İSTATİSTİK BÖLÜMÜ, MAT1033, 2017-2018 GÜZ VİZE CEVAP ANAHTARI

— 08.11.2017 —

1) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1+(\sin x)^2}}$ için

a) (6 puan) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow (\sin x)^2 \le 1$ olur ve $1+\sin^2 x > 0$ olduğundan paydadaki ifade hiç bir zaman 0 olmaz. Bu nedenle f fonk tanım kümesi $D(f) = \mathbb{R}$ olur.

Ayrıca, $0 \le \sin^2 x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 1+\sin^2 x \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{1+\sin^2 x} \le \sqrt{2}$ olur. $x \in \mathbb{R}$ olacağından $R(f) = \mathbb{R}$ olur. Böylece, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) (6 puan) $f(-x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{1+(\sin(-x))^2}} = \dfrac{-3x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = -f(x)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

2) (12 puan) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f(f(x)) = \dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \dfrac{x/\cancel{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{\cancel{\sqrt{1+x^2}}}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

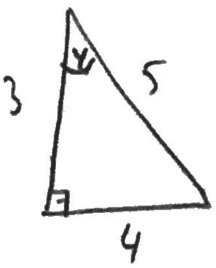
$f_3(x) = f(f(f(x))) = f(f_2(x)) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right) =$

$$= \frac{x/\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x/\cancel{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+3x^2}/\cancel{\sqrt{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

Böylece, genel halde n için $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $n \in \mathbb{N}$ olup, $f_{2018}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2018x^2}}$ elde edilir.

3) a) (5 puan) $\sin(\arctan(\frac{4}{3})) = ?$ $\tan x: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ için ters fonk mevcuttur. $\arctan x: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olur.

$y = \arctan(\frac{4}{3}) \Leftrightarrow \tan y = \dfrac{4}{3} = \dfrac{\sin y}{\cos y}$



$\sin(y) = \dfrac{4}{5}$ bulunur. Böylece, $\sin(\arctan(\frac{4}{3})) = \dfrac{4}{5}$.

b) (5 puan) $f:[0,\infty)\to(0,1]$ olmak üzere $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ fonk. (1-1)dir çünkü, $\forall x_1,x_2\in[0,\infty)$ ve $x_1\neq x_2$ için $\dfrac{1}{x_1^2+1}\neq\dfrac{1}{x_2^2+1}\iff f(x_1)\neq f(x_2)$ dir. Böylece f fonksiyonun tersi mevcuttur.

$$y=\frac{1}{x^2+1}\iff y\cdot(x^2+1)=1\iff x^2y+y=1\iff x^2y=1-y\iff x^2=\frac{1-y}{y}$$

$$\iff x=\sqrt{\underbrace{\frac{1-y}{y}}_{>0}}$$

Böylece, $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ bulunur

4) (12 puan) Diğer bir ifadeyle her x için $|f(x)|\leq B\iff -B\leq f(x)\leq B$. olur

$x^2>0$ olduğundan $-Bx^2\leq x^2f(x)\leq Bx^2$ olup, $\lim\limits_{x\to0}(-Bx^2)=\lim\limits_{x\to0}(Bx^2)=0$

olduğundan sıkıştırma teoremine göre $\lim\limits_{x\to0}x^2f(x)=0$ elde edilir.

5) a) (10 puan)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)\cot(5x)}{x\cdot\cot(4x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot3\cdot\frac{\cos(5x)}{\sin5x}\cdot\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{1}\cdot\underbrace{3}_{3}\cdot\underbrace{\frac{\cos(5x)}{\cos(4x)}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(4x)}{4x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{4\cancel{x}}{5\cancel{x}}}_{4/5}\cdot\underbrace{\frac{5x}{\sin(5x)}}_{1}=3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$$

b) (20 puan)

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{9+t^2}-\sqrt{9-t^2}}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{(\cancel{9}+t^2)-(\cancel{9}-t^2)}{t^2\left(\sqrt{9+t^2}+\sqrt{9-t^2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\left(\sqrt{9+t^2}+\sqrt{9-t^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=1/3.$$

c) (10 puan)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(\cancel{x^2}-4x+1)}{x-\sqrt{x^2-4x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(4-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left[1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}=\frac{4-0}{1+\sqrt{1-0+0}}=\frac{4}{2}=2\,//$$

$\left(\sqrt{x^2}=-x\right.$ çünkü $x\to-\infty$

6) (12 puan) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & x<-1 \\ x-1, & -1\leq x\leq 0 \\ 1/x^2, & x>0 \end{cases}$ fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

$x<-1$ için $f(x)=2x^2-1$, $-1<x<0$ için $f(x)=x-1$ ve $x>0$ için $f(x)=1/x^2$ fonksiyonları polinom ve rasyonel fonk. olduklarından süreklidirler. (2p)

Süreksizlikleri $x=-1$ ve 0 noktalarında olabilir.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x^2-1)=2.(-1)^2-1=1\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2$ (3p)

ve $f(-1)=-2$ olduğundan $x=-1$ de sıçramalı süreksizlik vardır. (2p)

$x=0$ için $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=0-1=-1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ (3p)

ve $f(0)=0-1=-1$ olup, limitlerden biri $+\infty$ olduğundan $x=0$ noktası 2. tip süreksizlik noktasıdır. (2p)

7) (12 puan) $f(x)=\begin{cases} x^2+3(x-5)\cos\left(\frac{1}{x-5}\right), & x<5 \\ ax+5, & x\geq 5 \end{cases}$ fonk.

$x<5$ için trigonometrik ve polinom toplamı, $x>5$ için polinom olduğundan sürekli fonksiyonlardır. (2p)

$x=5$ de de sürekli olması için $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} x^2+3.(x-5)\cos\left(\frac{1}{x-5}\right)$

(6p) $=\underbrace{\lim\limits_{x\to 5^-} x^2}_{25}+3\underbrace{\lim\limits_{x\to 5^-}(x-5)\cos\left(\frac{1}{x-5}\right)}_{0}=25$

, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}(ax+5)=5a+5=f(5)$ (4p)

olup bunlar eşit olmalıdır. Yani, $f(5)=5a+5=25 \Leftrightarrow 5a=20 \Leftrightarrow \boxed{a=4}$ olmalıdır.