Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1033	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 28/01/2021 Saat 09:00-10:30	

Açıklamalar

1. **Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.**
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı anlaşılır ve **en fazla 4 A4** sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz. **E-posta ile gönderilen cevaplar kabul edilmeyecektir.**
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu sınav kişisel başarınızı göstereceğinden sınavın cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
7. **Bu sınava katılan her öğrenci bu kuralları ve önceden ilan edilmiş tüm kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

1. **(20 puan)** $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$ limitini hesaplayınız.

2. **(20 puan)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{e^x - e^{-x} - 2x}$ limitini hesaplayınız.

3. **(30puan)** $xy + e^y + y^2 = e + 1$ kapalı fonksiyonu ile verilen eğrinin

   a) $(0, 1)$ noktasından geçen teğet doğrusunun ve normalinin denklemlerini bulunuz.

   b) İkinci mertebeden türevin $(0, 1)$ noktasındaki değeri $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{(0,1)}$ bulunuz.

4. **(30 puan)** **Bu sorudaki a sayısı okul numaranızın son basamağındaki rakamdır. Örneğin, okul numaranız 121517085 ise $a = 5$ alınacaktır.**

$$f(x) = xe^{(a+2)x} - 1$$

fonksiyonunun

a) artan ve azalan olduğu aralıkları,

b) yerel ekstremum nokta/noktaları ve değeri/değerlerini,

c) büküm noktası/noktaları, aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları,

d) mutlak ekstremum nokta/noktaları ve değeri/değerlerini,

belirleyiniz.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MATEMATİK I – FİNAL CEVAP ANAHTARI 28.01.2021

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = \infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ olduğundan verilen limit ∞^0 belirsizliğidir.

$y = (\cot x)^{1/\ln x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\ln x} \ln(\cot x) = \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(\cot x)'}{\cot x}}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/\sin^2 x}{\cot x} \cdot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sin^{\cancel{2}} x} \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \cdot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x} = -\frac{1}{1\cdot 1} = -1$$ olduğundan $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{1/\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-1}}$

bulunur.

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{e^x - e^{-x} - 2x}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1+\tan^2 x)}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan^2 x}{e^x + e^{-x} - 2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan x(1+\tan^2 x)}{e^x - e^{-x}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2[(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x) + \tan x \cdot 2 \cdot \tan x \cdot (1+\tan^2 x)]}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2[1\cdot 1 + 0\cdot]}{2} = -1 \,//$$

3) (15P) a) $xy + e^y + y^2 = e+1$ eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevini alalım

$$\frac{d}{dx}(xy + e^y + y^2) = \frac{d}{dx}(e+1) \Rightarrow (1\cdot y + x\cdot y') + y'e^y + 2y\cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow y'(x + e^y + 2y) + y = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-y}{x+e^y+2y}}$$

$$\Rightarrow y'\Big|_{(0,1)} = \frac{-1}{0+e^1+2} = -\frac{1}{2+e}$$ $\Rightarrow (0,1)$ noktasında teğetin eğimi $m_T = -\frac{1}{2+e}$ ve normalin eğimi $m_N = (2+e)$ dir.

(0,1) noktasında eğriye çizilen teğetin denklemi

$$y - y_0 = m_T(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2+e}(x-0) \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{x}{2+e}}$$

Normalinin denklemi : $y - 1 = (2+e)(x-0) \Rightarrow \boxed{y = 1 + x(2+e)}$

b) (15p) $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x+e^y+2y}$ olduğundan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-y}{x+e^y+2y}\right) = -\frac{[y'(x+e^y+2y) - (1+y'e^y+2y')y]}{(x+e^y+2y)^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(0,1)} = -\frac{\left[y'|_{(0,1)}(0+e^1+2) - \left(1+y'|_{(0,1)}e^1 + 2\,y'|_{(0,1)}\right)\cdot 1\right]}{(0+e^1+2\cdot 1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(e+2)^2}\left[-\frac{1}{\cancel{2+e}}\cancel{(e+2)} - \left(1 - \frac{1}{2+e}\cdot e + 2\cdot\left(-\frac{1}{2+e}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{(e+2)^2}\left[-1 - 1 + \underbrace{\frac{e}{2+e} + \frac{2}{2+e}}_{1}\right] = \frac{1}{(e+2)^2} \quad //$$

veya

$y + xy' + e^y y' + 2yy' = 0$ olduğundan eşitliğin tekrar x'e göre türevini alırsak y'' elde ederiz

$$y' + (1\cdot y' + x\cdot y'') + (y'e^y y' + e^y\cdot y'') + 2(y'y' + yy'') = 0$$

Bu eşitlikten $y''|_{(0,1)}$ değerini bulabiliriz

$$y'|_{(0,1)} + \left(y'|_{(0,1)} + 0\right) + \left(\left[y'|_{(0,1)}\right]^2 e + e\,y''|_{(0,1)}^{*}\right) + 2\left(\left[y'|_{(0,1)}\right]^2 + 1\cdot y''|_{(0,1)}^{*}\right) = 0$$

$$\frac{-1}{2+e} - \frac{1}{2+e} + \frac{e}{(2+e)^2} + (e+2)\,y''|_{(0,1)} + 2\cdot\frac{1}{(2+e)^2} = 0$$

$$\boxed{-\frac{2}{2+e} + \frac{\cancel{2+e}}{(2+e)^{\cancel{2}}} + (e+2)\,y''|_{(0,1)} = 0 \Rightarrow y''|_{(0,1)} = \frac{1}{e+2}\left[\frac{1}{e+2}\right] = \frac{1}{(e+2)^2}}$$

4) $a=5$ olsun $f(x)=xe^{7x}-1$ fonk. tüm $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 'de tanımlıdır.

a) (8p) $f'(x)=e^{7x}+7xe^{7x}=e^{7x}(1+7x)$ bulunur

$$f'(x)=\underbrace{e^{7x}}_{>0}(1+7x)=0 \Leftrightarrow 1+7x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-\tfrac{1}{7} \text{ kritik noktadır}}$$

$f'(x)$ fonksiyonunu tanımsız yapan bir reel sayı mevcut değildir

x	$-\infty$ $-1/7$	$+\infty$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

$-\infty<x<-1/7$ için $1+7x<0 \Rightarrow f'(x)<0$

$-1/7<x<+\infty$ için $1+7x>0 \Rightarrow f'(x)>0$

Böylece, f fonk $(-\infty,-1/7)$ aralığında azalandır ve $(-1/7,+\infty)$ aralığında artandır.

b) (5p) $x=-1/7$ kritik noktası yerel minimum noktasıdır. ve değeri

$$f(-1/7)=-\frac{1}{7}e^{-1/7}-1=-\frac{1}{7e^{1/7}}-1 \text{ bulunur}$$

c) (7p) $f'(x)=e^{7x}(1+7x) \Rightarrow f''(x)=7e^{7x}(1+7x)+e^{7x}.7$

$$f''(x)=7e^{7x}(1+7x+1)=7e^{7x}(2+7x)$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2+7x=0 \Rightarrow x=-2/7$ büküm noktası için aday noktadır

x	$-\infty$ $-2/7$	$+\infty$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

$-\infty<x<-2/7$ için $2+7x<0 \Rightarrow f''(x)<0$

$-2/7<x<+\infty$ için $2+7x>0 \Rightarrow f''(x)>0$

Böylece, $x=-2/7$ büküm noktasıdır f fonksiyonu $(-\infty,-2/7)$ aralığında aşağıya konkav (konkav) ve $(-2/7,+\infty)$ aralığında yukarıya konkav (konveks) olur.

d) (10p) f fonk sadece bir yerel minimumu vardır ve değeri $f(-\frac{1}{7})=-\frac{1}{7e^{1/7}}-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^{7x}-1)=+\infty.+\infty=+\infty$$

* Aralığın uç noktalarında f fonk en küçük -1 değerini alıyor. $f(-1/7)<-1$ olduğundan $x=-1/7$ mutlak minimum.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{7x}-1)=\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-7x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right]-1\overset{L.H}{=}\underbrace{\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-7e^{-7x}}\right]}_{0}-1=-1$$