elemandan oluşur. Böylece **a)** $P(A) = 4/36 = 1/9$ dır. Benzer olarak **b)** $P(B) = 4/36 = 1/9$ dır.

Açıktır ki, $A \cap B = \varnothing$ yani zarlar üzerindeki sayıların toplamının hem 5 hem de 9 olması mümkün değildir. Böylece, A ile B ayrık olaylardır.

c) Gelen sayıların toplamının 5 veya 9 olması olasılığı $P(A \cup B)$ demektir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(\varnothing)=0} = P(A) + P(B) = 1/9 + 1/9 = 2/9$$

dır.

Sayma Teknikleri

Bir A olayının gerçekleşmesi olasılığı $P(A)$'nın hesaplanmasında A olayının ortaya çıkma sayısının ve örnek uzayın belirlenmesinde bazı teknikler kullanılır.

1. **Çarpma Kuralı:** Bir olay n farklı yol ile ortaya çıksın. Bunu izleyen ikinci olay, bu n yolun her biri için m farklı biçimde ortaya çıkıyor ise bu iki olay birlikte nxm farklı biçimde ortaya çıkar.

Örneğin, bir öğrenci okuldan eve giderken yolunun 1. bölümü için 5 farklı otobüs hattı, 2. bölümü için 3 farklı otobüs hattı, 3. bölümü için ise 2 farklı otobüs hattı seçeneği olsun.
Bu durumda bu öğrenci her gün okuldan eve giderken 5x3x2=30 farklı yol tercihinden bir tanesini kullanır.

2. **Toplama Kuralı:** Bir olay farklı yöntemler ile gerçekleşebilir olsun. Birinci yöntem ile bu olay n farklı biçimde, ikinci yöntem ile m farklı biçimde gerçekleşebiliyor ise bu olay toplam $n + m$ farklı biçimde gerçekleşebilir.

Örneğin, bir öğrenci evden okula giderken ulaşım seçenekleri: 2 farklı otobüs hattı, deniz yolu, 2 farklı arkadaşının aracı biçimindedir.
Bu öğrencinin evden okula gitmek için toplam 2+1+2=5 farklı seçeneği vardır.

Faktöriyel: 1'den n'ye kadar tüm sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir. $n!$ biçiminde gösterilir ve

$$n! = n(n-1)(n-2)...2.1$$

dir. Ayrıca, $0! = 1$ ve $1! = 1$ dir.