MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

SINAV KAĞIDI

ADI-SOYADI:	BÖLÜMÜ: İSTATİSTİK	Notu
ÖĞR. NO: FİNAL / 17.01.2017	DERSİN ADI: ~~Stokastik Süreçler~~	
İMZA: MAT1033 - MATEMATİK I.	SINAV TARİHİ: ~~01.04.2016/VİZE~~	

1) a) $f(x)=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)$ fonk tanımlı olabilmesi için $\sqrt{1+e^x}-1>0$ olmalıdır

$\sqrt{1+e^x}-1>0 \iff \sqrt{1+e^x}>1 \iff 1+e^x>0 \iff e^x>0.$

Her $x\in\mathbb{R}$ için $e^x>0$ olduğundan, f fonk $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlıdır. Değer kümesi ise $\mathbb{R}$ dir.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olur.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}(1+e^x)^{-1/2}\cdot e^x}{\sqrt{1+e^x}-1}=\frac{e^x}{2(\sqrt{1+e^x}-1)\sqrt{1+e^x}}$$

b)
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-(x+h)^2)-(1-x^2)}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{(x-(x+h))}^{-h}(2x+h)}{\cancel{h}(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) $f(x)=\dfrac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln(\sqrt{1-x^2}) \Rightarrow (\ln(1-x^2))'=\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{(1-x^2)}$

$$\left(\frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{\left(\arcsin x+x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2}-x.\arcsin x\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(1-x^2)}$$

$$=\frac{\arcsin x.\sqrt{1-x^2}+x+\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=\frac{(1-\cancel{x^2})\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+\cancel{x^2\arcsin x}}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{x}{(1-x^2)}$$

Sonuç $f'(x)=\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}+\dfrac{\cancel{x}}{1-x^2}-\dfrac{\cancel{x}}{1-x^2}=\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ //

2) a) $y=\ln x$ eğrisine teğet olan 4 eğimli bir doğru denklemi bulun

$y=\ln x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$ bu eğrinin eğiminin 4 olduğu nokta $x_0=1/4$ noktasıdır

$x_0=\dfrac{1}{4} \Rightarrow y_0=\ln\dfrac{1}{4}=-\ln 4$ olur

Böylece, (x_0,y_0) dan geçen eğimi 4 olan doğru denklemi $y+\ln 4=4(x-1/4)$

$$\boxed{y=4x-1-\ln 4}$$

b) $x^3y^3+y^2=x+y$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki eğimini bulalım

$3x^2y^3+x^3 3y^2 y'+2y.y'=1+y' \Rightarrow y'(x^3 3y^2+2y-1)=1-3x^2y^3 \Rightarrow \boxed{y'=\dfrac{1-3x^2y^3}{x^3 3y^2+2y-1}}$

$(x,y)=(1,1)$ için $3+3y'+2y'=1+y' \Rightarrow 4y'=-2 \Rightarrow \boxed{y'=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}=m}$

$m=-1/2$, ise $(1,1)$ deki teğetin denklemi: $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}$

$$\boxed{y=\dfrac{3-x}{2}}$$

Normalin eğimi: $m_N * m_T=-1 \Rightarrow m_N=2$ olur

Normalin denklemi: $y-1=2(x-1) \Rightarrow \boxed{y=2x-1}$

3) a) $\lim\limits_{r\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin r)}{\cos r}$ $\left(\dfrac{\ln(1)}{\cos(\frac{\pi}{2})}=\dfrac{0}{0} \text{ belirsizlikler}\right)$

$$\lim_{r\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin r)}{\cos r}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{r\to\pi/2}\frac{\frac{\cos r}{\sin r}}{-\sin r}=\lim_{r\to\pi/2}\frac{-\cos r}{\sin^2 r}=\frac{-\cos(\pi/2)}{1^2}=0$$

b) $\lim\limits_{t\to 0}(\cos 2t)^{1/t^2}$ $\left[(\cos 0)^{1/0}=1^{\infty} \text{ belirsizliği}\right]$

$y=(\cos 2t)^{1/t^2} \Rightarrow \ln y=\dfrac{1}{t^2}\ln(\cos 2t)$

$$\lim_{t\to 0}\ln y=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\cos 2t)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos 2t)}{t^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin 2t.2}{\cos 2t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0} -\frac{\sin 2t}{2t}.\frac{2}{\cos 2t}=-2\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}}_{1}.\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos 2t}}_{1}=-2$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} y=\lim_{t\to 0} e^{\ln y}=e^{-2}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}.\frac{\pi}{2}}{\frac{-1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).\pi/2}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\pi/2}{2\cos(\frac{\pi x}{2}).(-\sin\frac{\pi x}{2}).\frac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2.\cos(\frac{\pi x}{2}).\sin(\frac{\pi x}{2})}=-\infty$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

SINAV KAĞIDI

ADI-SOYADI:	BÖLÜMÜ: İSTATİSTİK
ÖĞR. NO: MAT1033 – FİNAL	DERSİN ADI: ~~MAT1033-Matematik I~~
İMZA: 17.01.2017	SINAV TARİHİ: ~~11.11.2016/VİZE~~

Notu

3) d) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)} = ?$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-(x+1)}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=\frac{-1}{2}$$

Öyleyse, $\lim\limits_{x\to 1} e^{\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(--)} = e^{-1/2}$.

4) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ \sin x, & x\geq 0 \end{cases}$

Süreklilik, $x<0$ için $f(x)=x^2$ polinom ve $x>0$ için $f(x)=\sin x$ trigonometrik fonk olduğundan f fonk süreklidir.
$x=0$ da inceleyelim. Bunun için $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\sin 0=0$ olmalıdır.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$ olduğundan
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ olur. Böylece $x=0$ da fonk süreklidir.

Türev: $x<0$ için $f'(x)=2x$ ve $x>0$ için $f'(x)=\cos x$ olur. $x=0$ da türev var mı inceleyelim.

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-\overset{0}{f(0)}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=0$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ olduğundan f fonk $x=0$ da türevi mevcut değildir.

5) $f(x)=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{x}-\ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$f'(x)=0$ yapan noktalar kritik noktalar olur.

$f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=e}$ kritik nokta

Ayrıca $x=0$ da $f'(x)$ tanımsızdır. Fakat bu nokta $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ tanım kümesinde de olmadığından kritik nokta olamaz. Çünkü $f(x)$, $x>0$ için tanımlıdır.

* $0<x<e$ için $f'(x)=\frac{1}{x^2}(\underbrace{1-\overset{<0}{\ln x}}_{>0})>0 \Rightarrow f\uparrow$

* $x>e$ için $f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\underbrace{\ln x}_{>1})<0 \Rightarrow f\downarrow$

$x=0,+\infty$ tanım kümesine dahil değildir. Böylece $x=e$ noktası fonk. mutlak maksimum noktası olup, $f(e)=\frac{\ln e}{e}=e^{-1}$ mutlak mak. değeridir.

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

6) $g(x)=e^{x/r}f(x)$ olsun. $g(a)=e^{a/r}f(a)=0$ ve $g(b)=e^{b/r}f(b)=0$ olur. $e^{x/r}$, $\mathbb{R}$ de sürekli ve diff. fonk. ve f $[a,b]$ de sürekli ve (a,b) diff. olduğundan g fonk. da $[a,b]$ de sürekli ve (a,b) de diff. olur. $g(a)=g(b)=0$ olduğundan Rolle Teo. uygulanabilirdir. Böylece en az bir $c\in(a,b)$ mevcuttur ki $g'(c)=0$ olur. Ayrıca, $g'(x)=e^{x/r}\frac{1}{r}f(x)+e^{x/r}f'(x)=\frac{e^{x/r}}{r}(f(x)+rf'(x))$

$g'(c)=\frac{e^{c/r}}{r}(f(c)+rf'(c))$, $e^{c/r}>0$ ve $r\neq 0$ olduğundan $g'(c)=0 \Leftrightarrow$ $f(c)+rf'(c)=0$ olduğundan Böylece, $c\in(a,b)$ için $f(c)+rf'(c)=0$ olur.

7) a) $f'(x_0)$ mevcut olsun. Türev tanımından $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mevcuttur.

Gösterelim ki, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+$$

$$+\lim_{x\to x_0}f(x_0)=\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}+f(x_0)=f(x_0)$$

$\boxed{\text{Böylece, } \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \text{ olup, } x_0 \text{ da süreklidir.}}$

b) Her zaman doğru değildir. $f(x)=|x|$ fonk. $x=0$ da süreklidir fakat bu noktada türevi yoktur. $f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$ ve $\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$ olur.