MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

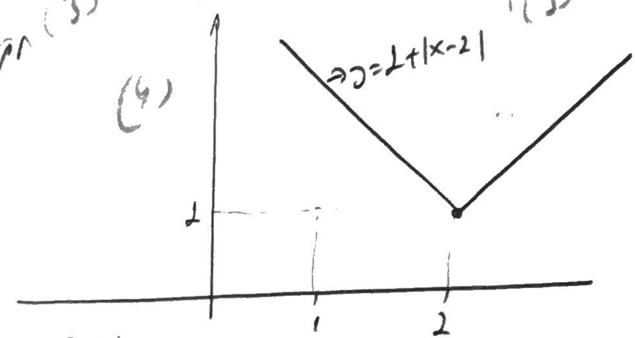
SINAV KAĞIDI

ADI-SOYADI:	BÖLÜMÜ: İSTATİSTİK	Notu
ÖĞR. NO:	DERSİN ADI: MAT1033-Matematik I	
İMZA:	SINAV TARİHİ: 11.11.2016/VİZE	

1) a) $f(x)=1+|x-2|$ fonksiyonun tanım kümesi $D(f)=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, değer kümesi $R(f)=[1,\infty)$
(3) (3)

$y=f(x)=1+|x-2| \Rightarrow y-1=|x-2|$ olduğundan, grafiği

(4)



b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$ fonksiyonun tanım ve değer kümeleri

$\sqrt{x}$ 'den dolayı $x\geq 0$ olmalıdır. Ayrıca paydanın 0'dan farklı olması için $\sin(\pi x)$ de $x\neq n$, $n=1,2,\dots$ olması gerektiğinden

Tanım kümesi $D(f)=\{x : x>0$ ve $x\neq n,\ n=1,2,\dots\}$

Değer kümesi, $|\sin\pi x|\leq 1$, $\sqrt{x}>0$ olduğundan $R(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olur. 0 hariç tüm değerler olabilir. Çünkü, $x=0$ için payda 0 olduğundan, fonk 0 değerini almaz.

2) $\mathbb{R}$ de tanımlı f çift ve g tek fonksiyonlardır.

f çift $\Rightarrow f(x)=f(-x)$ ve g tek $\Rightarrow g(x)=-g(-x)$ olur.

$h(x)=f(g(x))$ fonk için $h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))$ olur

Böylece $h(x)=h(-x)$ olduğundan $f(g(x))$ çift fonktur

$h_1(x)=g(f(x))$ fonk için $h_1(-x)=g(f(-x))=g(f(x))$ olur

Böylece $h_1(x)=h_1(-x)$ olduğundan, $g(h(x))$ çift fonksiyondur

3) f fonk artan ise, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ve $x_1<x_2$ için $f(x_1)<f(x_2)$ olur

(1-1) lik için tanım kümesinden alınan herhangi iki farklı x_1,x_2 noktası için $f(x_1)\neq f(x_2)$ olur.

i) $x_1<x_2$ olmak üzere $f(x_1)<f(x_2)$ olduğundan $f(x_1)\neq f(x_2)$ olur

veya

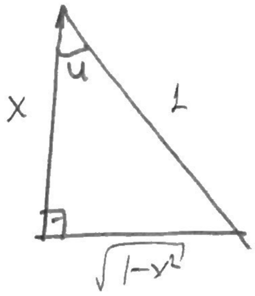
ii) $x_1>x_2$ olmak üzere $f(x_1)>f(x_2)$ " $f(x_1)\neq f(x_2)$ olur

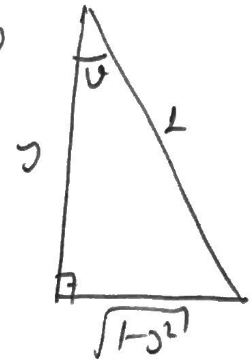
Böylece f fonk (1-1) dir

4) $\arccos(x) + \arccos(y) = \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)$ olduğunu gösteriniz

$\arccos x = u \iff \cos u = x$ $\qquad$ $\arccos y = v \iff \cos v = y$

$\sin u = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $\sin v = \sqrt{1-y^2}$





$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

$\cos(u+v) = x \cdot y - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \iff \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = u+v$

Böylece $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ elde edilir

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{1-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \arccos(-1) = \pi \in [0, \pi]$$

Çünkü, $\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$

5) a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\alpha x)}{\tan(\beta x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\cos(\beta x)}{\sin(\beta x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \cdot \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\alpha \cancel{x}}{\beta \cancel{x}}\right]$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\right)}_{1} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\beta x}{\sin(\beta x)}\right)}_{1} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)}\right)}_{\frac{\cos(0)}{\cos(0)} = 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha/\beta.$$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = ?$ $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ olduğundan

$(\sqrt[3]{x})^3 - 1 = (\sqrt[3]{x}-1)(x^{2/3} + \sqrt[3]{x} + 1)$

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{x^{2/3}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{2}{3}$$

c) $\left|x^2 \cos\frac{1}{x}\right| = x^2 \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le x^2$ olduğundan $-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$

$x \to 0$ için $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ olduğundan sıkıştırma teoremine göre $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos(1/x) = 0$ elde edilir

5) c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-4x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-4x+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-4x+1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-(\cancel{x^2}-4x+1)}{x-\sqrt{x^2-4x+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$

$x<0$ olduğundan $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ olur

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}(4-1/x)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)} = \dfrac{4}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

6)

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 0 \\ (x+\pi)^2, & x>0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x+\pi)^2 = \pi^2$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1) = 1.$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}(x^2+1) = (-1)^2+1 = 2$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(x-1) = -1-1 = -2$

6/

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

ve $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ olduğundan

0 ve -1 noktalarında f(x) fonksiyonun limiti mevcut değildir → 4/

Ayrıca, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ limitleri olmayıp bu noktalarda sağ ve sol limitler birbirinden farklı olduğundan, $x=0$ ve -1 noktaları f(x) fonksiyonun sıçramalı süreksizlik noktalarıdır. → 5/