Çoklu Karşılaştırmalar (Multiple Comparisons)

"$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, n$" biçiminde verilen tek faktörlü a farklı düzeye sahip olan ANOVA modelinde faktör düzeylerinin ortalamalarının eşitliği için $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a = \mu$ biçiminde verilen H_0 hipotezlerinin reddedilmesi faktör düzeylerinden en az iki tanesinin ortalamasının farklı olduğu bilgisini verir.

Fakat bu farklılığın hangi düzeylerin ortalamalarının birbirinden farklı olduğunu açıklamaz. Örneğin, μ_2'i μ_3 ve μ_4'den farklı mıdır? veya μ_1'i μ_2 ve μ_3'den farklı mıdır? Bu tip sorulara <u>çoklu karşılaştırma testleri</u> kullanarak cevap verilir. Literatürde birçok çoklu karşılaştırma testi mevcuttur. En sık kullanılan yöntemlerden bazılarını inceleyeceğiz.

1) Doğrusal (Lineer) Bağıntılar Metodu (Contrasts):

Birçok çoklu karşılaştırma yönteminde lineer bağıntı (contrast) kullanılmaktadır. Örneğin, 4 farklı düzeye sahip bir modelde düzeylerin ortalamaları μ_1, μ_2, μ_3 ve μ_4 olmak üzere

I- μ_3 ile μ_4 karşılaştırma

$H_0: \mu_3 = \mu_4 \Leftrightarrow \mu_3 - \mu_4 = 0$

$H_1: \mu_3 \neq \mu_4 \Leftrightarrow \mu_3 - \mu_4 \neq 0$

II. $\mu_1 + \mu_2$ ile $\mu_3 + \mu_4$ karşılaştırma

$H_0: \mu_1 + \mu_2 - (\mu_3 + \mu_4) = 0$

$H_1: \mu_1 + \mu_2 - (\mu_3 + \mu_4) \neq 0$

III. $2\mu_1$ ile $\mu_2 + \mu_3$ karşılaştırma

$H_0: 2\mu_1 = \mu_2 + \mu_3 \Leftrightarrow 2\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3) = 0$

$H_1: 2\mu_1 \neq \mu_2 + \mu_3 \Leftrightarrow 2\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3) \neq 0$

IV. $3\mu_1$ ile $\mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ karşılaştırma

$H_0: 3\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0$

$H_1: 3\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \neq 0$

gibi ortalamalar için farklı biçimde karşılaştırmalar yapılabilir.

* Lineer bağıntılar (linear contrast) ortalamalar μ_i'lerin lineer kombinasyonu olarak $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$ (c_i reel katsayılar) olmak üzere $\boxed{\Gamma = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i}$ biçiminde tanımlanır.

* Açıktır ki, $\Gamma = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ lineer olması için katsayıların $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$ eşitliğini sağlaması gerekir.

Lineer bağıntıları kullanarak H_0 ve H_1 hipotezlerini

$$\boxed{H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0 \quad \text{ve} \quad H_1: \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i \neq 0} \qquad (10)$$

biçiminde yazarız.

Yukarıdaki karşılaştırma sorunları için bu c_i katsayıları aşağıdaki gibi olur

I. $\left.\begin{aligned} H_0 &: \mu_3 - \mu_4 = 0 \\ H_1 &: \mu_3 - \mu_4 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 1,\ c_4 = -1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i = 0$

II. $H_0: \mu_1 + \mu_2 - (\mu_3 + \mu_4) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$ ve $c_3 = c_4 = -1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i = 0$

III. $H_0: 2\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3) = 0 \Rightarrow c_1 = 2,\ c_2 = c_3 = -1,\ c_4 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i = 0$

IV. $H_0: 3\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0 \Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = c_3 = c_4 = -1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i = 0$

Lineer bağıntılar için hipotezler hem t-testi ile hem de F-testi ile test edilebilir

Not: Katsayılardan herhangi ikisi $+1, -1$ ve diğerleri 0 olursa bu bağıntı ikili karşılaştırma olur. (I. gibi)

i) t-testi ile:

(10) da verilen hipotezleri sınamak için bir test istatistiği oluşturalım.

$\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ için μ_i yerine $\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.}$, $i = 1-a$ MLE tahmin edicisini kullanarak faktör düzeyleri ile bağıntıdaki c_i katsayılarından oluşan

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}} \qquad (11)$$

istatistiğini inceleyelim.

ANOVA nın varsayımlarından $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1-a$, $j = 1-n$ olduğundan

$y_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$, $i = 1-a$ dır.

Böylece, * $Var(C) = \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \, Var(\bar{y}_{i.}) = \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \frac{\sigma^2}{n} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2}$

* $\boxed{E(C) = \sum_{i=1}^{a} c_i E(\bar{y}_{i.}) = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i}$

bulunur.

$H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$ hipotezi doğru olduğunda, (11) de tanımladığımız C istatistiği normal dağılıma sahiptir ve $C \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2\right)$ olur

Dolayısıyla, $\boxed{\dfrac{C}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}} \sim N(0,1)}$ elde edilir

σ^2 bilinmediği için yansız tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2 = MS_E$ kullanılır.

$$MS_E = \frac{SS_E}{N-a} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2}{N-a}$$

Böylece, $\boxed{t_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}}{\sqrt{\frac{MS_E}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}} \sim t_{N-a}}$ test istatistiği (10) ile verilen hipotezleri test etmek için kullanılabilir.

<u>Sonuç olarak</u>, gözlemlerden hesaplanan t_0 değeri için eğer

$\boxed{\text{eğer } t_0 > t_{N-a,\alpha/2} \text{ veya } t_0 < -t_{N-a,\alpha/2} \text{ olur ise } H_0 \text{ hipotezi reddedilir}}$

<u>ii) F-testi ile</u>:

Yukarıda tanımlanan t_0 test istatistiğinin karesi kullanılarak F-testi için test istatistiği oluşturabiliriz

$$F_0 = t_0^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2}{\frac{MS_E}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2 \Big/ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}{MS_E} \equiv \frac{SS_C/1}{MS_E} \equiv \frac{MS_C}{MS_E}$$

biçiminde yazarız. Burada SS_C (Contrast sum of square): lineer bağıntılar için kareler toplamı olarak düşünebiliriz. $MS_C = \frac{SS_C}{1}$ ise kareler ortalamasıdır

$$* \quad SS_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}$$

dir ve <u>1-serbestlik derecesine</u> sahiptir.

H_0 hipotezi doğru olduğunda $F_0 = \dfrac{SS_C/1}{SS_E/N-a} = \dfrac{MS_C}{MS_E} \sim F_{1,N-a}$ dağılımına sahiptir

Böylece, veriden hesaplanan F_0 değeri için $F_0 > F_{1,N-a,\alpha}$ olduğunda

$H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$ H0 hipotezi reddedilir

* Ayrıca, t_0 test istatistiği kullanarak $\Gamma = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ biçimindeki lineer bağıntı için yüzde $100(1-\alpha)$ lık güven aralığını oluşturabiliriz.

$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}$ için $E(C) = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$, $Var(C) = \dfrac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2$ olduğundan

$\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ için yüzde $100(1-\alpha)$'lık güven aralığı

$$\boxed{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.} - t_{N-a,\alpha/2} \sqrt{\frac{MS_E}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2} \le \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i \le \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.} + t_{N-a,\alpha/2} \sqrt{\frac{MS_E}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2}} \quad (12)$$

biçiminde oluşturulur

* Eğer oluşturulan güven aralığı 0 içeriyorsa $H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$ H0 hipotezi reddedilemez.

* Eğer, her bir faktör düzeyi için gözlem sayıları eşit değil ise elde ettiğimiz sonuçlarda bazı küçük değişiklikler yapılır.

Tanımdaki $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$ yerine $\sum_{i=1}^{a} n_i c_i = 0$ olur

t_0 istatistiği $t_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}}{\sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}}$ ve $SS_C = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2}{\sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}$ biçiminde olur

2) Dik Doğrusal Bağıntılar (Orthogonal Contrasts):

Doğrusal bağıntıların özel bir durumudur.

$$\Gamma_1=\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i \quad \text{ve} \quad \Gamma_2=\sum_{i=1}^{a} d_i\mu_i$$

biçimindeki iki farklı doğrusal bağıntı için katsayılar c_i ve d_i, $i=1 \ldots a$ $\boxed{\sum_{i=1}^{a} c_i d_i=0}$ eşitliğini sağlıyor ise bu Γ_1 ve Γ_2 bağıntılarına <u>dik doğrusal bağıntı</u> denir.

a faktör düzeyinin ortalamalarının karşılaştırıldığı bir denemede en fazla (a-1) tane <u>dik lineer bağıntı</u> kurulabilir. Böylece her bir lineer bağıntının serbestlik derecesi 1'dir.

Faktör düzeyleri arasında dik doğrusal bağıntılar farklı biçimlerde oluşturulabilir. Genellikle, hangi faktör düzeyleri ile ilgilenilmişse bunların katsayıları 0'dan farklı olacak biçimde belirlenir.

Örneğin, $a=3$ faktör düzeyi için 1. düzey kontrol, 2. ve 3. ilgilenilen düzeyler olsun. Bu durumda uygun dik lineer bağıntılar aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Düzey	c	d
1 (kontrol)	-2	0
2	1	-1
3	1	1

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} c_i=-2+1+1=0, \quad \sum_{i=1}^{3} d_i=0-1+1=0$$

$$\text{ve} \quad \sum_{i=1}^{3} c_i d_i=(-2.0)+(1.-1)+(1.1)=0$$

* Böylece, dik doğrusal bağıntıdır.

* Bu dik doğrusal bağıntı için hipotezler

$$\underbrace{\begin{aligned} H_0&: \mu_2+\mu_3-2\mu_1=0 \\ H_1&: \mu_2+\mu_3-2\mu_1\neq 0 \end{aligned}}_{c_1=-2,\ c_2=c_3=1 \text{ için}} \quad \text{ve} \quad \underbrace{\begin{aligned} H_0&: \mu_3-\mu_2=0 \\ H_1&: \mu_3-\mu_2\neq 0 \end{aligned}}_{d_1=0,\ d_2=-1,\ d_3=1 \text{ için}}$$

* Deney yapılmadan önce hangi faktör düzeylerinin ortalamalarının karşılaştırılacağına karar verilmişse <u>doğrusal bağıntılar</u> ve <u>dik doğrusal bağıntılar</u> yöntemleri kullanılır.

Örnek: 3. haftada verilen sürücü kursları verisini inceleyelim

A, B, C ve D sürücü kurslarının öğrencilerin sınav notları üzerindeki etkisi araştırılmak isteniyor. Bu nedenle her bir sürücü kursuna rastgele 6 öğrenci atanarak deney oluşturulmuştur. Aşağıdaki veriler elde edilmiştir.

A	B	C	D
70	50	80	80
65	52	82	82
75	60	77	82
72	62	88	86
74	54	83	88
68	55	85	84

Faktör düzeyleri için ortalamalar $\bar{y}_{1.} = 70,67$, $\bar{y}_{2.} = 55,5$, $\bar{y}_{3.} = 82,5$ ve $\bar{y}_{4.} = 87$ olarak bulunmuştur.

ANOVA tablosunu aşağıdaki gibi oluşturmuştuk

Değişim kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F-test
Deneme (Faktör Düzeyleri)	3567,5	4−1=3	1189,167	73,78
Hata	322,33	24−4=20	16,1165	
Toplam	3889,83	24−1=23		

$F_0 = 73,78 > F_{3,20,0,05} = 3,10$ olduğundan $H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$ hipotezi $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde red edilir. Böylece en az iki ortalama birbirinden farklıdır sonucuna varırız!

Peki hangi ortalamalar? Bunun için çoklu karşılaştırma yöntemlerini kullanırız

a) $\begin{cases} H_0: \mu_1=\mu_2 \Leftrightarrow \mu_1-\mu_2=0 \\ H_1: \mu_1\neq\mu_2 \Leftrightarrow \mu_1-\mu_2\neq 0 \end{cases}$ hipotezlerini test edelim. Bu bir ikili karşılaştırmadır.

Doğrusal bağıntılar yöntemi ile bu hipotezleri yazabiliriz

$c_1=1,\ c_2=-1,\ c_3=c_4=0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i = \mu_1-\mu_2$ olur

Böylece $H_0: \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i = 0$ ve $H_1: \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i \neq 0$, burada $\sum_{i=1}^{4} c_i = 1-1+0+0=0$ dır.

Hipotezler doğrusal bağıntılar ile ifade edebildiğimizden hipotezleri sınamak için t-testi veya F-testleri kullanılabilir. Bunun için öncelikle SS_C hesaplayalım

$$SS_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}$$ (contrast sum of squares) olduğundan

$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = c_4 = 0$ için $\sum_{i=1}^{4} c_i^2 = 1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 2$ ve

$$\sum_{i=1}^{4} c_i \bar{y}_{i.} = 1.\bar{y}_{1.} + (-1).\bar{y}_{2.} + 0 + 0 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} = 70{,}67 - 55{,}5 = 15{,}17$$

Böylece, $SS_C = \dfrac{(15{,}17)^2}{\frac{1}{6}.2} = 3.(15{,}17)^2 = 690{,}3867$

$$F_0 = \frac{SS_C/1}{MSE} = \frac{690{,}3867}{16{,}1165} = 42{,}84 \quad \text{ve} \quad F_{1,20,0{,}05} = 4{,}35 \text{ dir}$$

ANOVA tablosundan

Böylece, $F_0 > 4{,}35$ olduğundan $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezi $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde red edilir. Sonuç olarak, $\mu_1 \neq \mu_2$ dir, yani A ile B kurslarına giden öğrencilerin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

b) $H_0: \mu_2 = \mu_3 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_3 = 0$
$H_1: \mu_2 \neq \mu_3 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_3 \neq 0$

hipotezleri için doğrusal bağıntı $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 0$ olmak üzere

$H_0: \sum_{i=1}^{4} c_i \mu_i = 0 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_3 = 0$ ve $H_1: \sum_{i=1}^{4} c_i \mu_i \neq 0 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_3 \neq 0$

biçiminde oluşturulur.

Bu durumda, $\sum_{i=1}^{4} c_i^2 = 0 + 1^2 + (-1)^2 + 0 = 2$ ve $\sum_{i=1}^{4} c_i \bar{y}_{i.} = 0 + \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} + 0 = 55{,}5 - 82{,}5 = -27$

Böylece, $$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{4} c_i \bar{y}_{i.}}{\sqrt{\frac{MSE}{n}\sum_{i=1}^{4} c_i^2}} = \frac{-27}{\sqrt{\frac{16{,}1165}{6}.2}} = \frac{-27}{2{,}3178} = -11{,}6490$$ → t istatistiği değeri ve $SS_C = \dfrac{(-27)^2}{\frac{1}{6}\cdot 2} = 2187$, $F_0 = t_0^2 = \dfrac{SS_C/1}{MS_E} = \dfrac{2187}{16,1165} = 135,699$ //

elde edilir.

* $t_0 = -11,649$ ve $t_{N-a,\alpha/2} = t_{20,0,025} = 2,086$ olduğundan $\underline{-11,69 < -2,086}$ dır.

Böylece, $\underline{H_0: \mu_2 - \mu_3 = 0}$ hipotezi red edilir. Yani, 0,05 anlamlılık düzeyinde

$\mu_2 \neq \mu_3$ dır

veya

* $F_0 = 135,699$ ve $F_{1,N-a,\alpha} = F_{1,20,0.05} = 4,35$ olduğundan

$\underline{135,699 > 4,35}$ dır. Böylece $\underline{H_0: \mu_2 - \mu_3 = 0 \text{ hipotezi red edilir}}$

Sonuç olarak, hem t-testi ile hemde F-testi ile aynı sonucu elde edildi

0,05 anlamlılık düzeyinde $\mu_2 \neq \mu_3$ olduğundan B ve C kurslarına giden öğrencilerin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark vardır

c) $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_3 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_3 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 \neq 0 \end{array}\right\}$ hipotezleri için $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 0$ alarak doğrusal bağıntı oluşturulur.

Böylece, $H_0: \sum_{i=1}^{4} c_i \mu_i = 0 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 = 0$ ve $H_1: \sum_{i=1}^{4} c_i \mu_i \neq 0 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 \neq 0$ olur

Bu durumda $\sum_{i=1}^{4} c_i^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0 = 2$ ve $\sum_{i=1}^{4} c_i \bar{y}_{i.} = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 70,67 - 82,5 = -11,83$ //

$SS_C = \dfrac{(-11,83)^2}{\frac{1}{6}\cdot 2} = 419,8467$, $F_0 = \dfrac{SS_C/1}{MS_E} = \dfrac{419,8467}{16,1165} = 26,0507$ // bulunur

$F_{1,20,0,05} = 4,35$ olduğundan $\underline{F_0 > F_{1,20,0.05}}$ dır.

Böylece, $\underline{H_0: \mu_1 - \mu_3 = 0 \text{ hipotezi red edilir}}$. Yani, 0,05 anlamlılık düzeyinde

$\mu_1 \neq \mu_3$ elde edilir

d) $H_0: \mu_3=\mu_4 \Leftrightarrow \mu_3-\mu_4=0$, $H_1: \mu_3\neq\mu_4 \Leftrightarrow \mu_3-\mu_4\neq 0$ hipotezleri için $c_1=c_2=0$, $c_3=1$, $c_4=-1$ seçerek doğrusal bağıntı oluşturulur

Böylece, $H_0: \mu_3-\mu_4=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i=0$ ve $H_1: \mu_3-\mu_4\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i\neq 0$ olur

Bu durumda, $\sum_{i=1}^{4} c_i^2=0^2+0^2+1^2+(-1)^2=2$ ve $\sum_{i=1}^{4} c_i\bar{y}_{i.} = 0+0+\bar{y}_{3.}-\bar{y}_{4.}=82,5-87=-4,5$ //

$$SS_C=\frac{(-4,5)^2}{\frac{1}{6}\cdot 2}=60,75 \quad , \quad F_0=\frac{SS_C/1}{MS_E}=\frac{60,75}{16,1165}=3,7654 \; //$$

$F_0=3,7654 < 4,35=F_{1,20,0,05}$ olduğundan $H_0: \mu_3-\mu_4=0$ hipotezi kabul edilir

Böylece, $\alpha=0,05$ anlamlılık düzeyinde $\mu_3=\mu_4$ yani C ve D sürücü kursuna giden öğrencilerin sınav notlarının ortalamalarının arasında anlamlı bir fark yoktur. !!!

Not: a, b, c ve d şıklarında μ_1, μ_2, μ_3 ve μ_4 ortalamaları için ikili karşılaştırmalar yapılmıştır

e) $H_0: \mu_1+\mu_2=\mu_3+\mu_4 \Leftrightarrow \mu_1+\mu_2-(\mu_3+\mu_4)=0$
$H_1: \mu_1+\mu_2\neq\mu_3+\mu_4 \Leftrightarrow \mu_1+\mu_2-(\mu_3+\mu_4)\neq 0$ hipotezlerini

doğrusal bağıntı ile $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=-1$, $c_4=-1$ seçerek oluşturabiliriz

Bu durumda $\sum_{i=1}^{4} c_i=1+1-1-1=0$ dır. (Doğrusallık koşulu sağlanır)

Böylece $H_0: \mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_4=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i=0$

$H_1: \mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_4\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i\mu_i\neq 0$ olur

Bu durumda, $\sum_{i=1}^{4} c_i^2=1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2=4$ ve

$\sum_{i=1}^{4} c_i\bar{y}_{i.}=\bar{y}_{1.}+\bar{y}_{2.}-\bar{y}_{3.}-\bar{y}_{4.}=70,67+55,5-82,5-87=-43,33$ //

$$SS_c = \frac{(-43{,}33)^2}{\frac{1}{6}(4)} = 2816{,}2333 \quad , \quad F_0 = \frac{SS_c}{MSE} = \frac{2816{,}2333}{16{,}1165} = 174{,}7422$$

$\frac{1}{6} \to n$, $(4) \to \sum c_i^2$

Böylece, $F_0 = 174{,}7422 > 4{,}35 = F_{1,20,0.05}$ olduğundan $H_0: \mu_1+\mu_2 = \mu_3+\mu_4$ hipotezi red edilir.

Sonuç olarak $\mu_1+\mu_2 \neq \mu_3+\mu_4$ dir, yani "A ve B sürücü kurslarına giden öğrencilerin sınav notlarının ortalamaları ile C ve D sürücü kurslarına giden öğrencilerin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark vardır"

f) (4 farklı sürücü kursu olduğundan faktör düzeyi $a=4$, dolayısıyla en fazla $a-1=3$ tane dik doğrusal bağıntılar oluşturulabilir.)

* Bu 4 farklı düzey için dik doğrusal bağıntıları oluşturalım ve anlamlılıklarını test edelim

Çözüm: $a=4$ olduğundan en fazla 3 farklı dik doğrusal bağıntılar kurulabilir ve bunların herbirinin serbestlik derecesi 1 dir

Hipotezler	Doğrusal bağıntı katsayıları
$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = c_4 = 0$
$H_0: \mu_1+\mu_2 = \mu_3+\mu_4$	$d_1 = d_2 = 1, d_3 = d_4 = -1$
$H_0: \mu_3 = \mu_4$	$e_1 = e_2 = 0, e_3 = 1, e_4 = -1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} c_i = 0, \sum_{i=1}^{4} d_i = 0, \sum_{i=1}^{4} e_i = 0$ yani, her biri doğrusaldır

Ayrıca, $\sum_{i=1}^{4} c_i d_i = (1\cdot1) + (-1\cdot1) + 0 + 0 = 0$

$\sum_{i=1}^{4} c_i e_i = 0+0+0+0 = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} d_i e_i = 0+0+(-1)+(1) = 0$

olduğundan bu 3 doğrusal bağıntı birbirlerine diktir

Böylece, oluşturulabilecek 3 dik doğrusal bağıntılar bu biçimde olabilir

(Bunlar tek değildir. Devam olarak başka biçimde de bulunabilir. Ancak en fazla 3 tane olacaktır!!)

* Not

c	d	e
1	1	0
-1	1	0
0	-1	1
0	-1	-1

biçiminde göstererek birbirlerine dik olduğunu daha kolay bir biçimde görebiliriz.

3 dik doğrusal bağıntı 3 farklı tipte hipotezi içerir.

$H_0: \mu_1=\mu_2 \Rightarrow$ a)'da incelenir. Bu durumda $SS_C = 680,3867$

$H_0: \mu_1+\mu_2=\mu_3+\mu_4 \Rightarrow$ e)'de incelendi. Bu durumda $SS_C = 2816,2333$

$H_0: \mu_3=\mu_4 \Rightarrow$ d)'de incelendi. " $SS_C = 60,75$

Bu 3 dik doğrusal bağıntıların SS_C değerlerinin toplamı

$680,3867 + 2816,2333 + 60,75 = 3567,37$ olarak bulunur

Bu toplam, denemeler (faktör düzeyleri) arası kareler toplamı $SS_D = 3567,5$ değerine eşittir (yuvarlamadan kaynaklı küçük farklılıklar olabilir.)

ANOVA tablosunu dik doğrusal bağıntılar ile aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler Ortalaması	F_0-test	p-değeri
Denemeler	3567,5	3	1189,167	73,78	5.43×10^{-11}
Dik bağıntılar					
$\mu_1=\mu_2$	680,3867	1	680,3867	42,84	
$\mu_1+\mu_2=\mu_3+\mu_4$	2816,2333	1	2816,2333	174,7422	
$\mu_3=\mu_4$	60,75	1	60,75	3,7604	
Hata	322,33	20	16,1165		
Toplam	3889,83	23			

* $F_{1,20,0.05}=4,35$ olduğundan $H_0:\mu_1=\mu_2$ ve $H_0:\mu_1+\mu_2=\mu_3+\mu_4$ hipotezleri red edilir. Fakat, $H_0:\mu_3=\mu_4$ hipotezi kabul edilir

* Eğer deney yapılmadan önce hangi faktör düzeylerinin ortalamalarının karşılaştırılacağı belirlenmişse doğrusal bağıntılar (linear contrast) ve dik doğrusal bağıntılar (orthogonal contrasts) yöntemleri kullanılabilir.

a faktör düzeyinin olduğu bir denemede en fazla a-1 tane dik doğrusal bağıntılar olacaktır. Birçok denemede a-1 tane bağıntı yeterli olmayabilir. Örneğin, deney yapıldıktan sonra farklı karşılaştırmalar yapılmak istenebilir. Dolayısıyla, a tane düzeyin ortalamaları arasındaki tüm mümkün karşılaştırmaları yapmak isteyebiliriz. Bu durumda "Scheffe yöntemini" kullanırız.

3) Scheffe Yöntemi:

Önceden planlanmış az sayıdaki bağıntıyı (yani karşılaştırmalar) değil faktörün tüm düzeyleri için olası tüm bağıntıları test etmek için kullanılan bir yöntemdir.

Varsayalım ki faktör düzeyi a tane olan bir denemede düzey ortalamaları ile ilgili m farklı bağıntı (karşılaştırma) yapılmak isteniyor.

Bu bağıntıları $\boxed{\Gamma_u = c_{1u}\mu_1 + c_{2u}\mu_2 + \cdots + c_{au}\mu_a \quad , u=1,\ldots,m}$ (14)

biçiminde yazabiliriz. (Açıktır ki her bir Γ_u için $H_0: \Gamma_u = 0$, $H_1: \Gamma_u \neq 0$ biçiminde karşılaştırmalar test edilebilir.)

(14)de μ_i, $i=1,\ldots,a$ ortalamaları yerine tahmin edicileri olan $\bar{y}_{i.}$, $i=1,\ldots,a$ yazalım.

$$C_u = c_{1u}\bar{y}_{1.} + c_{2u}\bar{y}_{2.} + \cdots + c_{au}\bar{y}_{a.} \quad , u=1,\ldots,m \quad (15)$$

Normallik varsayımı altında $\bar{y}_{i.} \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}\right)$, $i=1,\ldots,a$ olduğundan

(gözlem sayıları farklı olursa $n_1, n_2, \ldots, n_a$ ise.)

$$E(C_u) = c_{1u}\mu_1 + c_{2u}\mu_2 + \cdots + c_{au}\mu_a = \Gamma_u$$

ve

$$Var(C_u) = c_{1u}^2 \frac{\sigma^2}{n_1} + c_{2u}^2 \frac{\sigma^2}{n_2} + \dots + c_{au}^2 \frac{\sigma^2}{n_a} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{iu}^2}{n_i} \quad , u=1,\dots m$$

bulunur. σ^2 bilinmediğinden yansız tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2 = MS_E$ kullanılarak C_u istatistiğinin varyansı

$$Var(C_u) = MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{iu}^2}{n_i} \quad , u=1 \dots m \quad \text{olur}$$

Böylece herhangi bir $C_u, u=1 \dots m$ bağıntısı için standart hata

$$S_{C_u} = \sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{iu}^2}{n_i}} \quad , u=1, \dots m \text{ biçimindedir.}$$

Scheffe yöntemi ile

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \Gamma_u = 0 \Leftrightarrow c_{1u}\mu_1 + c_{2u}\mu_2 + \dots + c_{au}\mu_a = 0 \\ H_1: \Gamma_u \neq 0 \Leftrightarrow c_{1u}\mu_1 + c_{2u}\mu_2 + \dots + c_{au}\mu_a \neq 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

hipotezlerini test etmek için $C_u = \sum_{i=1}^{a} c_{iu}\bar{y}_{i.}$ değeri ile

$$\boxed{S_{\alpha,u} = S_{C_u}\sqrt{(a-1)\, F_{a-1, N-a, \alpha}}} \qquad (17)$$

biçiminde tanımlanan $S_{\alpha,u}$ değeri karşılaştırılır.

** Eğer veriden hesaplanan C_u değeri için $|C_u| > S_{\alpha,u}$ ise $H_0: \Gamma_u = 0$ hipotezi red edilir.

Yukarıdaki örnek için Scheffe yöntemini kullanalım

Sürücü tuzu verileri için

$$\Gamma_1 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$
$$\Gamma_2 = \mu_1 - \mu_4$$

bağıntıları ile ilgili karşılaştırma yapalım

$$H_0: \Gamma_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$$
$$H_1: \Gamma_1 \neq 0 \Leftrightarrow \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0$$

ve

$$H_0: \Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_4 = 0$$
$$H_1: \Gamma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_4 \neq 0$$

biçiminde olur

Γ_1 için $c_{11} = c_{21} = 1, \; c_{31} = c_{41} = -1$

Γ_2 için $c_{12} = 1, \; c_{22} = c_{32} = 0, \; c_{42} = -1$

$\therefore$ Sürücü kursu verileri için düzenlenirken gözlem değerleri eşittir, $n_1=n_2=n_3=n_4=6$.

$\therefore MS_E = 16{,}1165$

$\ast\ast \underline{\Gamma_1 \text{ için}}$: $S_{C_1} = \sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{i1}^2}{n_i}} = \sqrt{16{,}1165 \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{i1}^2}{6}} = \sqrt{\frac{16{,}1165\,(1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2)}{6}}$

$= \sqrt{10{,}74433} = 3{,}2778$ //

$\ast$ $\alpha=0{,}05$ olmak üzere $S_{\alpha,u} = S_{0{,}05,1} = S_{C_1} \sqrt{\underbrace{(4-1)}_{a-1} \underbrace{F_{3,20,0{,}05}}_{3,20}}$ olduğundan

$S_{0{,}05,1} = 3{,}2778 \sqrt{3 \cdot 3} = 9.836$ //

ve $C_1 = \sum_{i=1}^{a} c_{i1} \bar{y}_{i.} = \bar{y}_{1.} + \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} = 70.67 + 55{,}5 - 82{,}5 - 87 = -43{,}33$ //

$\downarrow$ Γ_1 için c_i, $i=1-a$ katsayıları

$\underline{\text{Sonuç}}$: $|C_1| = 43{,}33 > 9{,}836 = S_{0{,}05,1}$ olduğundan $H_0: \Gamma_1 = 0$ hipotezi red edilir.

Böylece $\mu_1+\mu_2 \neq \mu_3+\mu_4$ dır (Örnek 1'deki (d) ile aynı sonuç elde edilmiştir)

$\ast\ast \underline{\Gamma_2 \text{ için}}$; $S_{C_2} = \sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_{i2}^2}{n_i}} = \sqrt{16{,}1165 \, \frac{1^2+0^2+0^2+(-1)^2}{6}} = \sqrt{5{,}3722} = 2{,}3178$

$S_{0.05,2} = S_{C_2} \sqrt{(4-1) F_{3,20,0.05}} = (2.3178) \sqrt{3 \cdot (3{,}10)} = 7.0683$ //

ve $C_2 = \sum_{i=1}^{a} c_{i2} \bar{y}_{i.} = 1 \cdot \bar{y}_{1.} + 0 + 0 - \bar{y}_{4.} = 70{,}67 - 87 = -16{,}33$ //

$\underline{\text{Sonuç}}$: $|C_2| = 16{,}33 > 7{,}0683 = S_{0{,}05,2}$ olduğundan $H_0: \Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_4 = 0$ hipotezi red edilir.

Böylece, $\mu_1 \neq \mu_4 \Rightarrow$ A ve D sürücü kurslarına giden öğrencilerin sınav notları arasında anlamlı bir fark vardır

** Scheffe yöntemi ile faktörün düzeylerinin tüm mümkün karşılaştırmalarını yapabiliriz. Örneğin, $H_0: \mu_1+\mu_3=\mu_2+\mu_4$ veya $H_0: \mu_1=\mu_2+\mu_3$ veya $H_0: 2\mu_1=\mu_2+\mu_4$ gibi tüm mümkün hipotezler sınanabilir.

Scheffe testi genellikle karmaşık karşılaştırmalarda veya doğrusal bağıntılar veya dik doğrusal bağıntılar için tercih edilir.

Ancak, ikili karşılaştırmalar yani $H_0: \mu_i=\mu_j$ tüm i,j için biçimindeki hipotezlerin test edilmesi için güçlü değildir. Dolayısıyla ikili karşılaştırmalar için daha güçlü olan "Fisher'in en küçük anlamlı fark testi" ve "Tukey testi" kullanılabilir.

4) Fisher'in en küçük anlamlı fark testi (Fisher Least Significant Difference (LSD) Method)

$H_0: \mu_1=\mu_2=\dots=\mu_a$ hipotezinin reddedilmesi durumunda faktör düzeylerinin ortalamaları arasındaki mümkün tüm ikili karşılaştırmaları yapmak için kullanılır.

$H_0: \mu_i=\mu_j, \ \forall i\neq j$ hipotezini test etmek için t-testi yaparız.

Normallik varsayımından $\bar{y}_{i.} \sim N(\mu_i, \sigma^2/n_i)$ ve $\bar{y}_{j.} \sim N(\mu_j, \sigma^2/n_j)$ olur.

Böylece, $E(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.})=\mu_i-\mu_j$ ve $Var(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.})=\sigma^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)$ olur.

$\dfrac{\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}-(\mu_i+\mu_j)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}} \sim N(0,1)$ olduğundan $\hat{\sigma}^2=MS_E$ kullanırsak $H_0: \mu_i=\mu_j$ hipotezi doğru iken

$$\boxed{t_0=\frac{\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}}{\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}} \sim t_{N-a}} \quad (18) \text{ olur.}$$

Bu test istatistiğini kullanarak → Gözlem sayıları farklı n_i, n_j !!

$$\boxed{|\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}| > t_{N-a, \alpha/2}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \text{ olur ise } H_0: \mu_i=\mu_j \text{ hipotezi reddedilir}}$$

Eğer i. ve j. faktör düzeylerindeki gözlem sayıları eşit ise $n_i = n_j = n$ için

$$\boxed{|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > t_{N-a,\alpha/2}\sqrt{\frac{2MSE}{n}} \text{ olur ise } H_0: \mu_i = \mu_j} \text{ red edilir}$$

$H_0: \mu_i = \mu_j$ red edilmesinin anlamı: i. ve j. faktör düzeylerinin ortalamaları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

Örnek: Sürücü kursu verileri için μ_2 ile μ_4 ve μ_3 ile μ_4 arasında ikili karşılaştırmalar yapalım.

a) μ_2 ile μ_4 için ikili karşılaştırma $H_0: \mu_2 = \mu_4$ ve $H_1: \mu_2 \neq \mu_4$ hipotezlerini test etmektir.

$|\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.}| = |55,5 - 87| = 32,5$ ve $n_2 = n_4 = 6$, $t_{N-a,\alpha/2} = t_{20,0.025} = 2,086$

$MSE = 16,1165 \Rightarrow t_{20,0.025} \cdot \sqrt{\frac{2MSE}{n}} = 2,086\sqrt{\frac{2 \cdot 16,1165}{6}} = 4,83494$

Sonuç: $|\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.}| = 31,5 > 4,8349 = t_{20,0.025}\sqrt{\frac{2MSE}{n}}$ olduğundan $H_0: \mu_2 = \mu_4$ hipotezi red edilir. Böylece B ve D sürücü kurslarının öğrencilerinin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark vardır.

b) μ_3 ile μ_4 için ikili karşılaştırma $H_0: \mu_3 = \mu_4$ ve $H_1: \mu_3 \neq \mu_4$ hipotezlerini test etmektir.

$|\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.}| = |82,5 - 87| = 4,5$ ve $t_{20,0.025}\sqrt{\frac{2 \cdot 16,1165}{6}} = 4,8349$ dır.

Sonuç: $|\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.}| = \underline{4,5 < 4,8349}$ olduğundan $H_0: \mu_3 = \mu_4$ hipotezi kabul edilir.

* Böylece, C ve D sürücü kurslarının öğrencilerinin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark yoktur!!!

(# Benzer olarak tüm ikili karşılaştırmaları yapabiliriz.)

5) Tukey testi:

Fisher LSD testi gibi $H_0: \mu_i = \mu_j, \forall i \neq j$ biçimindeki tüm ikili karşılaştırmaları yapabilmek için Tukey testi kullanılabilir.

Tukey testi ile düzeylerdeki gözlem sayıları eşit olduğunda tüm karşılaştırmalar için toplam I-tip hata tam olarak "α" ve gözlem sayıları eşit değil ise I-tip hata en çok "α" olmaktadır.

Tukey testi
$$\boxed{q = \frac{\max(\bar{y}_{i.}) - \min(\bar{y}_{i.})}{\sqrt{MSE/n}}} \quad (19)$$

biçiminde tanımlanan Studentlaştırılmış aralık istatistiğine (Studentized range statistic) dayanır.

$q_\alpha(a,f)$: Studentlaştırılmış aralık istatistiğinin tablo değeridir (Tablodan bakılır)

a = faktör düzey sayısı, α = I-tip hata

f = MS_E'nin serbestlik derecesi

Eğer faktör düzeylerinin gözlem sayıları eşit ise ($n_1 = n_2 = \dots = n_a = n$)

$T_\alpha = q_\alpha(a,f)\sqrt{\frac{MSE}{n}}$ olmak üzere $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > T_\alpha$ olur ise

$H_0: \mu_i = \mu_j, \forall i \neq j$ hipotezi red edilir

Eğer düzeylerdeki gözlem sayıları eşit değil ise

$T_\alpha = q_\alpha(a,f)\sqrt{\frac{MSE}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$ olmak üzere $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > T_\alpha$ olur ise

$H_0: \mu_i = \mu_j, \forall i \neq j$ hipotezi red edilir

Not: ANOVA modelinde $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$ hipotezi reddedildiğinde ikili karşılaştırmaların hiçbirinin reddedilmediği veya ikili karşılaştırmaların bazılarının reddedildiği durumlar olabilir.

Çünkü, ANOVA'da yapılan genel F testi ortalamalar için mümkün olan tüm karşılaştırmaları içerir. (ikili karşılaştırmalar ve fazlası vardır)

Örnek: Sürücü kursu verisi için tüm muamele ikili karşılaştırmaları Tukey testi ile yapalım.

Bu veride 4 faktör düzeyi olduğundan $\binom{4}{2} = 6$ tane ikili karşılaştırma yapabiliriz.

Bu karşılaştırmalar μ_1 ile μ_2, μ_1 ile μ_3, μ_1 ile μ_4, μ_2 ile μ_3, μ_2 ile μ_4 ve μ_3 ile μ_4 dır.

$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 6$.

Bu veri için, $n = 6$ $MSE = 16,1165$ ve MSE nin serbestlik derecesi $N - a = 24 - 4 = 20$ dir.

Bu durumda Tukey q istatistiği tablosundan $q_\alpha(a,f) = q_{0.05}(4,20) = 3,96$ dır.

Böylece, $T_\alpha = T_{0.05} = q_{0.05}(4,20)\sqrt{\dfrac{MSE}{n}} = 3.96\sqrt{\dfrac{16.1165}{6}} = 6,4001$ //

*Eğer herhangi iki faktör düzeyinin ortalamalarının farkının mutlak değeri $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}| > 6,4001$ olur ise $H_0: \mu_i - \mu_j = 0$ hipotezi red edilir.

i) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ için: $|\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.}| = |70.67 - 55,5| = 15,17 > 6.4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezi red edilir

ii) $H_0: \mu_1 - \mu_3 = 0$ için: $|\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.}| = |70.67 - 82.5| = 11.83 > 6,4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_1 - \mu_3 = 0$ hipotezi red edilir

iii) $H_0: \mu_1 - \mu_4 = 0$ için: $|\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{4.}| = |70.67 - 87| = 16,33 > 6.4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_1 - \mu_4 = 0$ hipotezi red edilir

iv) $H_0: \mu_2 - \mu_3 = 0$ için: $|\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.}| = |55,5 - 82,5| = 27 > 6,4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_2 - \mu_3 = 0$ hipotezi red edilir

v) $H_0: \mu_2 - \mu_4 = 0$ için: $|\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.}| = |55,5 - 87| = 31,5 > 6,4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_2 - \mu_4 = 0$ hipotezi red edilir

vi) $H_0: \mu_3 - \mu_4 = 0$ için: $|\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.}| = |82,5 - 87,0| = 4,5 < 6,4001 = T_\alpha$ olduğundan $H_0: \mu_3 - \mu_4 = 0$ hipotezi kabul edilir. !!!

* Sonuç olarak 6. ikili karşılaştırma haricinde tüm ikili karşılaştırmalarda H_0 hipotezleri red edilir.

→ Böylece, C ve D dürüsü kurslarına gelen öğrencilerin sınav notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark yoktur. Ancak, A, B, C ve D kurslarının tüm mümkün ikili karşılaştırmalarında öğrencilerin notlarının ortalamaları arasında anlamlı bir fark vardır.

* **Not**: Ayrıca, Tukey testi ile $\mu_i - \mu_j, (i \neq j)$ için %100(1-α)'lık güven aralığı

$$\boxed{(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}) - q_\alpha(a,f)\sqrt{\frac{MS_E}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}) + q_\alpha(a,f)\sqrt{\frac{MS_E}{n}}}$$

biçiminde oluşturulur.

* Eğer $\mu_i - \mu_j$ için oluşturulan güven aralığı 0 noktasını içeriyor ise $H_0: \mu_i - \mu_j = 0$ hipotezi kabul edilir.

---

6) Duncan Çoklu Aralık Testi:

Faktör düzeylerinin ortalamaları arasındaki tüm mümkün ikili karşılaştırmaları yapmak için önerilen bir başka yöntem Duncan Çoklu Aralık Testidir (Duncan multiple range test).

$H_0: \mu_i = \mu_j, \ \forall i \neq j$ hipotezini sınamak için

$$R_p = \begin{cases} r_\alpha(p,f)\sqrt{\dfrac{MS_E}{n}}, & n_1 = n_2 = \dots = n_a = n \text{ ise} \\[2ex] r_\alpha(p,f)\sqrt{\dfrac{MS_E}{a/\sum_{i=1}^{a} 1/n_i}}, & \text{düzeylerdeki gözlem sayıları farklı ise} \end{cases}$$

değerleri hesaplanır. $(p = 2,3,\dots,a)$

Burada, "$r_\alpha(p,f)$"; α-anlam düzeyi, $p = 2,3,\dots,a$, f: MS_E'nin serbestlik derecesi olmak üzere Duncan Çoklu Aralık testinin tablo değeridir.

Faktör düzeylerinin ortalamaları $\bar{y}_{1.}, \bar{y}_{2.}, \dots, \bar{y}_{a.}$ değerleri

$$\bar{y}_{(1).} \le \bar{y}_{(2).} \le \dots \le \bar{y}_{(a).}$$ biçiminde küçükten büyüğe sıralanır.

$p = 2, 3, \dots, a$ için R_p değerleri hesaplanır.

Eğer $\bar{y}_{(2).} - \bar{y}_{(1).} > R_2$ olur ise en küçük ve ondan sonra en küçük ortalamaya sahip olan faktör düzeylerinin ortalamaları arasında fark vardır.

Tüm mukayese karşılaştırmalar

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{y}_{(a).} - \bar{y}_{(1).} > R_a \\ \bar{y}_{(a).} - \bar{y}_{(2).} > R_{a-1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{(a).} - \bar{y}_{(a-1).} > R_2 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \bar{y}_{(3).} - \bar{y}_{(2).} > R_3 \\ \bar{y}_{(3).} - \bar{y}_{(2).} > R_4 \end{array} \quad \bar{y}_{(2).} - \bar{y}_{(1).} > R_2 \right\}$$

eşitlikleri ile yapılır. Eğer $\bar{y}_{(a).} - \bar{y}_{(2).} > R_{a-1}$ olur ise ortalamaların küçükten büyüğe sıralanmasında 2. ile a. olan faktör düzeylerinin ortalamaları arasında anlamlı bir fark vardır.

---

7) Dunnett Testi:

a tane faktör düzeyi olan bir durumda eğer bu düzeylerden biri tanesi kontrol grubu olarak seçilip diğer tüm düzeyler bu kontrol düzeyi ile ikili karşılaştırılmak isteniyor ise Dunnet testi kullanılır. Bu durumda $(a-1)$ tane ikili karşılaştırma yapılır ve hipotezler ise $H_0: \mu_i = \mu_a$ ve $H_1: \mu_i \neq \mu_a$, $i = 1, \dots, a-1$ biçimindedir.

Eğer $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{a.}| > d_\alpha(a-1, f)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_a}\right)}$ olur ise $H_0: \mu_i = \mu_a$ hipotezi red edilir.

Burada "$d_\alpha(a-1, f)$" Dunnet testinin tablo değeridir.