2016-2017 GÜZ DÖNEMİ / MAT 1033 - MATEMATİK I 05.06.2017

BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI

1) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $y = c_1 + c_2 \arcsin x \Rightarrow y' = c_2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = \left[c_2 (1-x^2)^{-1/2}\right]'$
(12 puan)

$$= c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{c_2 \cdot x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Böylece,

$$(1-x^2)y'' = (1-x^2)\frac{c_2 \cdot x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{c_2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \cdot y'$$

2) $x^2y^2 = 9$ ile verilen $y = y(x)$ eğrisinin $(-1,3)$ noktasındaki eğimi, bu noktada çizilen teğet ve normalin denklemi.
(12 puan)

$$x^2y^2 = 9 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2y^2) = 0 \Rightarrow 2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = 0$$

$$\cancel{2}x^2 y \cdot y' = -\cancel{2}xy^2$$

$$y' = -\frac{xy^2}{x^2y} = -\frac{y}{x}$$

$(-1,3)$ noktasındaki eğim $m = y'\Big|_{(-1,3)} = -\dfrac{3}{-1} = 3$

$(-1,3)$ noktasında çizilen teğetin denklemi: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = 3 \cdot (x+1) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 6}$$

Normalin denklemi: normalin eğimi $m_N \cdot \underbrace{m_T}_{3} = -1 \Leftrightarrow m_N = -\dfrac{1}{3}$ olur.

Böylece normalin denklemi $y - 3 = -\dfrac{1}{3}(x+1) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3} + 3$

$$\boxed{y = -\frac{x}{3} + \frac{8}{3}}$$

3) a) (10 puan) $\displaystyle\lim_{r \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin r)}{\cos r}$. $\dfrac{\ln(1)}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ belirsizliği

$$\lim_{r \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin r)}{\cos r} \left(\frac{0}{0}\right) \underset{L'H}{=} \lim_{r \to \pi/2} \frac{\frac{\cos r}{\sin r}}{-\sin r} = \lim_{r \to \pi/2} \frac{-\cos r}{\sin^2 r} = \frac{-\cos(\pi/2)}{\sin^2(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0$$

b) (10 puan) $\lim\limits_{t\to 0} (\cos(2t))^{1/t^2} \to (1)^{\infty}$ belirsizliği

$y=(\cos(2t))^{1/t^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{t^2}\ln(\cos(2t))$

$$\lim_{t\to 0} \ln y = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(2t))}{t^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-\cancel{2}\cdot \sin 2t}{\cos 2t}}{\cancel{2}t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 2t}{(\cos 2t)\,t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{-2}{\cos 2t} = \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{-2}{\cos 2t}}_{-2} = -2$$

Öyleyse, $\lim\limits_{t\to 0} (\cos(2t))^{1/t^2} = \lim\limits_{t\to 0} e^{\ln y} = e^{-2}$ //

c) (10 puan) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{9x^2}-x)-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2-x}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{9x^2-x}+3x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{9-\frac{1}{x}}+3\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = \frac{-1}{6}$$ //

d) (10 puan) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{-1}{2}$$ //

Öyleyse, $\lim\limits_{x\to 1} e^{\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)} = e^{-1/2}$.

4) (16 puan) $f(x)=\begin{cases} ax, & x<0 \\ x^2-3x, & x\geq 0\end{cases}$ fonk $x<0$ ve $x>0$ için polinom biçiminde olduğundan süreklidir. $x=0$ da inceleyelim

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-3x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} ax = 0$

olup, $f(0)=0^2-3\cdot 0=0$ olduğundan $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ elde edilir.

Yani, f fonk $x=0$ da süreklidir. Böylece, f her x için süreklidir.

(4: Devamı) $x<0$ için $f(x)=ax \Rightarrow f'(x)=a$.
$x>0$ için $f(x)=x^2-3x \Rightarrow f'(x)=2x-3$ olup türevleri mevcuttur

$x=0$ da türevlenebilirliğini inceleyelim

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2-3h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}(h-3)=-3$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a\cdot h-0}{h}=a$$

$x=0$ da türevli olabilmesi için $f_+'(0)=f_-'(0)$ olmalıdır. Yani, $\boxed{a=-3}$ olmalıdır.

5) (15 puan)

$[-3,0]$ aralığında $f(x)=x\,e^x$ fonk.

$f'(x)=e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$ kritik nokta

$x=-3,\ 0$ uç noktalar

x	-3	-1	0
f'	−	+	
f	↘	↗	
		min	

$$f'(x)=\underbrace{e^x}_{>0}(1+x)$$

- $f(x)$ fonk $[-3,-1)$ de ↓ azalandır
- " $(-1,0]$ da ↑ artandır

Ayrıca -1 yerel min. noktası olup, $f(-1)=-\frac{1}{e}$ ve $f(0)=0$ $f(-3)=-\frac{3}{e^3}$ olduğundan $x=-1$ mutlak minimum olup değeri $-\frac{1}{e}$ ve $x=0$ mutlak maks. olup değeri 0 dır

6) (15 puan)

$$\frac{d}{dx}\left(f^2(x)\right) = (f'(x))^2 \Rightarrow 2f(x)\cdot\cancel{f'(x)} = (f'(x))^{\cancel{2}}$$

$$\boxed{2f(x) = f'(x)}$$

$$g(x) = e^{-2x} f(x) \Rightarrow g'(x) = -2\cdot e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x)$$

$$= e^{-2x}\underbrace{(-2f(x) + \overbrace{f'(x)}^{2f(x)})}_{0} = 0$$

$g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ olur

$g(0) = e^0 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$ olduğundan $g(x) = 1$ bulunur

Böylece $e^{-2x}\cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^{2x}}$ bulunur

7) (15 puan)

a) $f'(x_0)$ mevcut ise $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ limiti mevcuttur

(10 puan)

Gösterelim ki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ dır (süreklilik)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x - x_0)}_{0} + f(x_0) = f(x_0)$$

Böylece $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ yani f x_0 da süreklidir

b) (5 puan) Bir noktada sürekli olan fonk. o noktada türevlenebilir olmayabilir

örneğin, $f(x) = |x|$ fonk. $x=0$ da süreklidir fakat $x=0$ da türevi yoktur

$f'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ ve $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 = f'_-(0)$ olduğundan $f'(0)$ mevcut değildir