Fen-Edebiyat Fakültesi	BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: MATEMATİK I**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT1033**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Sınav Tarihi: 16/02/2021 Saat 21:00-22:30**	

Açıklamalar

1. **Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.**
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı anlaşılır ve **en fazla 4 A4** sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz. **E-posta ile gönderilen cevaplar kabul edilmeyecektir.**
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu sınav kişisel başarınızı göstereceğinden sınavın cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
7. **Bu sınava katılan her öğrenci bu kuralları ve önceden ilan edilmiş tüm kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

1. **(15 puan)** f türevlenebilir bir fonksiyon ve g fonksiyonu

$$g(x) = \left\{f\left(f(x^4)+x\right)\right\}^3$$

biçiminde tanımlansın. Eğer $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f^{'}(1)=-1$ ve $g^{'}(1)=6$ ise $f^{'}(2)$ bulunuz.

2. **(15 puan)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ belirsizliğinin tipini belirleyiniz ve limitini hesaplayınız.

3. **(20 puan)** $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin(x^2))^{\frac{1}{\ln x}}$ belirsizliğinin tipini belirleyiniz ve limitini hesaplayınız.

4. **(30 puan)**

$$f(x) = \frac{6x^2-1}{x^3}$$

fonksiyonunun

a) artan ve azalan olduğu aralıkları,

b) yerel ekstremum nokta/noktaları ve değeri/değerlerini,

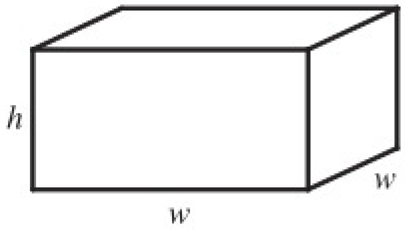
c) büküm noktası/noktaları, aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları,

d) mutlak ekstremum nokta/noktaları ve değeri/değerlerini,

belirleyiniz.

5. **(20 puan) Kare tabanlı** ve **üstü açık** bir kutu yapmak için 675 cm^2 malzemeniz var ise bu kutunun mümkün olan **en büyük hacmini** bulunuz.

Not: Temsili olarak kutuyu üstü açık olmak üzere taban kenarları w cm ve yüksekliği h cm olarak resimdeki gibi düşünebilirsiniz.



BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MATEMATİK I - BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI 16.02.2021

1) (15p) $g(x) = [f(f(x^4)+x)]^3$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f'(1)=-1$, $g'(1)=6$.

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = 3[f(f(x^4)+x)]^2 \cdot f'(f(x^4)+x) \cdot [f(x^4)+x]'$$

$$= 3[f(f(x^4)+x)]^2\, f'(f(x^4)+x) \cdot [f'(x^4)\, 4x^3 + 1]$$ bulunur

$g'(1) = 6$ olduğundan

$$g'(1) = 6 = 3\,[f(\overbrace{\underbrace{f(1)}_{1}+1}^{2})]^2\, f'(\underbrace{f(1)+1}_{2})\ [\overbrace{f'(1)}^{-1}\, 4\cdot 1 + 1]$$

$$\Leftrightarrow\ 6 = 3\,[\underbrace{f(2)}_{3}]^2\, f'(2)\ [-4+1]$$

$$\Leftrightarrow\ 6 = 3\cdot 3^2 f'(2)\cdot(-3) \Rightarrow f'(2) = \frac{-6}{3^4} = -\frac{2}{3^3} = -\frac{2}{27}\ //$$

2) (15p) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \to (\infty\cdot 0)$ belirsizliğidir çünkü, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'/\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\cancel{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\frac{x-1}{x}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-1} = -1\ //$$

3) (20p) $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin x^2)^{1/\ln x} \to 0^0$ belirsizliğidir. Çünkü, $\sin(0)=0$ ve $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = 0^-$ dır

$y = (\sin x^2)^{1/\ln x} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(\sin x^2)}{\ln x}$ olur ve $\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\ln y}$ $\boxed{= e^{\lim_{x\to0^+} \ln y}}$ dir

$$*\lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\sin x^2)}{\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{\sin x^2}}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{\sin x^2}\cdot x = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^2\cdot\cos(x^2)}{\sin x^2}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\overset{2}{\cancel{4x}}\cos(x^2) - 2x^2\cdot\cancel{2x}\sin(x^2)}{\cancel{2x}\cdot\cos(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)}{\cos(x^2)} = \frac{2\cos(0) - 0}{\cos(0)} = 2 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to0^+} (\sin x^2)^{1/\ln x} = e^2}$$

4) (30p) $f(x)=\dfrac{6x^2-1}{x^3} \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dır.

a) (10p) $f'(x)=\dfrac{12x\,x^3-3x^2(6x^2-1)}{x^6}=\dfrac{12x^2-18x^2+3}{x^4}=\dfrac{3-6x^2}{x^4}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3-6x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x=0$ da türev tanımsızdır. Böylece kritik noktalarımız $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ dir. Not: $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}70$

x	$-\infty$ ... $-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$ ... 0	0 ... $1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$ ... $+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f'(x)=\frac{3}{x^4}(1-2x^2)$

- $x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(-5)<0$
- $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0 \Rightarrow f'(-\frac{1}{2})>0$
- $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1/2)>0$
- $x>1/\sqrt{2} \Rightarrow f'(5)<0$

\# f fonk: • $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ aralıklarında azalandır

• $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ aralıklarında artandır

Not: $x=0$ dahil değildir!

b) (5p) $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ yerel minimum noktasıdır ve $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(-\sqrt{2})^3\left(6\cdot\frac{1}{2}-1\right)=-2\sqrt{2}\cdot 2$
$=-4\sqrt{2}$ //

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ yerel maksimum noktasıdır ve $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\sqrt{2})^3(2)=4\sqrt{2}$ //

c) (8p) $f''(x)=\dfrac{-12x\,x^4-4x^3(3-6x^2)}{x^8}=\dfrac{\cancel{x^3}(-12x^2-12+24x^2)}{\cancel{x^3}\cdot x^5}=\dfrac{12(x^2-1)}{x^5}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\mp 1} \Rightarrow$ Büküm noktası için aday noktalar $\{-1, 0, 1\}$
(0: $f''(x)$ tanımsız)

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 1	1 ... $+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$f''(x)=\frac{12}{x^5}(x^2-1)$ olmak üzere

$f''(-2)<0$, $f''(-1/2)>0$, $f''(1/2)<0$ ve $f''(2)>0$

f fonk $(-\infty,-1)$ ve $(0,1)$ aralıklarında aşağıya konkav, $(-1,0)$ ve $(1,+\infty)$ aralıklarında yukarıya konkavdır. $x=-1, 0, 1$ noktaları büküm noktalarıdır.

d) (7p) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-1}{x^3}=0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$. Ayrıca, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ bulunur. Böylece, bulunan ekstremum noktaları yereldir, mutlak değildir.

5) (20p)

Kare tabanlı ve üstü açık kutunun toplam yüzey alanı = Taban Alanı + 4. yan yüzey alanı

$Alan = w^2 + 4.wh$ olur. $675 = w^2 + 4wh \Rightarrow \boxed{h = \frac{675 - w^2}{4w}}$ dır

Bu kutunun hacmi $V =$ Taban Alanı x yükseklik

$= w^2 . h$

$= w^2 \left(\frac{675 - w^2}{4w} \right) = \frac{1}{4}(675w - w^3)$ bulunur

Hacim $V(w) = \frac{1}{4}(675w - w^3)$ tek değişkenli bir fonk.dur

$V'(w) = \frac{1}{4}(675 - 3w^2) \Rightarrow V'(w) = 0 \Leftrightarrow 675 = 3w^2 \Leftrightarrow w^2 = 225$ $\boxed{w = \mp 15}$

$V''(w) = -\frac{6w}{4}$ ve $V''(15) = -\frac{6.15}{4} < 0$ olduğundan 2. Türev testine göre $w = 15$ $V(w)$ fonk.nun yerel maksimum noktasıdır

Böylece, $w = 15$ cm ve $h = \frac{675 - 15^2}{4.15} = \frac{675 - 225}{60} = \frac{450}{60} = 7,5$ cm bulunur

Bu kutunun mümkün olan en büyük hacmi $V = \underline{15^2 . (7,5) = 1687,5 \text{ cm}^3}$

bulunur.