MAT 1033 - MATEMATİK I - BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI

16.01.2018

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x^4-3}{x^4+2}\right)$ için

a) (5 puan) $f'(x) = ?$ $\quad f'(x) = \frac{x^4+2}{x^4-3} \cdot \left[\frac{x^4-3}{x^4+2}\right]' = \frac{\cancel{x^4+2}}{x^4-3}\left[\frac{4x^3(x^4+2) - 4x^3(x^4-3)}{(x^4+2)^{\cancel{2}}}\right]$

$$= \frac{1}{x^4-3}\left[\frac{\cancel{4x^7} + 8x^3 - \cancel{4x^7} + 12x^3}{x^4+2}\right] = \frac{20x^3}{(x^4-3)(x^4+2)}$$

$(x^8 - x^4 - 6)$

b) (5 puan) $f''(x) = [f'(x)]' = 20\left[\frac{x^3}{(x^4-3)(x^4+2)}\right]' =$

(Sadeleştirmeyiniz!!)

$$= 20\,\frac{\left[3x^2(x^4-3)(x^4+2) - x^3\,4x^3(x^4+2) - x^3(x^4-3)\,4x^3\right]}{(x^4-3)^2(x^4+2)^2}$$

2) (10 puan) $g(1)=2,\ g'(1)=3,\ g''(1)=1,\ f'(2)=4,\ f''(2)=3$ ise

$\left.[f(g(x))]''\right|_{x=1} = ?$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow [f(g(x))]'' = [f(g(x))']'$

$= [f'(g(x)) \cdot g'(x)]'$

$\Rightarrow [f(g(x))]'' = f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$

$\Rightarrow \left.[f(g(x))]''\right|_{x=1} = f''(\underbrace{g(1)}_{2})\underbrace{[g'(1)]^2}_{3^2} + f'(\underbrace{g(1)}_{2}) \cdot \underbrace{g''(1)}_{1}$

$= f''(2) \cdot 3^2 + f'(2) \cdot 1$

$= 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 1 = 27 + 4 = 31$

3) a) 10 puan) $y_1 = x^2$ ile $y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrilerin kesişme noktası

$y_1 = y_2 \iff x^2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \iff x^{5/2} = 1 \iff (x^{5/2})^2 = 1^2 \iff x^5 = 1$

$\iff \boxed{x=1}$

$x=1$ için $y_1 = y_2 = 1$ olup, $(1,1)$ noktasında kesişirler.

$\frac{dy_1}{dx} = 2x \Rightarrow \left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=1} = 2 = m_{T_1}$ ve $\frac{dy_2}{dx} = \frac{-1}{2} x^{-3/2} \Rightarrow \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-1}{2} = m_{T_2}$

Böylece, $m_{T_1} \cdot m_{T_2} = 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$ olduğundan y_1 ve y_2 eğrilerinin $(1,1)$ noktasındaki teğetleri diktir.

b) 5 puan) $(1,1)$ noktasındaki teğet denklemleri

$T_1: \; y - 1 = m_{T_1}(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

$T_2: \; y - 1 = m_{T_2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3-x}{2}}$

4) $f(x) = |x-5|$ için

a) 10 puan) $x=5$ noktasında türevi var mı?

$$f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \\ -(x-5), & x < 5 \end{cases}$$

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|5+h-5| - \overset{0}{\overline{|5-5|}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h\to 0^+ \\ -1, & h \to 0^- \end{cases}$$

$f'_+(5) = 1 \neq f'_-(5) = -1$ olduğundan $x=5$ de f fonk türevlenemez

b) 5 puan): $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} |x-5| = |5-5| = 0 = f(5)$ olduğundan f $x=5$ de sürekli̇dir

c) 5 puan). $h(x) = |x^2+3x+2| = |(x+2)(x+1)|$ için $x=-1$ ve $x=-2$ noktalarında türevi yoktur

5) 20 puan) Limitlerden herhangi iki tanesini cevaplayınız

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin((x+2)^2)}{(x+2)^2} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\dfrac{\cancel{2(x+2)}}{\sqrt{1-(x+2)^4}}}{\cancel{2(x+2)}} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+2)^4}} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(2\arctan(x)-\pi\right) \left(\infty \cdot \underbrace{\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\right)}_{0}\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2\arctan(x)-\pi}{1/x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\dfrac{2}{1+x^2}}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{1+x^2} \cdot (-x^2) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-2x^2}{1+x^2} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-4x}{2x} \dfrac{\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-4}{2} = -2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x-\tan x} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\sin x}{2\cdot\dfrac{(-\sin x)}{\cos^3 x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \cancel{\sin x}\left(\dfrac{\cos^3 x}{-2\cancel{\sin x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x}{-2} = \dfrac{-1}{2}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ için

a) 2 puan) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2+1 > 0$ olduğundan f'in tanım kümesi $D(f) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

b) 4 puan) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = \dfrac{1}{\infty} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

c) 9 puan) $f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1.(x^2+1)-2x.x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\mp 1}$ Kritik noktalar

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

$-1<x<1$ için $1-x^2>0 \Rightarrow f'(x)>0$

$x>1$ için $1-x^2<0 \Rightarrow f'(x)<0$

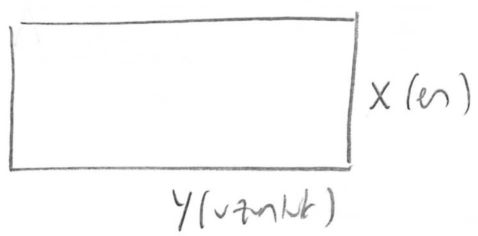
$x<-1$ için $1-x^2<0 \Rightarrow f'(x)<0$

$x=-1$ yerel minimum ve $x=1$ de yerel maksimum noktalarıdır

$f(-1)=\frac{-1}{-1^2+1}=\frac{-1}{2}$ ve $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ ve $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

olduğundan $x=-1$ mutlak minimum ve $x=1$ de mutlak maksimum noktalarıdır

7) 10 puan)



$A=x.y.$ (dikdörtgen alanı)

$\frac{dA}{dt}=\frac{dx}{dt}.y+x.\frac{dy}{dt}$ dir

$\frac{dA}{dt}=5\ m^2/sn$ ve $\frac{dy}{dt}=10\ m^2/sn$, uzunluk $y=20m$ ve en $x=16m$ iken en ne kadar hız ile değişir. Yani $\frac{dx}{dt}=?$

$\frac{dA}{dt}=\frac{dx}{dt}.y+x.\frac{dy}{dt} \Rightarrow 5=\frac{dx}{dt}.20+16.10 \Rightarrow 5=20\frac{dx}{dt}+160$

$\Leftrightarrow -155=20\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}=\frac{-155}{20}=-\frac{31}{4}\ m/sn}$