1) (10p) $f(x) = 2\arccos x + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = ?$ ve $f''(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\left[\sqrt{1-x^2} + \frac{x\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{-\cancel{2}}{\sqrt{1-x^2}} + 2\left[\frac{\cancel{1}-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = -4\left[\frac{2x\cdot\sqrt{1-x^2} - x^2\frac{(-\cancel{2}x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\cancel{2}}}{1-x^2}\right] = \frac{-4}{(1-x^2)}\left[\frac{2x(1-x^2)+x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= \frac{-4}{(1-x^2)}\left[\frac{2x-2x^3+x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{-4(2x-x^3)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{4x(x^2-2)}{(1-x^2)^{3/2}} \;//$$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ olmak üzere

a) (7p) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$ olmalıdır

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1} = \sin(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ olmalıdır.}$$

b) (8p) $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos(h)}{h} - \overset{0}{f(0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h^2}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{2h} = \frac{1}{2} < \infty$$

Böylece $f'(0) = 1/2$ bulunur.

Ayrıca $x \neq 0$ için $$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x - 1\cdot(1-\cos x)}{x^2} = \frac{x\cdot\sin x + \cos x - 1}{x^2}$$

c) (Bonus 10p)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cdot\sin x + \cos x - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$$ için

$$\lim_{x\to 0} f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x.\sin x + \cos x - 1}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x.\cos x - \sin x}{2x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x.\sin x}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

Böylece $f'(x)$ fonk $x=0$ da süreklidir

3) (15p) $x^2+y^2=25 \Rightarrow 2x+2y.y'=0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{-x}{y}}$ 05

$(-3,4)$ noktasındaki teğetin eğimi $m_{T_1} = \frac{+3}{4} = \frac{3}{4}$ ve denklem

$T_1: y-4 = \frac{3}{4}(x+3) \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{4}(x+3)+4}$ 03

$(-3,-4)$ noktasındaki teğetin eğimi $m_{T_2} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ ve denklem 03

$T_2: y+4 = \frac{-3}{4}(x+3) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3}{4}(x+3)-4}$ 03

T_1 ve T_2 teğetlerinin kesiştikleri nokta: $\frac{3}{4}(x+3)+4 = \frac{-3}{4}(x+3)-4$ 04

$2.\frac{3}{4}(x+3) = -8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x+3) = -8$

$3x+9 = -16 \Leftrightarrow \boxed{x = -25/3}$

$x = -\frac{25}{3}$ için $y = \frac{3}{4}(x+3)+4 = \frac{3}{4}\left(-\frac{25}{3}+3\right)+4 = \frac{3}{4}\left(\frac{-16}{3}\right)+4 = 0$

Böylece teğetlerin kesişim noktası $\left(-\frac{25}{3}, 0\right)$ dır

4) (14p) Limitlerden herhangi iki tanesi yapılacak

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^x = ?$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)=1$ olduğundan (1^∞) belirsizliğidir.

$$y=\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(\frac{3x}{3x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{3x}{3x+1}\right)(\infty.0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x}{3x+1}\right)}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+1}{3x}\cdot\left[\frac{3(\cancel{3x}+1)-3.\cancel{3x}}{(3x+1)^2}\right]}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{3x(3x+1)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x(3x+1)}\cdot(-x^{\cancel{2}})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{3}$$

Böylece $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln y} = e^{-1/3}$ //

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\frac{1}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{1}$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)(\infty-\infty) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\cancel{x^2}+x+1)-(\cancel{x^2}-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(2+1/x)}{-\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(2+\underbrace{1/x}_{0})}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}} = \frac{-2}{1+1} = -1 \ //$$

5) (15p) $f(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)$ için

a) (10p) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1/\cancel{x^2}}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ ODT'nin sonucuna göre $f(x)=C\in\mathbb{R}$ sabittir

b) (5p) $f(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)=C \Rightarrow f(1)=\arctan(1)+\arctan(1)=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Böylece $f(x)=\frac{\pi}{2}$ olur

veya $x=0$ için $f(0)=\arctan(0)+\arctan(\infty)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

6) (15p) a) (3p) $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ için $D(f)=?$ 03

$8-x^2\geq 0 \iff 8\geq x^2 \iff -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2} \Rightarrow D(f)=[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ bulunur

b) (12p) $f'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\frac{(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{8-x^2}}=\frac{(8-x^2)-x^2}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$ 04

* $f'(x)=0 \iff 8-2x^2=0\iff 2x^2=8\iff x^2=4\iff \boxed{x=\mp2}$ kritik noktalar 01

* $\sqrt{8-x^2}=0$ yapan noktalarda türev tanımsız olur. Yani, $x=\mp2\sqrt{2}\in D(f)$ tekil noktalar 01

x	$-2\sqrt{2}$		-2		2		$2\sqrt{2}$
f'		$-$		$+$		$-$	
f	max	↘	min	↗	max	↘	min

$f'(x)=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$ 03

* $-2<x<2$ için $8-2x^2>0\Rightarrow f'(x)>0$

* $-2\sqrt{2}<x<-2$ ve $2<x<2\sqrt{2}$ için $8-2x^2<0\Rightarrow f'(x)<0$

Böylece, $x=-2\sqrt{2}$ ve 2 yerel maksimum noktalarıdır ve $f(2)=4$ ve $f(-2\sqrt{2})=0$

$x=-2$ ve $2\sqrt{2}$ yerel min. noktalarıdır ve $f(-2)=-4$ ve $f(2\sqrt{2})=0$ olur. 03

Dolayısıyla, $x=2$ mutlak maksimum ve $x=-2$ de mutlak min. noktalarıdır.

7) (16 puan) $y_1(t)$ ve $y_2(t)$: t anındaki tavşanların sayısı

$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 \Rightarrow y_1(t) = C_1 \cdot e^{k_1 t}$ ve $y_1(0)=100$ olduğundan $\underline{\underline{C_1 = 100}}$ bulunur

(Virüs öncesi)

$y_1(2) = 1\cancel{00}e^2 = 100 \cdot e^{k_1 2} \Leftrightarrow e^2 = e^{2k_1} \Leftrightarrow \boxed{k_1 = 1 > 0 \text{ bulunur}}$

Böylece $\boxed{y_1(t) = 100\, e^t}$ bulunur (Büyüme modeli)

$y_1(5) = 100\, e^5$

Virüs sonrası : $\frac{dy_2}{dt} = k_2 y_2 \Rightarrow y_2(t) = C_2 \cdot e^{k_2 t}$ ve $y_2(0) = y_1(5) = 100e^5$

olduğundan $y_2(0) = C_2 = 100e^5$ bulunur $y_2(t) = 100\, e^{5 + t \cdot k_2}$

$y_2(2) = 1\cancel{00}\, e = \cancel{100}\, e^{5+2k_2} \Leftrightarrow 5 + 2k_2 = 1 \Leftrightarrow -4 = 2k_2 \Leftrightarrow \boxed{k_2 = -2}$

\# $\boxed{y_2(t) = 100\, e^{5-2t}, \quad k_2 = -2 < 0 \text{ azalma modeli}}$

$\underset{\underset{y_1(10)}{\parallel}}{y_2(5)} = 100 \cdot e^{5-10} = 100 \cdot e^{-5} \approx 0{,}67$ tavşan olur