Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: MATEMATİK I**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT1033**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Sınav Tarihi: 08/12/2020 Saat 21:00-23:00**	

Açıklamalar

1. **Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.**
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı anlaşılır ve **en fazla 3 A4** sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz.
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu sınav kişisel başarınızı göstereceğinden sınavın cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
7. Bu sınavdaki tüm limitler **L'Hopital** kuralları kullanılmadan hesaplanmalıdır.
8. **Bu sınava katılan her öğrenci bu kuralları ve önceden ilan edilmiş tüm kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

1. **(20 puan)** $f(x) = \arccos(\ln x)$ fonksiyonunun

   a) Tanım kümesini ve değer kümesini bulunuz.

   b) Sürekli olduğu aralığı bulunuz.

   c) Birebir midir ? İnceleyiniz.

   d) Ters fonksiyonun mevcut olduğu varsayımı altında bu ters fonksiyonu bulunuz.

2. **(25 puan) a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - 1)\sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ limitlerini hesaplayınız.

3. **(20puan) a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ limitlerini hesaplayınız.

4. **(20 puan)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x-2|} & , x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & , 2 \le x < 3 \\ 2\,|x-3| - a + b & , x \ge 3 \end{cases}$ fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli olabilmesi için a ve b ne olmalıdır ? Açıklayınız.

5. **(15 puan)** $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin $[-1, 2]$ aralığında üç tane reel kökü olduğunu gösteriniz. $x = \dfrac{t}{2}$ dönüşümünü kullanarak bu kökleri belirleyiniz.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MAT 1033 MATEMATİK I – ARA SINAV CEVAP ANAHTARI 08.12.2020

1) (20 puan) $f(x)=\arccos(\ln x)$ fonk. için

a) $\arccos x : [-1,1]\to[0,\pi]$ olduğundan f fonksiyonunun tanım kümesi $\ln x\in[-1,1]$ olmasını sağlayan x değerlerinin kümesidir. $\ln e = 1$ ve $\ln e^{-1}=-1$ olduğundan $D(f)=[e^{-1},e]$ olur.

Ayrıca, $\arccos x\in[0,\pi]$ olduğundan $\ln x\in[e^{-1},e]$ için $f(x)\in[0,\pi]$ olur.

Böylece, $\underline{f:[e^{-1},e]\to[0,\pi]}$ bulunur.

b) $\arccos x$ fonk. tüm tanım kümesinde süreklidir. Bu nedenle $f(x)=\arccos(\ln x)$ fonksiyonu da $\underline{[e^{-1},e] \text{ aralığında sürekli}}$dir.

c) $x_1\neq x_2$ olmak üzere $x_1,x_2\in[e^{-1},e]$ noktalarını alalım. Bu durumda $\ln x_1\neq \ln x_2$ dir. Çünkü, $\ln x$ fonk. (1-1) dir. Ayrıca, $\arccos x$ fonk. da tanım kümesinde (1-1) olduğundan $\arccos(\ln x_1)\neq\arccos(\ln x_2)$ elde edilir. Böyle f fonk. (1-1) dir.

d) $f(x)=\arccos(\ln x)$ fonksiyonunun tersi mevcut ise $y=f(x)=\arccos(\ln x)$ olmak üzere $\cos y=\ln x \iff x=e^{\cos y} \Rightarrow f^{-1}(y)=e^{\cos y}$ bulunur.

Böylece, $\underline{f^{-1}(x)=e^{\cos x}}$ ve $\underline{f^{-1}:[0,\pi]\to[e^{-1},e]}$ olur.

2) (25 puan)

a) $x\to0^+$ için $x>0$ olur. $x>0$ için $e^x>e^0=1\Rightarrow e^x-1>0$ dır.

Her x reel sayısı için $\left|\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right|\le 1$ dir.

$$\left|(e^x-1)\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right| = |e^x-1|\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right|}_{\le 1}\le|e^x-1| \text{ olur.}$$

$$x>0 \text{ için } \left|(e^x-1)\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right|\le e^x-1 \iff \boxed{-(e^x-1)\le(e^x-1)\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\le e^x-1}$$

elde edilir.

Sıkıştırma Teoremine göre $\lim_{x\to0^+}(e^x-1)=0$ ve $\lim_{x\to0^+}-(e^x-1)=0$ olduğundan

$$\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)=0 \text{ elde edilir.}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-e^{-x}+1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x} - \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-(-1)}{1} = 2 \,//$$

3) (20 puan)

a) $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2})}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} \,//$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{>1}} = -\infty \,//$$ (Çünkü, payda 0'a soldan yaklaşıyor)

4) (20 puan)

$x<2$ için $f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|} = \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = -(x+2)$ $\Rightarrow$ sürekli fonksiyondur

$2<x<3$ için $f(x) = ax^2-bx+3$ $\Rightarrow$ 2. mertebeden polinomdur, sürekli fonksiyondur

$x>3$ için $f(x) = 2|x-3|-a+b = 2(x-3)-a+b$ $\Rightarrow$ 1. mertebeden polinomdur sürekli fonksiyondur

Verilen f fonksiyonunun $(-\infty,+\infty)$ da sürekliliği için $x=2$ ve $x=3$ noktalarında sürekli olacak şekilde a ve b'yi belirlemeliyiz

$\underline{x=2 \text{ için}}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax^2-bx+3) = 4a-2b+3 = f(2)$

$x=2$'de f'in sürekli olabilmesi için $\boxed{4a-2b+3=-4}$ olmalıdır

$\underline{x=3 \text{ için}}$ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2|x-3|-a+b = -a+b = f(3)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax^2-bx+3 = 9a-3b+3$

$x=3$'de f'in sürekli olabilmesi için $\boxed{9a-3b+3=-a+b}$ olmalıdır.

Böylece, $\left.\begin{array}{l} 4a-2b=-7 \\ 10a-4b=-3 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{a=\frac{11}{2} \text{ ve } b=\frac{29}{2}}$ bulunur

5) (15 puan)

$f(x)=8x^3-12x^2-2x+3$ fonk $[-1,2]$ aralığında süreklidir.

$f(-1)=8(-1)-12(1)-2(-1)+3=-20+5=-15<0$

$f(0)=3>0$

$f(1)=8-12-2+3=11-14=-3<0$

$f(2)=8\cdot(8)-12(4)-2(2)+3=67-52=15>0$

$[-1,0]$, $[0,1]$ ve $[1,2]$ kapalı aralıklarında f fonksiyonuna Ara Değer Teoremini uygulayabiliriz

* $[-1,0]$ aralığında f sürekli ve $f(-1)<0$, $f(0)>0$ olduğun $f(x)=0$ denkleminin bu aralıkta bir reel kökü mevcuttur

Benzer olarak $[0,1]$ ve $[1,2]$ aralıklarında da Ara Değer Teo. gereği birer tane reel kökü mevcuttur. Böylece, f fonksiyonunun $[-1,2]$ aralığında 3 tane reel kökü vardır

* $\underline{x=t/2} \Rightarrow 8x^3-12x^2-2x+3 = 8\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^3-12\left(\frac{t}{2}\right)^2-2\left(\frac{t}{2}\right)+3=0$

$\Leftrightarrow t^3-3t^2-t+3=0$

$\Leftrightarrow t^2(t-3)-(t-3)=0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2-1)=0 \Leftrightarrow t_1=-1,\ t_2=1,\ t_3=3$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{3}{2}}$