IST2084/ IST104.1/ IST104.2 Biyoistatistik (Biyoloji Bölümü)
OLASILIK

Fatih Kızılaslan

Marmara Üniversitesi

2019-2020 Bahar 7. Hafta

Permütasyon

Permutasyon

Birimlerin oluşturduğu kümedeki elemanların bir kısmının ya da tümünün belli bir sırada sıralanmasına **permütasyon** denir.

Teorem 1

n tane birbirinden farklı nesnenin n tanesi toplam $n!$ kadar farklı biçimde sıralanabilir.

Örnek 1: Bir sırada bekleyen A, B, C ve D kişileri kaç farklı biçimde sıralanabilir.

Çözüm: Aşağıdaki gib $4! = 4.3.2.1 = 24$ farklı biçimde sıralanabilirler.

$$\begin{Bmatrix} ABCD & ABDC & ACBD & ACDB & ADBC & ADCB \\ BACD & BADC & BCAD & BCDA & BDAC & BDCA \\ CDAB & CDBA & CABD & CADB & CBAD & CBDA \\ DABC & DACB & DBAC & DBCA & DCAB & DCBA \end{Bmatrix}$$

Teorem 2

n tane birbirinden farklı nesnenin r $(r \leq n)$ tanesinin sıralanması ile elde edilecek farklı sıralanmalarının sayısı

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

biçimindedir.

- Burada ifade edilen durumda, n tane nesneden r tanesi seçilerek oluşturulan farklı sıralanmalarının sayısına **permütasyon** denir.
- **Permütasyonda nesnelerin sıraları önemlidir.** Her bir sıralama birbirinden farklıdır. Örneğin, AB ile BA farklı sıralanmalardır.

Örnek 2: 10 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısı seçilecektir. Seçimler rastgele olarak yapılacak ve ilk seçilen başkan ve ikicisi başkan yardımcısı olacak ise bu 2 pozisyon kaç farklı biçimde oluşturulabilir?
Çözüm: 10 kişi içinden 2 kişinin seçilmesi durumudur. Permütasyon formülü ile

$$_{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{8!} = 90$$

bulunur.
II. yol: İki kişi seçilecektir 1. kişi için 10 farklı seçeneğimiz, 2. kişi için ise 9 farklı seçeneğimiz olduğundan toplam $10 * 9 = 90$ farklı seçeneğimiz vardır.

Örnek 3: a,b,c,d harflerinin 3 tanesi kaç farklı biçimde sıralanır?
Çözüm: $_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ veya $4 * 3 * 2 = 24$ farklı biçimde sıralanır.

Örnek 4: 2 kadın ile 3 erkek, kadınlar yanyana olmak koşulu ile kaç farklı biçimde oturabilirler?
Çözüm: 2 K, 3 E olmak üzere toplam 5 kişi vardır. 2 Kadının yanyana olması isteniyor. Bu 2 Kadını 1 kişi olarak düşünürsek toplam 4 kişi olur. Bu 4 kişi toplam $4!=24$ farklı biçimde sıralanır. Ayrıca, 2 Kadın kendi aralarında $2!$ farklı biçimde sıralanır. Böylece, cevabımız: $2!\,4! = 48$ olur.

Örnek 5: 8 öğrenci yanyana sırlanacaklardır. Ali ile Ayşe yanyana gelmek istemiyorlar ise kaç farklı biçimde sıralanabilirler?
Çözüm: 8 kişi toplam $8!$ farklı biçimde sıralanır. Ali ve Ayşe'nin yanyana olduğu sıralamaların sayısı: $2!\,7!$ olur.
Böylece, Ali ve Ayşe'nin yanyana olmadığı sıralamaların sayısı: $8! - 2!\,7! = 6\,7!$ olur.

Kombinasyon

Kombinasyon

Permütasyonda birimlerin **sırası önemlidir.** Birimlerin sıralanmasında **sıranın önemli olmadığı** sıralamalara **kombinasyon** denir. Kombinasyonda **sıranın önemi yoktur**. Sıralama önemli deği ise kombinasyon kullanılır.

n farklı birimden k tanesinin kaç farklı biçimde seçileceğini hesaplamak istersek (seçim sırası önemli olmamak koşulu ile) kombinasyon formülü

$$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\; k!} $$

ile bulunur.

Bir örnek üzerinden permütasyon ile kombinasyonu karşılaştıralım.

Örnek 6: $\{a, b, c, d\}$elemanlarından oluşan bir kümeden elde edilen üçlü permütasyonların ve kombinasyonların sayısını bulunuz.

Çözüm: 4 farklı elemanın 3'lü permütasyonu ${}_4P_3 = 4.3.2 = 24$ ve kombinasyonu ise $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\ 1!} = \frac{24}{6} = 4$ dır. Şimdi bunları inceleyelim, neden farklılar?

Permütasyonlar	Kombinasyonlar
abc,acb,abd,adb,acd,adc,	abc,abd,acd,bcd
bac,bca,bad,bda,bcd,bdc	
cab,cba,cad,cda,cbd,cdb	
dab,dba,dac,dca,dbc,dcb	

Permütasyondaki "abc,acb,bac,bca,cab,cba" sıralamaları birbirinden farklı sıralamalar olarak sayılır. Burada sadece a,b, ve c kullanılmıştır. Eğer sıralama önemsiz ise (yani kombinasyon) sadece hangi elemanların kullanıldığı önemli ise bu 6 farklı sıralamayı sadece "abc" olarak 1 tane olarak sayarız. Benzer durumlar diğerleri için de geçerli olacaktır. Toplam 4 farklı kombinasyon vardır.

- Örnek 6'da gördüğümüz gibi permütasyon ile kombinasyonun değerleri farklıdır.
- Kombinasyonun değeri permütasyondan daha küçük olacaktır.

Örnek 7: 4 kişilik bir asansöre bekleyen 10 kişi kaç farklı biçimde binebilir?
Çözüm: Asansöre hangi sıralama ile girildiği önemli değildir, önemli olan asansöre binebilmektir. Bu nedenle 10 kişiden 4'er kişilik
$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!\,4.3.2.} = 10.3.7 = 210$ farklı grup oluşturabiliriz.

Örnek 8: 5 Doktor ve 7 hemşire arasından 2 doktor ve 4 hemşireden oluşan bir ekip oluşturulacaktır. Bu ekip kaç farklı biçimde oluşturulabilir?
Çözüm: 5 Doktor arasından herhangi 2 doktoru $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ farklı biçimde seçeriz.

7 Hemşire arasından 4 hemşireyi $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$ farklı biçimde seçeriz.

Böylece, istenen ekip $\binom{5}{2}\binom{7}{4} = 10\ 35 = 350$ farklı biçimde oluşturulabilir.

Örnek 9: 10 erkek ve 5 kadından oluşan bir gruptan **a)** 6 kişilik bir komisyon kaç farklı biçimde oluşturulabilir? **b)** Her komisyonda en az bir kadın olma koşulu ile 6 kişilik komisyon kaç farklı biçimde oluşturulabilir? **c)** Her komisyonda en az 2 kadın olma koşulu ile 6 kişilik komisyon kaç farklı biçimde oluşturulabilir?

Çözüm: **a)** 15 kişi arasından 6 kişilik bir komisyon $\binom{15}{6} = 5005$ farklı biçimde oluşturulur.

b) En az bir kadının bulunduğu 6'lı komisyon sayısı=Tüm 6'lı komisyonların sayısı - Kadın bulunmayan komisyonların sayısı biçiminde hesaplanır.

Kadın bulunmayan komisyonlarda sadece erkekle olacağından bunların sayısı $\binom{10}{6}$ olur. Böylece, cevap: $\binom{15}{6} - \binom{10}{6} = 4795$ dır.

c) En az 2 kadının bulunduğu 6'lı komisyonların sayısı=Tüm 6'lı komisyonların sayısı - Kadın bulunmayan 6'lı komisyonların sayısı - 1 kadın bulunan 6'lı komisyonların sayısı dır.

Böylece, cevap: $\binom{15}{6} - \binom{10}{6} - \underbrace{\binom{10}{5}\binom{5}{1}}_{\text{5 Erkek,1 Kadın}} = 3535$ dir.

Alternatif olarak,

$$\underbrace{\binom{10}{4}\binom{5}{2}}_{\text{4 Erkek,2 Kadın}} + \underbrace{\binom{10}{3}\binom{5}{3}}_{\text{3 Erkek,3 Kadın}} + \underbrace{\binom{10}{2}\binom{5}{4}}_{\text{2 Erkek,4 Kadın}} + \underbrace{\binom{10}{1}\binom{5}{5}}_{\text{1 Erkek,5 Kadın}} = 3535 \text{ dir.}$$

Koşullu Olasılık

- Bir olayın geçekleştiği biliniyorken başka bir olayın gerçekleşme olasılığına **koşullu olasılık** denir.
- Bir B olayının gerçekleştiği biliniyorken bir A olayının gerçekleşme olasılılığı
$$P(A/B)$$
biçiminde gösterilir ve B bilindiğinde A'nın koşullu olasılığı olarak ifade edilir.

Örnek 1: Bir hilesiz zar atıldığında sonucun çift geldiği biliniyor ise 2 gelme olasılığını bulunuz.
Çözüm: $A = \{$zarın 2 gelmesi durumu$\}$ ve $B = \{$zarın çift gelmesi durumu$\} = \{2, 4, 6\}$ dır. Bu durumda, 2 bu 3 farklı çift sayıdan biri olduğundan 2 gelme olasılığı $1/3$ olarak bulunur.

Tanm

A ve B örnek uzayda tanımlanmış iki olay ve $P(B) \neq 0$ olmak üzere B olayının gerçekleştiği bilindiğinde A olayının koşullu olasılığı

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımdan A ve B olaylarının birlikte gerçekleşme olasılığını

$$P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B)$$

biçiminde bulabiliriz.

Ayrıca, benzer olarak A olayı gerçekleştiğinde B'nin koşullu olasılığı

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

olur ve $P(A \cap B) = P(B/A)\ P(A)$ dır.

Böylece, iki olayın birlikte gerçekleşmesi (yani kesişim kümesinin) olasılığını koşullu olasılık ile

$$P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B) = P(B/A)P(A)$$

biçiminde yazabiliriz.

Örnek 2: 50 tane kalemin 5 tanesinin arızalı olduğu biliniyor. Bu 50 kalemin içinden rastgele 2 tanesi seçiliyor. Her iki kaleminde arızalı olma olasılığını bulunuz.
Çözüm: $A_1 = \{1.$ kalemin arızalı olması$\}$, $A_2 = \{2.$ kalemin arızalı olması$\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, $P(A_1) = 5/50$ dir.
Bizden istenilen, her iki kaleminde arızalı olma olasılığıdır, yani

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{5}{50}\frac{4}{49} = 0.008$$

olarak bulunur.

Örnek 3: Biyoloji bölümü öğrencilerinin %40'ı matematik, %30'u istatistik ve %20'si hem matematik hem de istatistik derslerinden başarısızdır. Rastgele olarak seçilen bir öğrencinin
a) Matematikten başarısız ise istatistikten de başarısız olması, **b)** İstatistikten başarısız ise Matematikten de başarısız olması, **c)** Matematik veya İstatistikten başarısız olması,
olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: M ={Matematik dersinden başarısız öğrenciler}, $\dot{I}$ ={İstatistik dersinden başarısız öğrenciler} olarak tanımlayalım. Böylece, $P(M) = 40/100$, $P(\dot{I}) = 30/100$ ve $P(\dot{I} \cap M) = 20/100$ dır.

a) $P(\dot{I}/M) = \frac{P(\dot{I} \cap M)}{P(M)} = \frac{20/100}{40/100} = \frac{1}{2}$ dır.

b) $P(M/\dot{I}) = \frac{P(\dot{I} \cap M)}{P(\dot{I})} = \frac{20/100}{30/100} = \frac{2}{3}$ dır.

c) $P(M \cup \dot{I}) = P(M) + P(\dot{I}) - P(M \cap \dot{I}) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$ dır.

Bağımsız Olaylar

A ve B gibi iki olaydan birinin gerçekleşmesi diğerini gerçekleşmesi olasılığını etkilemiyorsa A ve B olayları **bağımsızdır** denir.

A ve B olayları bağımsız ise

$$P(A/B) = P(A) \text{ ve } P(B/A) = P(B)$$

olur. Böylece, A ve B olayları bağımsız ise koşullu olasılık formülünden

$$\underbrace{P(A/B)}_{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

bulunur.

A ve B olayları bağımsız ise $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ dır.

Örnek 4: Üç paranın birlikte atılması deneyinde $A = \{$ En az iki tura gelmesi$\}$, $B = \{$İki tura gelmesi$\}$ olsun. A ve B olayları bağımsız mıdır?
Çözüm: Bu deney için örnek uzayımız $2^3 = 8$ elemandan oluşur ve

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

olur. Bu durumda $P(A) = 4/8$, $P(B) = 3/8$ ve $P(A \cap B) = P(B) = 3/8$ dir. Böylece

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

dır, A ve B olayları bağımsız değildir bağımlıdır.

A ve B gibi iki olaydan birinin gerçekleşmesi diğerini gerçekleşmesinin olasılığını etkiliyorsa A ve B olayları **bağımlıdır** denir. A ve B olayları bağımlı ise $P(A/B) \neq P(A)$ ve $P(B/A) \neq P(B)$ ve $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ olur.