— CEVAP ANAHTARI —　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1

Fen-Edebiyat Fakültesi	**BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI**	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1033	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 23/01/2020	

SORULAR

1. **(10+10 puan)** Aşağıdaki limitleri mevcut ise hesaplayınız.

   a) $\lim_{x\to 0} (x)^{\sin(x)}$　　　**b)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

2. **(6+9 puan)** Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz **(sadeleştirme yapmayınız !)**.

   a) $f(x) = e^{(\sin(3x))^2+3x}$　　　**b)** $g(x) = (x^2 + \sin(x^2))^{\arctan(x)}$

3. **(10+10 puan)** $x\,y + e^y = e$ kapalı fonksiyonu ile verilen eğrinin

   a) $(0,1)$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemini bulunuz. **b)** $(0,1)$ noktasında $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ türevinin değerini bulunuz.

1)a) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} \to 0^0$ belirsizliği. $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^{\lim_{x\to 0} \ln(x^{\sin x})} = e^{\lim_{x\to 0} \sin x \ln x}$ dır

$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x\ (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\frac{0-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{(-\sin^2 x)}{\cos x}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x\cdot\cos x}{1\cdot\cos x + x(-\sin x)} = \frac{-2\cdot\sin(0)\cos(0)}{1\cdot\cos(0) - 0\sin(0)} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos(x)}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$ //

2)a) $f'(x) = e^{\sin^2(3x)+3x}\cdot\left[2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 + 3\right]$

b) $\ln g(x) = \arctan(x)\ln(x^2+\sin(x^2)) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \left[\arctan x\cdot\ln(x^2+\sin(x^2))\right]'$

$\Rightarrow g'(x) = g(x)\left[\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x^2+\sin(x^2)) + \arctan(x)\cdot\frac{2x+\cos(x^2)2x}{x^2+\sin(x^2)}\right]$

3)a) $\frac{d}{dx}(xy+e^y=e) \Rightarrow 1\cdot y + x\cdot y' + e^y\cdot y' = 0 \Rightarrow y'(x+e^y) = -y \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-y}{x+e^y}}$

$y'\Big|_{(0,1)} = \frac{-1}{0+e^1} = \frac{-1}{e} = m_T \Rightarrow y-1 = \frac{-1}{e}(x-0) \Rightarrow \boxed{y = 1-\frac{x}{e} = \frac{e-x}{e}}$ Teğet denklemi

b) $y' = \frac{-y}{x+e^y} \Rightarrow y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-y}{x+e^y}\right) = -\left[\frac{y'\cdot(x+e^y) - y(1+e^y\cdot y')}{(x+e^y)^2}\right] = \frac{y(1+e^y y') - y'(x+e^y)}{(x+e^y)^2}$

$y''\Big|_{(0,1)} = \frac{\overset{1}{y(0)}(1+e^1\cdot\overset{-1/e}{y'(0)}) - \overset{-1/e}{y'(0)}(0+e^1)}{(0+e^1)^2} = \frac{1\cdot(1+e(-1/e)) + (1/e)(e)}{e^2} = \frac{(1-1)+1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$ //

4. **(20 puan)** $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığında

a) (8 puan) Artan/azalan ve konveks/konkav olduğu aralıkları bulunuz.

b) (7 puan) Yerel (lokal) ve mutlak ekstremum değerlerini ve noktalarını bulunuz. **c) (5 puan)** Grafiğini çiziniz.

5. **(15 puan)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ olmak üzere

f fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli midir ? Eğer süreksiz ise süreksizliğinin tipi nedir ? Bu fonksiyonun $x=0$ noktasındaki türevi $(f'(0))$ mevcutluğu hakkında ne söylenebilir ? Cevabınızı açıklayınız.

6. **(10 puan) Türevin tanımını kullanarak** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun x_0 $(x_0\neq 0)$ noktasındaki türevini bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

3)b) 2.yol: $\frac{d}{dx}(xy+e^y=e) \Rightarrow y+xy'+e^y y'=0$ eşitliğini x'e göre türetirsek

$y'+[1.y'+xy'']+[e^y.y'^2+e^y y'']=0 \Rightarrow y''(x+e^y)=-2y'-e^y y'^2 \Rightarrow \boxed{y''=\dfrac{-y'(2+e^y y')}{(x+e^y)}}$

4) a) $f(x)=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ Kritik Nokta ve $\boxed{x=-2}$ tekil nokta

$f''(x)=-\left[\dfrac{1.\sqrt{4-x^2}-x.\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}\right]=-\left[\dfrac{4-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{(4-x^2)^{3/2}}\right]=\dfrac{-4}{(4-x^2)^{3/2}}$

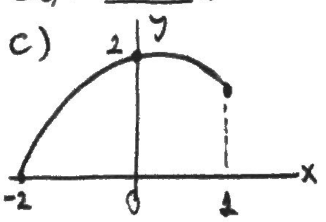
x	-2	0	1
f'	+	−	
f	↗	↘	

* $[-2,0)$ aralığında f fonk artan ve $[0,1]$ aralığında f fonk azalandır

* $x\in[-2,1]$ için $(4-x^2)\geq 0$ olduğundan her $x\in[-2,1]$ için $f''(x)<0$ olur. Böylece $[-2,1]$ aralığında f fonk konkavdır

b) $x=0$ yerel maksimum noktasıdır ve $f(0)=\sqrt{4}=2$. Ayrıca aralığın uç noktaları $x=-2$ ve $x=1$ yerel minimum noktalarıdır ve $f(-2)=0$, $f(1)=\sqrt{3}$ dir. Böylece, $x=0$ mutlak maksimum noktası olup $f(0)=2$ mutlak maksimum değeridir ve $x=-2$ de mutlak minimum noktasıdır ve değeri 0 dır

c)



5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)}{1-x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{(1+x)(1-x)}=2\neq f(0)=1 \Rightarrow$ f fonk $x=0$ da sürekli değildir

* $x=0$ kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır

* $x=0$ da sürekli olmadığından f fonk $x=0$ da türevi mevcut değildir

6)

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x_0+h)^2}-\frac{1}{x_0^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0^2-(x_0+h)^2}{hx_0^2(x_0+h)^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\cancel{h}.(2x_0+h)}{\cancel{h}.x_0^2(x_0+h)^2}=\dfrac{-2x_0}{x_0^4}$

$\boxed{=-2/x_0^3}$