IST3002 Deney Tasarımı

Rastgele Etkili Model

Fatih Kızılaslan

Marmara Üniversitesi

2019-2020 Bahar VII. Hafta

Rastgele Etkili Model

Bir faktör ve *a* faktor düzeyinden oluşan

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \;\; i = 1, ..., a, \;\; j = 1, ..., n$$

biçiminde verilen ANOVA modelinde faktör düzeyleri iki farklı biçimde belirlenebilir.

- Eğer *a* tane faktör düzeyi araştırmacı tarafından özel olarak seçilirse bu model **Sabit Etkili Model (Fixed Effects Model)** olarak adlandırılır.
- Eğer *a* tane faktör düzeyi araştırmacı tarafından faktör düzeylerinin popülasyonundan rastgele seçilirse bu model **Rastgele Etkili Model (Random Effects Model)** olarak adlandırılır.

İki model arasındaki en önemli fark: Rastgele etkili modelin sonuçları tüm faktör düzeyleri için geçerlidir.

Rastgele etkili modelin matematiksel ifadesi de sabit etkili model gibidir. Ancak, parametrelerin yorumları farklıdır.

Rastgele etkili model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \;\; i = 1, ..., a, \;\; j = 1, ..., n$$

biçiminde ifade edilir.

Burada, τ_i, $i = 1, ..., a$ (faktör düzeylerinin etkisi) bir **rastgele değişkendir**.

Rastgele etkili modelde τ_i ve ϵ_{ij} nin birbirlerinden bağımsız rastgele değişkenlerdir.

Rastgele etkili modelde

$$\tau_i \sim N(0, \sigma_\tau^2), \;\; i = 1, ..., a \text{ ve } \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \;\; i = 1, ..., a, \;\; j = 1, ..., n$$

varsayımı yapılır.

Bu varsayımlar altında $E(y_{ij}) = \mu$ ve $Var(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma_\tau^2$, $i = 1, ..., a$, $j = 1, ..., n$ dır. Ayrıca, aynı faktör düzeyindeki gözlemler için

$$Cov(y_{ij}, y_{ik}) = \sigma_\tau^2, \; j \neq k$$

olur. (**Ödev:** Gösteriniz.) Fakat, farklı düzeylerdeki gözlemler için

$$Cov(y_{ij}, y_{kj}) = 0, \; i \neq k$$

olur.
Bu nedenle, aynı faktör düzeyindeki yanıt değişkenleri birbirinden bağımsız değildir.
Deney yapılmadan önce aynı faktör düzeyindeki gözlemlerin birbirine benzer olmasını bekleriz. Fakat, deney yapıldıktan sonra tüm gözlemlerin bağımsız olduğu varsayılabilir. Çünkü, τ_i parametresi belirlenir ve aynı düzeydeki gözlemler sadece rastgele hata nedeniyle farklılık gösterir.

σ^2 ve σ_τ^2 **varyans bileşenleri** olarak adlandırılır.

ANOVA Tablosu

ANOVA tablosu sabit etkili modeldeki ile aynı biçimde oluşturulur. Ancak, rastgele etkili modelde hipotezlerimiz farklıdır.

Rastgele etkili modelde

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \text{ ve } H_1 : \sigma_\tau^2 > 0$$

hipotezleri test edilir.

- Eğer $\sigma_\tau^2 = 0$ ise tüm faktör düzeyleri aynıdır.
- Eğer $\sigma_\tau^2 > 0$ ise faktör düzeyleri arasında değişkenlik vardır.

Rastgele etkili modelin varsayımları altında $E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$ ve $E(MS_E) = \sigma^2$ olarak bulunur.

$H_o : \sigma_\tau^2 = 0$ hipotezi doğru olduğunda $\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}$ ve $\frac{SS_{Deneme}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{a-1}$ dir ve Cochran Teoremine göre birbirlerinden bağımsızdır.

$H_o : \sigma_\tau^2 = 0$ hipotezi doğru olduğunda test istatistiği olarak F_0 kullanırız ve

$$F_0 = \frac{SS_{Deneme}/(a-1)}{SS_E/(N-a)} \sim F_{a-1,N-a}$$

olur.

Eğer F_0 test istatistiğinin hesaplanan değeri F_{hesap} olmak üzere $F_{hesap} > F_{a-1,N-a,\alpha}$ olur ise $H_o : \sigma_\tau^2 = 0$ hipotezi reddedilir.

Varyanslar bilinmediği için varyans bileşenlerinin tahmin edicilerini kullanırız. Momentler yöntemi ile varyans bileşenlerini tahmin edebiliriz.

$E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$ ve $E(MS_E) = \sigma^2$ olduğundan

$$MS_{Deneme} = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2 ve MS_E = \sigma^2$$

eşitliklerinden tahmin ediciler

$$\widehat{\sigma}^2 = MS_E \text{ ve } \widehat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{Deneme} - MS_E}{n}$$

olarak bulunur.

Güven Aralıkları

σ^2 için %100$(1-\alpha)$'lık güven aralığı normallik varsayımı altında $\frac{SS_E}{\sigma^2} = \frac{(N-a)MS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}$ olduğundan

$$\frac{(N-a)MS_E}{\chi^2_{N-a,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-a)MS_E}{\chi^2_{N-a,1-\alpha/2}}$$

olarak bulunur.

$\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2_\tau+\sigma^2}$ için %100$(1-\alpha)$'lık güven aralığı normallik varsayımı altında $\frac{(a-1)MS_{Deneme}}{\sigma^2+n\sigma^2_\tau} \sim \chi^2_{a-1}$ ve $\frac{(N-a)MS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}$ olduğundan

$$\frac{L}{L+1} \leq \frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2_\tau+\sigma^2} \leq \frac{U}{U+1}$$

olarak bulunur. Burada,
$L = \frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Deneme}}{MS_E}\frac{1}{F_{a-1,N-a,\alpha/2}} - 1\right]$ ve $U = \frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Deneme}}{MS_E}\frac{1}{F_{a-1,N-a,1-\alpha/2}} - 1\right]$.

$\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_\tau^2+\sigma^2}$ oranı **sınıf içi korelasyon katsayısı (intraclass correlation coefficient)** olarak adlandırılır.

Bu oran yanıt değişkenindeki toplam değişimin ne kadarının faktör düzeylerinden kaynaklandığını ifade eder.

μ için %100$(1-\alpha)$'lık güven aralığı

$$\bar{y}_{..} - t_{N-a,\alpha/2}\sqrt{\frac{MS_{Deneme}}{n\ a}} \leq \mu \leq \bar{y}_{..} - t_{N-a,\alpha/2}\sqrt{\frac{MS_{Deneme}}{n\ a}}$$

olarak bulunur ve $\bar{y}_{..} = \frac{1}{n\ a}\sum_{=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$.

Rastgele Etki Modeli

Rastgele Etki Modeli

Örnek

Bir tekstil atölyesinin çok sayıda dokuma tezgahı vardır. Her bir tezgahın dakikada aynı kumaş çıktısı sağladığı varsayılıyor. Bu varsayımı araştırmak için 5 tezgah rastgele seçiliyor ve çıktıları farklı zamanlarda ölçülüyor. Aşağıdaki veriler elde ediliyor.

```
##            çıktılar çıktılar çıktılar çıktılar çıktılar
## 1. Tezgah     1.80     1.77     1.90     1.60     1.72
## 2. Tezgah     1.90     1.72     1.91     1.72     1.60
## 3. Tezgah     1.91     1.77     1.90     1.80     1.77
## 4. Tezgah     1.80     1.80     1.80     1.77     1.72
## 5. Tezgah     1.90     1.80     1.77     1.68     1.80
```

Bu veri için

a) ANOVA tablosunu oluşturarak $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ $H_1 : \sigma_\tau^2 \neq 0$ hipotezlerini test ederek yorumlayınız.

b) σ^2 ve σ_τ^2 için tahmin edicileri bulunuz.

c) σ^2, $\sigma_\tau^2/(\sigma^2 + \sigma_\tau^2)$ ve μ için %95 lik güzen aralıkları oluşturunuz.

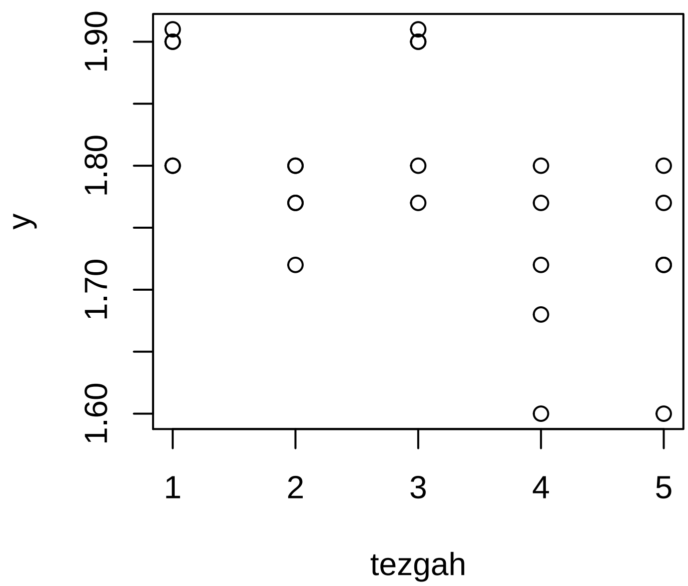
d) ANOVA'nın varsayımlarını kontrol ediniz.

ÇÖZÜM

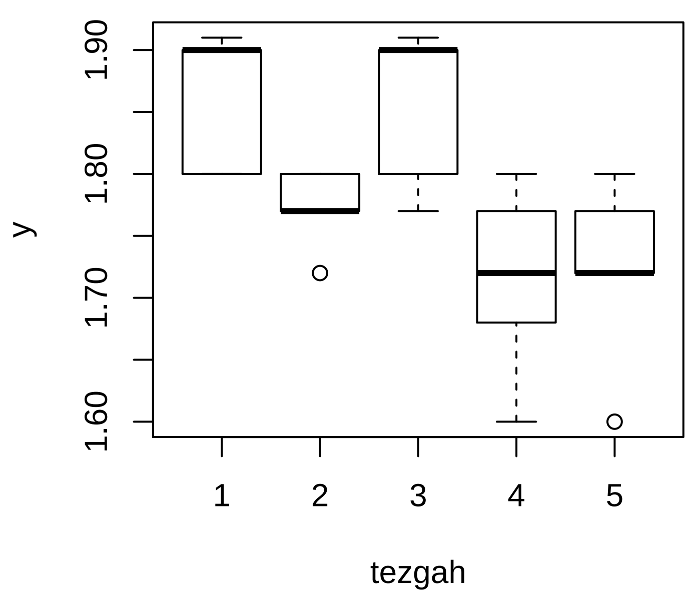
```
y<- c(1.80,1.90,1.91,1.80,1.90,1.77,1.72,1.77,1.80,1.80,1.90,1.91,1.90,1.80,1.77,1.60,1.72,1.80,1.77,1.6
tezgah<- factor(rep(1:5, each= 5))
data<- data.frame(y,tezgah)
str(data)
```

```
## 'data.frame':    25 obs. of  2 variables:
##  $ y     : num  1.8 1.9 1.91 1.8 1.9 1.77 1.72 1.77 1.8 1.8 ...
##  $ tezgah: Factor w/ 5 levels "1","2","3","4",..: 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 ...
```

```
stripchart(y ~ tezgah, vertical = TRUE, pc=1, xlab = "tezgah")
```




```r
boxplot(y ~ tezgah)
```



a) ANOVA tablosu sabit etkili modelde olduğu gibi oluşturulur.

```r
anova<-aov(y ~ tezgah)
summary(anova)
```

```
##             Df  Sum Sq  Mean Sq F value  Pr(>F)
## tezgah       4 0.10074 0.025186   6.107 0.00222 **
## Residuals   20 0.08248 0.004124
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ANOVA tablosuna göre $p - value = 0.00222 < 0.005$ olduğundan $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ hipotezi red edilir. Böylece, tezgahların kumaş çıktıları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

b)

Rastgele etki modeli için "lme4" paketindeki "lmer" fonksiyonunu kullanacağız.

```r
library(lme4)
random_anova <- lmer(y ~ (1 | tezgah), data = data)
summary(random_anova)
```

```
## Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
## Formula: y ~ (1 | tezgah)
##    Data: data
##
## REML criterion at convergence: -53.2
##
## Scaled residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.0609 -0.7110 -0.0648  0.7875  1.1576
##
## Random effects:
##  Groups   Name        Variance Std.Dev.
##  tezgah   (Intercept) 0.004212 0.06490
##  Residual             0.004124 0.06422
## Number of obs: 25, groups:  tezgah, 5
##
## Fixed effects:
##             Estimate Std. Error t value
## (Intercept)  1.78520    0.03174   56.24
```

Rastgele etki modeli olduğu için lmer de "(1 | tezgah)" kullanırız. Farklı modeller için (mixed effect gibi) bu fonksiyon kullanılabilir.

Bu sonuca göre varyanslar için tahmin ediciler $\widehat{\sigma}_\tau^2 = 0.004212$ ve $\widehat{\sigma}^2 = 0.004124$ bulunur.

Ayrıca, $\widehat{\sigma}_\tau^2/(\widehat{\sigma}^2 + \widehat{\sigma}_\tau^2) = 0.004212/(0.004212 + 0.004124) = 0.5052783$ bulunur.

Bu oran bize tezgah türlerindeki farklılığın ürün çıktısındaki farklılığın ne kadarını açıkladığını söyler.

Böylece, kumaş çıktısındaki farklılığın %50,5 i tezgah türündeki farklılıktan kaynaklanmaktadır.

c)

confint(random_anova) ile tam olarak hesaplayamadığımız σ_τ^2 için yaklaşık güven aralığı bulunur.

```r
confint(random_anova)
```

```
##                  2.5 %    97.5 %
## .sig01      0.02181814 0.1353173
## .sigma      0.04848987 0.0907209
## (Intercept) 1.71694536 1.8534546
```

Sonuçtaki ilk satır σ_τ^2 için %95 lik yaklaşık güven aralığıdır ve $0.02181814 \leq \sigma_\tau^2 \leq 0.1353173$ bulunur.

Ayrıca, son satırdan (lineer modeldeki eğim katsayısı gibidir) μ için %95 lik güven aralığı $1.71694536 \leq \mu \leq 1.8534546$ olarak bulunur.

d)

Normallik varsayımı için artıkları kullanırız. Bu modeldeki artıklarımız aşağıdaki gibidir.

```r
residuals(anova)
```

```
##      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10     11
## -0.062  0.038  0.048 -0.062  0.038 -0.002 -0.052 -0.002  0.028  0.028  0.044
##     12     13     14     15     16     17     18     19     20     21     22
##  0.054  0.044 -0.056 -0.086 -0.114  0.006  0.086  0.056 -0.034 -0.002 -0.122
##     23     24     25
##  0.048 -0.002  0.078
```

Aşağıda normallik için 5 farklı test uygulanmıştır. Kolmogorov-Smirnov, Shapiro Wilk, Liiliefor, Anderson-Darling ve Cramer-Von Mises testleri.

```r
ks.test(residuals(anova),"pnorm",mean(residuals(anova)),sd(residuals(anova)))
```

```
##
##  One-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  residuals(anova)
## D = 0.16639, p-value = 0.4931
## alternative hypothesis: two-sided
```

```r
shapiro.test(residuals(anova))
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  residuals(anova)
## W = 0.92925, p-value = 0.08352
```

```r
library(nortest)
lillie.test(residuals(anova))
```

```
##
##  Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
##
## data:  residuals(anova)
## D = 0.16639, p-value = 0.07235
```

```r
library(goftest)
ad.test(residuals(anova),"pnorm",mean=mean(residuals(anova)),sd=sd(residuals(anova)),estimated=TRUE)
```

```
##
##  Anderson-Darling test of goodness-of-fit
##  Braun's adjustment using 5 groups
##  Null hypothesis: Normal distribution
##  with parameters mean = -3.60930903220424e-18, sd = 0.058623089876487
##  Parameters assumed to have been estimated from data
##
## data:  residuals(anova)
## Anmax = 2.2992, p-value = 0.2886
```

```r
cvm.test(residuals(anova),"pnorm",mean=mean(residuals(anova)),sd=sd(residuals(anova)),estimated=TRUE)
```

```
##
##  Cramer-von Mises test of goodness-of-fit
##  Braun's adjustment using 5 groups
##  Null hypothesis: Normal distribution
##  with parameters mean = -3.60930903220424e-18, sd = 0.058623089876487
##  Parameters assumed to have been estimated from data
##
## data:  residuals(anova)
## omega2max = 0.15408, p-value = 0.9135
```

Bu sonuçlara göre normallik varsayımı sağlanır.

Varyansların homejenliğini Bartlett ve Levene testleri ile kontrol edelim.

```r
bartlett.test(y ~ tezgah)
```

```
##
##  Bartlett test of homogeneity of variances
##
## data:  y by tezgah
## Bartlett's K-squared = 2.9051, df = 4, p-value = 0.5738
```

```r
library(car)
leveneTest(y, tezgah) #medyana göre
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
##       Df F value Pr(>F)
## group  4  0.3872 0.8152
##       20
```

```r
leveneTest(y, tezgah,mean) #ortalamaya göre
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)
##       Df F value Pr(>F)
## group  4  1.0158  0.423
##       20
```

Bu sonuçlara göre homojen varyanslılık varsayımı da sağlanmış olur.