Rastgele Etkili Model (Random effects model)

$\boxed{(2):\ y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}\ ,\ i=1,\dots,a;\ j=1,\dots,n}$ biçimindeki tek faktörlü

bu faktörün a tane düzeyi ve her düzeyde n tane gözlemin olduğu tek faktörlü varyans analizinin matematiksel modelini ele alalım.

(2) modelinde τ_i i. faktör düzeyinin (denemenin) etkisi olarak ifade edilir.

(2) modelinin τ_i'ye göre faktör düzeylerinin etkisine göre iki farklı model tanımladığından bahsetmiştim.

* Eğer a tane faktör düzeyi araştırmacı tarafından özel olarak seçilirse bu model "Sabit Etkili Model (Fixed Effects Model)" olarak adlandırılır.

(Not: Şimdiye kadar bu model ile ilgilendik.)

** Eğer araştırmacı denemede faktör düzeylerinin popülasyonundan rastgele a tanesini seçerek denemeyi gerçekleştirirse bu model "Rastgele Etkili Model (Random Effects Model)" olarak adlandırılır.

\# Rastgele etkili modelin sonuçları tüm faktör seviyeleri için geçerli olur.

\# Sabit etkili modelin sonuçları sadece denemede kullanılan faktör düzeyleri geçerlidir.

Rastgele etkili model için de (2) ile verilen modeli kullanacağız. Dolayısıyla, sabit ve rastgele etkili modellerin matematiksel ifadeleri aynıdır. Fakat, parametrelerinin yorumları farklıdır.

\# Rastgele etkili modelde faktör düzeylerinin etkisi "τ_i; $i=1-a$" bir rastgele değişkendir.

* Rastgele etkili modelde τ_i ve ε_{ij} birbirlerinden bağımsız rastgele değişkenlerdir.

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$, $i=1,\dots,a$; $j=1,\dots,n$ Rastgele etkili modellerde faktör düzeylerinin etkiler ortalaması "$\underline{\underline{0}}$" ve varyansı "$\underline{\underline{\sigma^2_\tau}}$" olan normal dağılıma sahiptir varsayımı yapılır. Hatalar için sabit etkili modeldeki varsayım geçerlidir.

Böylece, $\boxed{\begin{array}{l} \tau_i \sim N(0, \sigma^2_\tau), \quad i=1,\dots,a \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \quad i=1,\dots,a;\ j=1,\dots,n \end{array}}$ ve birbirlerinden bağımsızdır.

Bu varsayımlara göre, $E(y_{ij}) = E(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}) = \mu + \underbrace{E(\tau_i)}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_{ij})}_{0} = \mu$ ve

$$
\begin{aligned}
Var(y_{ij}) &= Var(\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}) \\
&= \underbrace{Var(\mu)}_{0} + Var(\tau_i) + Var(\varepsilon_{ij}) + \underbrace{2\,Cov(\overset{\text{sabit}}{\mu}, \tau_i)}_{0} + \underbrace{2\,Cov(\mu, \varepsilon_{ij})}_{0} + 2\,Cov(\tau_i, \varepsilon_{ij}) \\
&= Var(\tau_i) + Var(\varepsilon_{ij}) + 2\,\underbrace{Cov(\tau_i, \varepsilon_{ij})}_{0} \\
&= \sigma^2_\tau + \sigma^2
\end{aligned}
$$

$0 \rightarrow$ çünkü τ_i ve ε_{ij} bağımsızdır

Sonuç olarak, rastgele etkili model için $\boxed{E(y_{ij}) = 0, \quad Var(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma^2_\tau}$ dır.

* σ^2 ve σ^2_τ varyanslarına <u>varyans bileşenleri</u> denir.

<u>Not</u>: Sabit etkili modelde $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ dır. Ancak, rastgele etkili modelde bu eşitlik geçerli değildir. Çünkü, $\tau_i \sim N(0, \sigma^2_\tau)$, $i=1,\dots,a$ rastgele değişkendir.

Ayrıca, rastgele etkili modelde aynı faktör düzeyindeki yanıt değişkenleri <u>birbirinden bağımsız değildir</u>. Örneğin, 1. düzey için $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ gözlemleri için

$Cov(y_{11}, y_{12}) = \sigma^2_\tau$, $Cov(y_{11}, y_{13}) = \sigma^2_\tau$, ..., $Cov(y_{11}, y_{1n}) = \sigma^2_\tau$ olur.

Yani, ikişerli olarak kovaryansları σ^2_τ dir.

Genel olarak $\boxed{Cov(y_{ij}, y_{ik}) = \sigma^2_\tau, \quad j \neq k}$ olduğu gösterilebilir.

Fakat, farklı düzeydeki gözlemler birbirinden bağımsızdır.

Yani, $Cov(y_{12}, y_{22}) = 0$ gibi $\Rightarrow$ $\boxed{Cov(y_{ij}, y_{kj}) = 0, \quad i \neq k}$ olur

Bu kovaryanslara göre, belli bir faktör düzeyindeki gözlemlerin tümü aynı aynı kovaryansa sahiptir. Çünkü, deney yapılmadan önce bu faktör düzeyindeki gözlemlerin hepsinin aynı rastgele bileşene sahip olması nedeniyle benzer olmasını bekleriz.

Deney yapıldıktan sonra, tüm gözlemlerin bağımsız olduğu varsayılabilir. Çünkü, τ_i parametreleri belirlendi ve aynı düzeydeki gözlemler sadece rastgele hata nedeniyle farklılık gösterir.

$\to (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32})$

* $a=3,\ n=2$ olan bir denemedeki y_{ij} yanıt değişkenleri için kovaryans matrisi

$$Cov(\underline{y}) = \begin{bmatrix} Cov(y_{11},y_{11}) & Cov(y_{11},y_{12}) & Cov(y_{11},y_{21}) & \cdots & Cov(y_{11},y_{32}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(y_{32},y_{11}) & Cov(y_{32},y_{11}) & \cdots & & Cov(y_{32},y_{32}) \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2+\sigma^2_\tau & \sigma^2_\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma^2_\tau & \sigma^2+\sigma^2_\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2+\sigma^2_\tau & \sigma^2_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_\tau & \sigma^2+\sigma^2_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2+\sigma^2_\tau & \sigma^2_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_\tau & \sigma^2+\sigma^2_\tau \end{bmatrix}$$ biçiminde olur

ANOVA tablosunun oluşturulması:

Rastgele etkili model için de $SS_T = SS_{Deney} + SS_E$ eşitliği geçerlidir

SS_T: Toplam kareler toplamı

SS_{Deney}: Düzeyler (deneyler) arası kareler toplamı

SS_E: Hata kareler toplamı

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2, \quad SS_{Deney} = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2, \quad SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

* Sabit etkili modelde, faktör düzeylerinin ortalamaları arasındaki farklılığı

$$H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3=\dots=\mu_a=\mu \Leftrightarrow \tau_1=\tau_2=\dots=\tau_a=0$$

$$H_1: \text{En az bir } (i,j) \text{ için } \mu_i \neq \mu_j \Leftrightarrow \text{En az bir } i \text{ için } \tau_i \neq 0$$

hipotezlerini test ederek belirleriz.

$H_0: \tau_1=\tau_2=\dots=\tau_a=0$ → Anlamı: Her bir düzeyin etkisinin 0 olduğunu ifade eder

** Rastgele etkili modelde, her bir düzeyin etkisinin 0 olup olmadığını test etmek anlamsızdır. Çünkü, $\tau_i \sim N(0,\sigma^2_\tau)$, $i=1-a$ rastgele değişkendir.

Bu nedenle, düzeylerin etkisinin varyans bileşeni olan σ^2_τ için hipotezleri test etmek daha uygundur

Rastgele etkili modelde $\boxed{\begin{array}{l} H_0: \sigma^2_\tau=0 \\ H_1: \sigma^2_\tau>0 \end{array}}$ hipotezleri test edilir

**Eğer $\sigma^2_\tau=0$ ise tüm faktör düzeyleri aynıdır. Eğer $\sigma^2_\tau>0$ ise faktör düzeyleri arasında değişkenlik vardır

Bu hipotezleri test etmek için sabit etkili modeldeki gibi F-testi kullanılır (Aynı yöntem ile oluşturulur. sadece bazı farklılıklar vardır.)

Rastgele etkili modelde $\boxed{E(MS_{Deneme})=E\left(\frac{SS_{Deneme}}{a-1}\right)=\sigma^2+n\sigma^2_\tau}$ ve

$$\boxed{E(MS_E)=E\left(\frac{SS_E}{N-a}\right)=\sigma^2}$$

olarak bulunur.

Not: Sabit etkili modelde $E(MS_{Deneme})=\sigma^2+\frac{n}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2$ ve $E(MS_E)=\sigma^2$ dir

$E(MS_{Deneme})$ nin farklı olmasının sebebi rastgele etkili modelde $y_{ij} \sim N(0,\sigma^2+\sigma^2_\tau)$ ve y_{ij}'nin kovaryansıdır.

Sabit etkili modelde olduğu gibi, $H_0: \sigma^2_\tau = 0$ hipotezinin doğruluğu altında

$\boxed{\dfrac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}}$ ve $\boxed{\dfrac{SS_{Deneme}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{a-1}}$ olur ve Cochran Teoremine göre

birbirlerinden bağımsızdırlar

Böylece, $H_0: \sigma^2_\tau = 0$ doğru olduğunda $\boxed{F_0 = \dfrac{\frac{SS_{Deneme}}{a-1}}{\frac{SS_E}{N-a}} = \dfrac{MS_{Deneme}}{MS_E} \sim F_{a-1, N-a}}$

elde edilir

F_0 test istatistiğini kullanarak $H_0: \sigma^2_\tau = 0$ ve $H_1: \sigma^2_\tau \neq 0$ hipotezlerini test ederiz.

*Eğer F_0 test istatistiğinin hesaplanan değeri $F_0 > F_{a-1, N-a, \alpha}$ olur ise

$H_0: \sigma^2_\tau = 0$ hipotezi reddedilir

Not: $H_0: \sigma^2_\tau = 0$ doğru iken $E(MS_{Deneme}) = \sigma^2$ ve $E(MS_E) = \sigma^2$ dir. Fakat, H_1 doğru olduğunda $E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + n\sigma^2_\tau > \sigma^2 = E(MS_E)$ dir. Dolayısıyla, H_0 hipotezinin reddedilmesi için F_0 test istatistiğinin değerinin büyük olması gerekir.

Bu nedenle tek yönlü test ile H_0 hipotezi sınanır yani $F_0 > F_{a-1, N-a, \alpha}$ olduğunda H_0 red edilir

---

Rastgele etkili model ile sabit etkiler modeli için ANOVA tablosunun oluşturulması aynıdır.

Ancak, sonuçlarının yorumlanmaları farklıdır

Rastgele etkili modelde varyans bileşenleri σ^2 ve σ^2_τ tahmin etmek isteriz.

Momentler yöntemini (Method of Moments) kullanarak birer tahmin edicilerini belirleriz.

$$\left\{ \begin{array}{l} E(MS_{Deneme}) = \sigma^2 + n\sigma^2_\tau \\ E(MS_E) = \sigma^2 \end{array} \right.$$ olduğundan $\begin{array}{l} MS_E = \sigma^2 \\ MS_{Deneme} = \sigma^2 + \sigma^2_\tau \end{array}$ eşitliklerinden σ^2 ve σ^2_τ için

tahmin ediciler $\boxed{\hat{\sigma}^2 = MS_E}$ ve $\boxed{\hat{\sigma}^2_\tau = \dfrac{MS_{Deneme} - \hat{\sigma}^2}{n} = \dfrac{MS_{Deneme} - MS_E}{n}}$ olarak bulunur

Momentler yöntemini kullanmak için normallik varsayımı gerekli değildir. Ayrıca, en çok olabilirlik yöntemi ile de tahmin ediciler bulunabilir

Güven aralıkları:

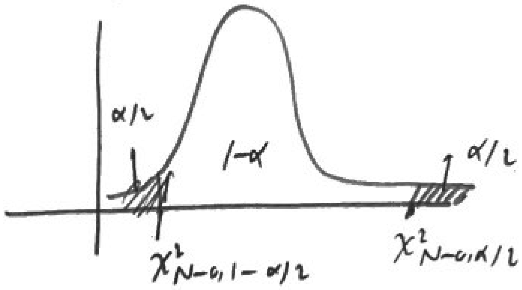
Rastgele etkili modelde varyans bileşenleri σ^2, σ^2_τ ve ortalama μ için güven aralıkları oluşturabiliriz.

i) σ^2 için: Normallik varsayımı altında

$$\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{(N-a)\,MSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}$$ olduğundan σ^2 için %100(1−α)'lık güven aralığı

$$P\left(\chi^2_{N-a,1-\alpha/2} \leq \frac{(N-a)\,MSE}{\sigma^2} \leq \chi^2_{N-a,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$ olmak üzere

$$\boxed{\frac{(N-a)\,MSE}{\chi^2_{N-a,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-a)\,MSE}{\chi^2_{N-a,1-\alpha/2}}}$$



olarak bulunur

ii) σ^2_τ için:

$$\frac{SS_{Deneme}}{\sigma^2+n\sigma^2_\tau} = \frac{(a-1)\,MS_{Deneme}}{\sigma^2+n\sigma^2_\tau} \sim \chi^2_{a-1}$$ olur. Ayrıca $\frac{(N-a)\,MSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-a}$ dır.

Bu durumda σ^2_τ nın tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2_\tau = \frac{MS_{Deneme} - MSE}{n}$, χ^2_{a-1} ile χ^2_{N-a} dağılımlarının bir lineer kombinasyonudur.

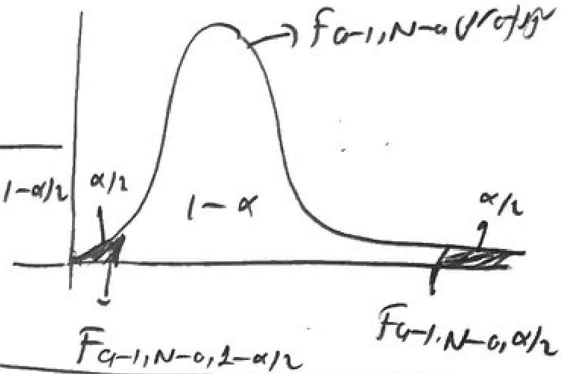
Bu nedenle, σ^2_τ için güven aralığını açık bir formda belirleyemeyiz.

Fakat, $\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2_\tau+\sigma^2}$ oranı için bir güven aralığı bulunabilir

$$\boxed{\frac{MS_{Deneme}/\sigma^2+n\sigma^2_\tau}{MSE/\sigma^2} \sim F_{a-1,N-a}}$$ olduğundan $\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2_\tau+\sigma^2}$ için %100(1−α)'lık güven aralığı

$$P\left(F_{a-1,N-a,1-\alpha/2} \le \frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\,\frac{\sigma^2}{\sigma^2+n\sigma_\tau^2} \le F_{a-1,N-a,\alpha/2}\right) = 1-\alpha \text{ olmalıdır}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\,\frac{1}{F_{a-1,N-a,\alpha/2}} \le \frac{\sigma^2+n\sigma_\tau^2}{\sigma^2} \le \frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\,\frac{1}{F_{a-1,N-a,1-\alpha/2}}$$



$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\,\frac{1}{F_{a-1,N-a,\alpha/2}} - 1\right]}_{L} \le \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2} \le \underbrace{\frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\cdot\frac{1}{F_{a-1,N-a,1-\alpha/2}} - 1\right]}_{U}}$$

olarak bulunur. Alt sınırı L ve üst sınırı U dersek $P\left(L \le \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2} \le U\right) = 1-\alpha$ dır.

$\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2} = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{\sigma_\tau^2}+1}$ olduğundan gerekli işlemler yapıldıktan sonra $\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2}$ için

%100(1−α) lık güven aralığı $\boxed{\frac{L}{L+1} \le \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2} \le \frac{U}{U+1}}$ olarak bulunur.

Burada, $L = \frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\cdot\frac{1}{F_{a-1,N-a,\alpha/2}} - 1\right]$ ve

$U = \frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\cdot\frac{1}{F_{a-1,N-a,1-\alpha/2}} - 1\right]$ dır.

iii) μ için: Şimdi genel ortalama μ için güven aralığı oluşturalım.

$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{1}{a.n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$ olduğunu biliyoruz.

Rastgele etkili modelde $\boxed{Var(\bar{y}_{..}) = \frac{\sigma^2+n\sigma_\tau^2}{n.a}}$ olarak bulunur.

$E(MS_{perore}) = \sigma^2 + n\sigma^2_\tau$ olduğundan $\sigma^2 + n\sigma^2_\tau$ için tahmin edici olarak MS_{perore} kullanabiliriz.

Böylece, $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$ nın varyansının tahmin edicisi olarak

$$\boxed{\hat{Var}(\bar{y}_{..}) = \frac{MS_{perore}}{n.a}}$$ alabiliriz.

Sonuç olarak, genel ortalama μ için %100(1-α)'lık güven aralığı

$$\boxed{\bar{y}_{..} - t_{\alpha/2, N-a}\sqrt{\frac{MS_{perore}}{n.a}} \le \mu \le \bar{y}_{..} + t_{\alpha/2, N-a}\sqrt{\frac{MS_{perore}}{n-a}}}$$

olarak bulunur.

\# Ayrıca,

** $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma^2_\tau}$ oranı sınıf içi korelasyon katsayısı (intraclass correlation coefficient) olarak adlandırılır

** "$\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2+\sigma^2_\tau}$" oranı yanıt değişkenindeki toplam değişkenliğin (yani $Var(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma^2_\tau$) ne kadarının faktör düzeylerinden kaynaklandığını ifade eder

veya

** Toplam varyans $= \sigma^2 + \sigma^2_\tau$, faktör düzeylerinin varyansı $= \sigma^2_\tau$

$\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2+\sigma^2_\tau}$: oranı : tüm faktör düzeylerinin bu modeldeki yanıt değişkenindeki toplam değişkenliğin ne kadarını açıkladığını gösterir

Örnek: Bir tekstil atölyesinde çok sayıda dokuma tezgahı vardır. Her bir tezgahın dakikada aynı kumaş çıktısı sağladığı varsayılıyor. Bu varsayımı araştırmak için 5 tezgah rastgele seçiliyor ve çıktıları farklı zamanlarda ölçülüyor. Aşağıdaki veriler elde ediliyor

Tezgah	Çıktılar (lb/dakika)				
1	1.80	1.90	1.91	1.80	1.90
2	1.77	1.72	1.77	1.80	1.80
3	1.90	1.91	1.90	1.80	1.77
4	1.60	1.72	1.80	1.77	1.68
5	1.72	1.60	1.77	1.72	1.80

a) ANOVA tablosunu oluşturarak $\alpha = 0.05$ için tezgahların çıktıları benzer midir? Yorumlayınız.

b) Varyans bileşenlerini tahmin ediniz ve $\sigma_\tau^2 / (\sigma^2 + \sigma_\tau^2)$ oranını yorumlayınız

c) σ^2, $\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2}$ ve μ için %95 güven düzeyinde güven aralıkları oluşturunuz

d) Modelin varsayımlarını kontrol ediniz

Çözüm: 5 farklı tezgah tüm tezgahlar içinden rastgele seçildiğinden rastgele etkili modeldir.

Bu veri için $n=5$, $a=5$, $y_{1.} = \sum_{j=1}^{n} y_{1j} = 1.80+1.90+1.91+1.80+1.90 = 9,31$

$$y_{2.} = \sum_{j=1}^{5} y_{2j} = 8,86 \quad , y_{3.} = 9,28 \quad , y_{4.} = 8,57 \quad , y_{5.} = 8,62$$

$$\# \sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 = y_{1.}^2 + y_{2.}^2 + y_{3.}^2 + y_{4.}^2 + y_{5.}^2 = (9,31)^2 + \cdots + (8,61)^2 = \underline{\underline{398,8722}}$$

$$\# \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 = (1,80^2 + 1,90^2 + \cdots + 1,80^2) = \underline{\underline{79,8567}}$$

$$\# y_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{53} + y_{54} + y_{55} = \underline{\underline{44,63}}$$

$$\# \; SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{\underset{\downarrow}{N}} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{25} =$$

$N \to a.n$

$$= 79{,}8567 - \frac{44{,}63^2}{25} = \underline{\underline{0{,}18322}}$$

$$\# \; SS_{Deneme} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{25} = \frac{1}{5}(398{,}8791) - \frac{44{,}63^2}{25}$$

$$= 0{,}\underline{\underline{10074}}$$

ANOVA tablosunu oluşturalım.

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ort	F_{hesap}
Denemeler	0,10074	5-1=4	0,025185	$\frac{0{,}025185}{0{,}004124} = 6{,}10693$
Hata	0,08248	25-5=20	0,004124	
Toplam	0,18322	25-1=24		

$F_{hesap} = 6{,}10693$ ve $F_{a-1,N-a,\alpha} = F_{4,20,0.05} = 2{,}87$ dir.

* $F_{hesap} > F_{4,20,0.05}$ olduğundan $\underline{H_0: \sigma_\tau^2 = 0}$ hipotezi red edilir.

\# Böylece, tezgahların kumaş çıktıları arasında anlamlı bir farklılık vardır.

b) Varyans bileşenleri σ^2 ve σ_τ^2 için tahmin edicileri bulalım.

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E = \underline{\underline{0{,}004124}} \text{ ve } \sigma_\tau^2 = \frac{MS_{Deneme} - MS_E}{n} = \frac{0{,}025185 - 0{,}004124}{5} = \underline{\underline{0{,}0042122}}$$

Böylece, $y_{ij} \sim N(0, \sigma^2 + \sigma_\tau^2)$ için toplam varyans; $\sigma^2 + \sigma_\tau^2 = \underline{\underline{0{,}0083362}}$ bulunur.

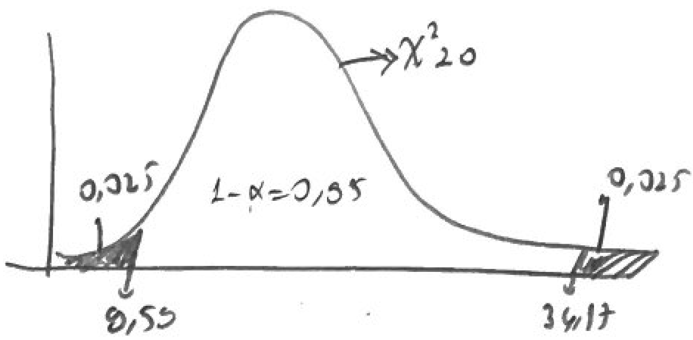
$$\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2 + \sigma_\tau^2} = \frac{0{,}0042122}{0{,}0083362} = 0{,}50529018 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{Kumaş çıktılarındaki farklılığın \%50,5 tezgah türündeki farklılıktandır}}$

c) σ^2 için güven aralığı : $\left[\frac{(N-a)MS_E}{\chi^2_{N-a,\alpha/2}} , \frac{(N-a)MS_E}{\chi^2_{N-a,1-\alpha/2}}\right]$ dır

$\chi^2_{N-a,\alpha/2} = \chi^2_{20,0.025} = 34,17$

$\chi^2_{N-a,1-\alpha/2} = \chi^2_{20,0,975} = 9,59$



$(N-a)MS_E = 20\,(0,004124) = 0,08248$

Böylece, σ için %95 lik güven aralığı $\boxed{0,00241 \le \sigma^2 \le 0,08600}$ bulunur

\# $\frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2+\sigma^2_\tau}$ için güven aralığı : $F_{a-1,N-a,\alpha/2} = F_{4,20,0.025} = 3,51$

$F_{a-1,N-a,1-\alpha/2} \equiv \frac{1}{F_{N-a,a-1,\alpha/2}} = \frac{1}{F_{20,4,0.025}} = \frac{1}{8,56} = 0,11682$

$L = \frac{1}{n}\left[\frac{MS_{Treatment}}{MS_E}\,\frac{1}{F_{a-1,N-a,\alpha/2}} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[\underbrace{\frac{0,025185}{0,004124}}_{6,10693}\,\frac{1}{3,51} - 1\right] = 0,14797$ //

$U = \frac{1}{5}\left[6,10693 \cdot \frac{1}{0,11682} - 1\right] = 10,25528$ //

$\Rightarrow \frac{L}{1+L} \le \frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2+\sigma^2_\tau} \le \frac{U}{1+U}$ olduğundan $\boxed{0,12890 \le \frac{\sigma^2_\tau}{\sigma^2+\sigma^2_\tau} \le 0,91115}$ bulunur

** Böylece tezgahlar arasındaki değişkenliğin kumaş çıktılarındaki değişkenliğin %12,8 ile %91,1 arasındaki bir değerini oluşturur

Bu geniş bir aralıktır. (gözlem sayısının az olmasından kaynaklanabilir)

Buradan da üretimde kullanılan tezgahlar arasındaki değişkenlik göz ardı edilemez

μ için güven aralığı: $\bar{y}_{..} \pm t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{\frac{MS_{hata}}{n.a}}$ olmak üzere

$\bar{y}_{..} = \frac{44,63}{5.5} = 1,7852$, $\frac{MS_{hata}}{5.5} = \frac{0,025185}{25} = 0,00100$

$t_{0,025,20} = 2,086$ dır

Böylece, $1,7852 - 2,086\sqrt{0,00100} = 1,71923$ bulunur

$1,7852 + 2,086\sqrt{0,00100} = 1,85116$

$\Rightarrow \boxed{1,71923 \leq \mu \leq 1,85116}$

d) Artıkları kullanarak normallik varsayımını kontrol edelim. QQ-plot, Kolmogorov-Smirnov veya Shapiro Wilk testlerini kullanabiliriz.

Homojen varyanslılığı kontrol edelim. Bartlett veya Levene testlerini kullanabiliriz.

(Sonraki sayfaya bakınız)