— CEVAP ANAHTARI —

Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1033	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 13/01/2020	

SORULAR

1. **(8+8 puan)** Aşağıdaki limitleri mevcut ise hesaplayınız.

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\ (e^x+x)^{1/x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)}$

2. **(7+7 puan)** Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

   a) $f(x)=(1+\tan(x^2))\ e^{\arctan(x)}$ **b)** $g(x)=(1+x^2)^{\arcsin(x)}$

3. **(15 puan)** $x^2\ e^y-\sin(y)=x$ kapalı fonksiyonu ile verilen eğrinin $(0,\pi)$ noktasından geçen teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

4. **(15 puan)** $f(x)$ fonksiyonunun $[0,4]$ aralığında sürekli, $f(0)=1$ ve $(0,4)$ aralığında $2\le f'(x)\le 5$ olduğunu varsayalım. $9\le f(4)\le 21$ olduğunu gösteriniz.

1 a) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}\to 1^\infty$ belirsizliğidir. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}$ olduğundan

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L.H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{1+1}{1+0}=2\Rightarrow\lim_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}=e^2\ //$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L.H}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{1-(1+\tan^2(x))}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{-\tan^2(x)}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L.H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{-2\tan x(1+\tan^2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\sin x}}{-2\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}\cdot(1+\tan^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{-2(1+\tan^2x)}=\frac{\cos(0)}{-2(1+\tan^2(0))}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\ //$$

2) a) $$f'(x)=(1+\tan^2(x^2))2x\cdot e^{\arctan(x)}+(1+\tan(x^2))\cdot e^{\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}\ //$$

b) $$\ln g(x)=\arcsin(x)\ln(1+x^2)\Rightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln(1+x^2)+\arcsin(x)\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=(1+x^2)^{\arcsin(x)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(1+x^2)+\arcsin(x)\frac{2x}{1+x^2}\right]\ //$$

3) $$\frac{d}{dx}\left(x^2e^y-\sin(y)=x\right)\Rightarrow(2xe^y+x^2e^yy')-\cos(y)y'=1\rightarrow\boxed{y'=\frac{1-2xe^y}{x^2e^y-\cos(y)}}$$

$$y'\Big|_{(0,\pi)}=\frac{1-2\cdot0\ e^\pi}{0\cdot e^\pi-\cos(\pi)}=\frac{1}{-(-1)}=1\rightarrow\text{Teğetin eğimi}\Rightarrow m_T=1\Rightarrow m_N=-1\text{ dir}$$

$(0,\pi)$deki teğet denklemi: $y-\pi=\overset{1}{m_T}(x-0)\Rightarrow\boxed{y=x+\pi}$ Normalin denklemi: $y-\pi=\overset{-1}{m_N}(x-0)\Rightarrow\boxed{y=\pi-x}$

5. **(20 puan)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ aralığında

   a) **(8 puan)** Yerel (lokal) ve mutlak ekstremum değerlerini ve noktalarını bulunuz.

   b) **(7 puan)** Artan/azalan ve konveks/konkav olduğu aralıkları bulunuz. c) **(5 puan)** Grafiğini çiziniz.

6. **(20 puan)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sec(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ olmak üzere

   a) **(5 puan)** $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli midir ? Cevabınızı açıklayınız.

   b) **(10 puan)** Eğer $x = 0$ noktasında türevlenebilir ise $f'(0)$ değerini bulunuz. Ayrıca, $x=0$ için $f'(x)$'i bulunuz.

   c) **(5 puan)** $f'(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli midir? Cevabınızı açıklayınız.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

5) a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ve $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$

$\boxed{x = 0, 2}$ Kritik Noktalar

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$ Büküm için aday nokta.

x	-2 … 0	0 … 2	2 … 3
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- $x = 0$ yerel maksimum noktasıdır, $f(0) = 3$
- $x = 2$ yerel minimum noktasıdır, $f(2) = 8 - 12 + 3 = -1$
- $f(-2) = -8 - 12 + 3 = -17$, $f(3) = 27 - 27 + 3 = 3$

$x = -2$ yerel minimum ve $x = 3$ yerel maksimum noktasıdır

x	-2 … 1	1 … 3
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

$x = 1$ büküm noktasıdır

$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$

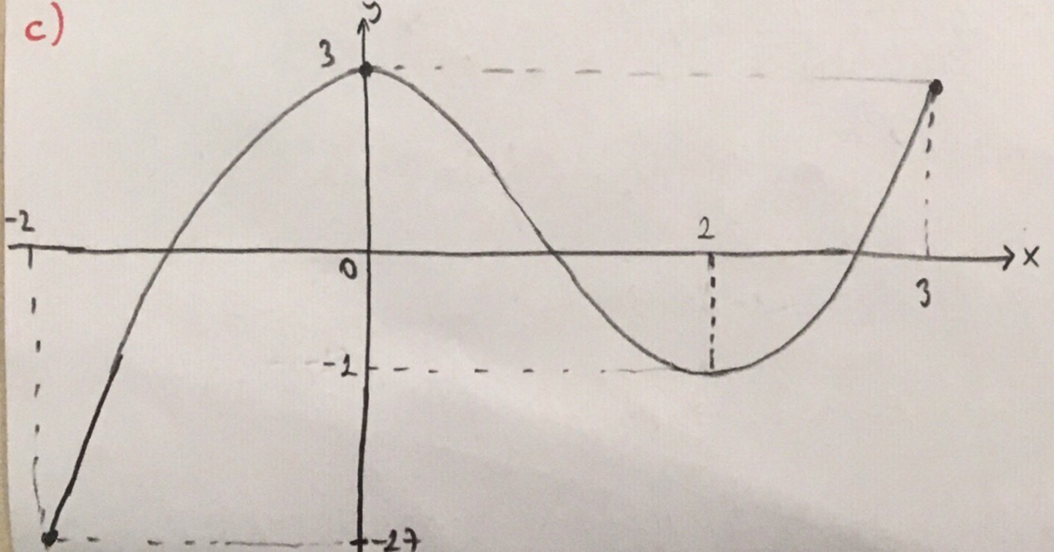
* Yerel maksimum değerlerin en büyüğü 3 olduğundan mutlak maksimum değeri 3 ve mutlak maksimum noktaları $x = 0$ ve 3 olur

* Yerel minimum değerlerinin en küçüğü -17 olduğundan mutlak minimum değeri -17 ve mutlak minimum noktası $x = -2$ olur

b) $[-2, 0) \cup (2, 3]$ aralığında f fonk. artandır. $(0, 2)$ aralığında f fonk. azalandır

$[-2, 1)$ aralığında f fonk. konkavdır. $(1, 3]$ aralığında f fonk. konvekstir

c)



$f(0) = f(3) = 3$

$f(2) = -1$, $f(-2) = -17$

4) $[0,4]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremini uygulayalım

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = f'(c), \quad 0<c<4 \text{ olur}$$

$$\Rightarrow f(4) - \underbrace{f(0)}_{1} = 4f'(c) \quad \Rightarrow f(4) - 1 = 4f'(c)$$

ve $(0,4)$ aralığında $2 \leq f'(x) \leq 5$ olduğundan $0<c<4$ için de $2 \leq f'(c) \leq 5$ olur

Böylece $8 \leq 4f'(c) \leq 20 \Rightarrow 8 \leq f(4)-1 \leq 20 \Rightarrow \boxed{9 \leq f(4) \leq 21}$

elde edilir

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sec(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ için $\left(\sec(x) = \dfrac{1}{\cos x}, \ (\sec x)' = \sec x . \tan x \right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec(x)}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sec x . \tan x}{1} = -\sec(0) \tan(0) = 0 = f(0)$

olduğundan f fonk $x=0$ da süreklidir.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1-\sec(h)}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sec(h)}{h^2} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L.H}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\sec h . \tan h}{2h} \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L.H}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\left[\sec h . \tan^2 h + \sec h . (1+\tan^2 h)\right]}{2}$

$= -\dfrac{\left[\overbrace{\sec(0)}^{1} \overbrace{\tan^2(0)}^{0} + \overbrace{\sec(0)}^{1} (1+\tan^2(0))\right]}{2} = -\dfrac{1}{2}$ // Böylece $\underline{\underline{f'(0) = -1/2}}$ ve $x \neq 0$ için

$f'(x) = \dfrac{-\sec x . \tan x . x - 1.(1-\sec x)}{x^2} = \dfrac{-x \sec x . \tan x + \sec x - 1}{x^2}$ bulunur

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x . \sec x . \tan x + \sec x - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1/2, & x=0 \end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{-x . \sec x . \tan x}{x^2} + \dfrac{\sec x - 1}{x^2} \right) = \overbrace{\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{-\sec x}_{-1} . \underbrace{\dfrac{\tan x}{x}}_{1}}^{-1} + \overbrace{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec(x)-1}{x^2}}_{\text{b)'den } 1/2 \text{'dir}}}^{(0/0) \text{ belirsizlik}}$

$= -1 + \dfrac{1}{2} = -1/2 = f'(0)$

Böylece $f'(x)$ fonk $x=0$ da $\underline{\underline{\text{süreklidir}}}$