Fen-Edebiyat Fakültesi

	ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: STOKASTİK SÜREÇLER	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: IST1012	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 10/04/2019	

SORULAR

1. **(25 puan)** $Z_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \ldots$ bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere

$$Y_n = \begin{cases} 1, & -1 \leq Z_n \leq 1 \\ 0 & Z_n < -1 \text{ ve } Z_n > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

a) (5 puan) Y_n, $n = 1, 2, \ldots$ rastgele değişkenlerinin dağılımını bulunuz. Başarılı olma olasılığını ($p = P(Y_n = 1)$) bularak, olasılık yoğunluk fonksiyonunu açık bir şekilde yazınız. $\{Y_n, n = 1, 2, ..\}$ sürecinin hangi süreç olduğunu açıklayınız.

$$N_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n & n = 1, 2, , \ldots \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Yukarıda bulduğunuz p yi kullanarak;

b) (5 puan) $P(N_8 = 6,\ N_{15} = 12)$ olasılığını hesaplayınız.

c) (5 puan) $E(N_5 + 2N_8)$ hesaplayınız.

d) (5 puan) $E(5N_4 + 2N_9 | N_3)$ hesaplayınız.

e) (5 puan) $Var(N_7 - N_3)$ hesaplayınız.

Not 1: $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere $P(0 < Z < 1) = 0.3413$. Eğer a) şıkkındaki p değerini bulamazsanız, diğer şıkları p nin gerçek değerini kullanmadan (yani p yazarak) yapabilirsiniz.

Not 2: $X \sim Binom(n,p)$ ise $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

2. **(25 puan)** $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ başarılı olma olasılığı p olan bir Bernoulli süreci ve T_k k. başarılı denemenin zamanı olmak üzere $\{T_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ süreci başarılı denemelerin zamanları olarak tanımlasın.

a) (7 puan) $P(T_1 = 3, T_2 = 6, T_3 = 10)$ olasılığını hesaplayınız.

b) (7 puan) $P(T_3 = 10 | T_1 = 3, T_2 = 6)$ olasılığını hesaplayınız.

c) (7 puan) $E(T_5 | T_3)$ hesaplayınız.

d) (4 puan) $E(T_5 | T_1, T_3)$ hesaplayınız.

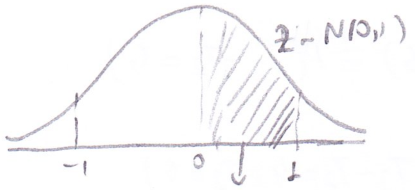
Not: $X \sim Geo(p)$ ise $P(X = x) = pq^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ ve $E(X) = \dfrac{1}{p}$, $Var(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

— Stokastik Süreçler Ara Sınav Cevap Anahtarı — 10.06.2019

1- $Z_i \sim N(0,1)$, $Y_n = \begin{cases} 1, & -1 \le Z_n \le 1 \\ 0, & Z_n < -1 \text{ ve } Z_n > 1 \end{cases}$, $N_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ Y_1+Y_2+\dots+Y_n, & n=1,2,\dots \end{cases}$

a) $Y_n, n=1,2,\dots$ rastgele değişkenler sadece 0 ve 1 değerlerini aldığından Bernoulli dağılımına sahiptir.

$$p = P(Y_n=1) = P(-1 \le Z_n \le 1) = 2.P(Z_n \le 1) = 2(0{,}3413) = 0{,}6826 \,//$$



Alan $= P(0<Z<1) = 0{,}3413$

$p = 0{,}6826 \Rightarrow 1-p = q = 0{,}3174$

$\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ bağımsız Bernoulli rastgele değişkenlerinden oluştuğundan Bernoulli sürecidir.

$P(Y_n=x) = p^x(1-p)^x = (0{,}6826)^x(0{,}3174)^{1-x}, \; x=0,1.$

b) $N_n = Y_1+Y_2+\dots+Y_n, \; n=1,2,\dots \rightarrow$ İlk n denemedeki başarılıların sayısını temsil eder.

$Y_i \sim$ Bernoulli$(p) \Rightarrow N_n \sim \text{Binom}(n,p)$ dir ve $N_{m+n}-N_m \sim \text{Binom}(n,p)$ dir

$$P(N_8=6, N_{15}=12) \equiv P(N_8=6, N_{15}-N_8=6) = P(N_8=6).P(N_{15}-N_8=6)$$

N_8 ile $(N_{15}-N_8)$ bağımsız

$$= P(N_8=6).P(N_{15}-N_8=6) \quad (*)\; N_{15}-N_8 \sim \text{Binom}(7,p)$$

$$= \binom{8}{6} p^6 (1-p)^2 \binom{7}{6} p^6 (1-p)^1$$

$$= \binom{8}{6}\binom{7}{6} (0{,}6826)^{12} (0{,}3174)^3 \,//$$

c) $E(N_5+2N_8) = E(N_5) + 2E(N_8) = 5p + 2.8.p = 21p = 21(0{,}6826) \,//$

d) $E[5N_4+2N_9 \mid N_3] = 5E[N_4 \mid N_3] + 2E[N_9 \mid N_3] =$

$$= 5E[N_4-N_3+N_3 \mid N_3] + 2E[N_9-N_3+N_3 \mid N_3]$$

$$= 5E[\underbrace{N_4-N_3 \mid N_3}_{\text{bağımsız}}] + 5E(N_3 \mid N_3) + 2E(\underbrace{N_9-N_3 \mid N_3}_{\text{bağımsız}}) + 2E(N_3 \mid N_3)$$

$$= 5E(N_4-N_3) + 5N_3 + 2E(N_9-N_3) + 2N_3$$

$[\# \; (N_4-N_3) \sim \text{Binom}(1,p), \; (N_9-N_3) \sim \text{Binom}(6,p)]$

$$= 5.1.p + 2.6.p + 7N_3 = 17p + 7N_3 = 17(0{,}6826) + 7N_3 \,//$$

e) $Var(N_7-N_3) = 4pq = 4.(0{,}6826)(0{,}3174) \,//$

$(N_7-N_3) \sim \text{Binom}(4,p)$

2- # $T_{k+1}-T_k \sim Geo(p) \Rightarrow P(T_{k+1}-T_k=x)=p\,q^{x-1},\ x=1,2,\ldots$ ve $P(T_r=n)=\binom{n-1}{r-1}p^k q^{n-k}$
$n=k,k+1,\ldots$

a) $P(T_1=3, T_2=6, T_3=10) = P(T_1=3,\ T_2-T_1=3,\ T_3-T_2=4)$ (T_1, $\{T_2-T_1\}$ ve $\{T_3-T_2\}$ bağımsız rastgele değişkenlerdir)

$$= P(T_1=3)\,P(T_2-T_1=3)\,P(T_3-T_2=4)$$

$$= \binom{2}{0} p^1 q^2 \; p\cdot q^2 \cdot p\cdot q^3 = p^3 q^7 \,//$$

b) $P(T_3=10 / T_1=3, T_2=6) \equiv P(T_3=10/T_2=6) = P(T_3-T_2+\overset{6}{T_2}=10 / T_2=6) \equiv P(T_3-T_2=4)$

veya

$$= \frac{P(T_3=10, T_2=6)}{P(T_2=6)} = \frac{P(T_3-T_2=4, T_2=6)}{P(T_2=6)}$$

$$= \frac{P(T_3-T_2=4)\,\cancel{P(T_2=6)}}{\cancel{P(T_2=6)}} = P(T_3-T_2=4) = p\,q^3 \,//$$

c) $E(T_5|T_3) = E(T_5-T_3+T_3|T_3) = E(\underbrace{T_5-T_3|T_3}_{\text{bağımsız}}) + E(T_3|T_3)$

$$= E(T_5-T_3) + T_3 = E(T_5-T_4) + E(T_4-T_3) + T_3$$

$$= \frac{2}{p} + T_3 \,//$$

$\rightarrow T_5-T_3 = \underbrace{(T_5-T_4)}_{\sim Geo(p)} + \underbrace{(T_4-T_3)}_{\sim Geo(p)}$

d) $E(T_5|T_1,T_3) \underset{\substack{\downarrow \\ T_1 \text{ etkisiz}}}{=} E(T_5|T_3) = \frac{2}{p} + T_3$ (c şıkkından) //

3. **(20 puan)** Bir futbol maçında atılan gollerin zamanı Poisson sürecine uygun olduğu biliniyor. Atılan herhangi 2 gol arasında geçen ortalama zaman 15 dk (dakika) dır. Buna göre,

   a) (10 puan) 90 dk lık bir maçta 1. golün 5. dk ile 10. dk arasında atılması olasılığını bulunuz.

   b) (10 puan) 3. golün atılabilmesi geçen ortalama süreyi bulunuz.

4. **(30 puan)** Bir dükkan sabah saat 9:00'da açılıyor ve bu dükkana gelen müşterilerin sayısının Poisson sürecine uygun olduğu bilinmektedir. Bu dükkana her 1 saatte ortlama 5 müşteri geliyor ise

   a) (10 puan) Saat 9:30'a kadar en az 2 müşteri gelme olasılığını bulunuz.

   b) (10 puan) Saat 11:00'e kadar toplam 8 müşteri ve saat 12:00'e kadar toplam 10 müşteri gelme olasılığını bulunuz.

   c) (10 puan) Eğer saat 10:00'a kadar 6 müşterinin geldiği biliniyor ise 9:30'a kadar sadece 1 müşterinin gelmiş olma olasılığını bulunuz.

   Not: $X \sim Poisson(\lambda)$ ise $P(X=n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, ..., \lambda > 0$

   $X \sim Exp(\lambda)$ ise $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0.$

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4
Puan				

3. İki gol arasında geçen ortalama süre 15 dk $\Rightarrow$ Goller arasındaki zaman $\sim Exp(\lambda)$ ve $\lambda = \frac{1}{15}$ dir

a) 1. gol için $S_1 = X_1 \sim exp(\lambda)$ olduğundan $P(5 < S_1 < 10) = \int_5^{10} f_{X_1}(x)dx = \frac{1}{15}\int_5^{10} e^{-x/15}dx$

$= e^{-1/3} - e^{-1/2}$ //

b) $E(S_3) = \dfrac{3}{1/\lambda} = 3 \cdot 15 = 45$ dk //

4) Sabah açılış saati 09:00 için $t=0$ aldım

9^{00} 9^{30} 11^{00} 12^{00}

$t=0$ $t=0,5$ $t=1$ $t=2$ $t=3$

Her 1 saatte ortalama 5 müşteri geliyor ise $\lambda = 5$ (1 saat için) ve $N(t)$: $[0,t)$ arasında gelen müşteri sayısı λt olup, $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ dir

a) $P(N(0,5) \geq 2) = 1 - P(N(0,5) < 2) = 1 - [P(N(0,5)=0) + P(N(0,5)=1)]$

$= 1 - \dfrac{e^{-2,5}(2,5)^0}{0!} - \dfrac{e^{-2,5}(2,5)^1}{1!} = 1 - 3,5\, e^{-2,5}$

$= 0,7127$ //

b) $P(N(2)=8, N(3)=10) = P(N(2)=8) \cdot P(N(3)-N(2)=2)$

$= P(N(2)=8) \cdot P(N(1)=2) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^8}{8!} \dfrac{e^{-5} \cdot 5^2}{2!}$

c) $P(N(0,5)=1 / N(1)=6) = \dfrac{P(N(0,5)=1, N(1)=6)}{P(N(1)=6)} = \dfrac{P(N(0,5)=1) \cdot P(N(1)-N(0,5)=5)}{P(N(1)=6)}$

$= e^{-2,5} \cdot 2,5 \cdot \dfrac{e^{-2,5}(2,5)^5}{5!} \Big/ \dfrac{e^{-5}5^6}{6!} = \dfrac{6}{2^6} = 0,0937$