Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1033	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 09/11/2019	

SORULAR

***Bu sınavdaki tüm limitler L'Hopital kuralları kullanılmadan hesaplanmalıdır.**

1. **(10+10+10 puan)** Aşağıdaki limitleri mevcut ise hesaplayınız.

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(\beta x)}{x^2\cot(\alpha x)}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, **b)** $\lim_{t\to 3} \dfrac{|t-3|}{t^2-9}$, **c)** $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$.

2. **(12 puan)** $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

3. **(6 puan)** $\sin\left(2\arcsin(\frac{3}{5})\right)$ değerini bulunuz.

— CEVAPLAR —

(30p)

1) a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\beta x)}{x^2\cot(\alpha x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\cos(\beta x)}\frac{1}{x^2}\frac{\sin(\alpha x)}{\cos(\alpha x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}\beta\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\alpha\cdot\frac{1}{\cos(\alpha x)\cos(\beta x)}$$

$$= \alpha\beta\,\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(\alpha x)\cos(\beta x)}}_{1} = \alpha\beta \,//$$ (Limit mevcuttur.)

b) $|t-3| = \begin{cases} t-3, & t\geq 3 \\ -(t-3), & t<3\end{cases}$ olduğundan $\lim_{t\to 3^-}\dfrac{|t-3|}{t^2-9} = \lim_{t\to 3^-}\dfrac{-\cancel{(t-3)}}{\cancel{(t-3)}(t+3)} = \dfrac{-1}{6}\,//$

ve $\lim_{t\to 3^+}\dfrac{|t-3|}{t^2-9} = \lim_{t\to 3^+}\dfrac{\cancel{(t-3)}}{\cancel{(t-3)}(t+3)} = \dfrac{1}{6}\,//$ bulunur. $\lim_{t\to 3^+}\dfrac{|t-3|}{t^2-9} \neq \lim_{t\to 3^-}\dfrac{|t-3|}{t^2-9}$ olduğundan

$\lim_{t\to 3}\dfrac{|t-3|}{t^2-9}$ limiti mevcut değildir.

c) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-x+3}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{(\cancel{x^2}+4x)-(\cancel{x^2}-x+3)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-x+3}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-x+3}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x(5-3/x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x(5-3/x)}{-x\left[\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right]} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-[5-3/x]}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{-[5-0]}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{-5}{2}\,//$$

3) $\arcsin(3/5) = x \iff \sin x = 3/5$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$ $\quad \sin(2\arcsin(3/5)) = \sin(2x)$

(6p)

$\to \cos x = \dfrac{4}{5}$

$= 2\sin x\cdot\cos x$

$= 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}\,/$

4. **(15 puan)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6 \quad , & x = 3 \end{cases}$ fonksiyonu hangi x değerleri için süreklidir?

Eğer var ise süreksiz olduğu nokta (noktaları) bulunuz ? Bu süreksizliği (süreksizlikleri) nasıl giderebiliriz? Açıklayınız.

5. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$ fonksiyonu için **a)(10 puan)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

   b) (10 puan) Tersinin mevcut olduğunu göstererek, ters fonksiyonunu bulunuz.

   c) (7 puan) Tanım ve değer kümelerini bulunuz.

6. **(10 puan)** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ve $g(x) = x + e^x - 1$ olmak üzere $h(x) = g(f(x))$ fonksiyonunu bulunuz. $h^{-1}(0)$ değerini bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

4) (15p) $x \neq 3$ için $f(x) = \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}$ Rasyonel fonk olduğundan süreklidir. $f(x)$ fonk $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ için süreklidir. $x=3$ noktasındaki sürekliliğini inceleyelim. $f(3) = 6$ ve

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(2x+1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} (2x+1) = 7 \neq f(3)$$

olduğundan verilen f fonk $x=3$ noktasında süreksizdir. f fonk $x=3$ de limit değeri olan 6 olacak biçimde tanımlanarak süreksizliğini kaldırmış oluruz.

Ayrıca, $x=3$ noktası kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan $f_1(x)$ fonk $\forall x \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

5) (10p) a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1+2e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1/e^x+2)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+2e^x} = \dfrac{0}{1+2.0} = 0$ (Çünkü $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$)

(10p) b) f fonk (1-1) midir? $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ ve $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $e^{x_1} \neq e^{x_2} \Leftrightarrow 1+2e^{x_1} \neq 1+2e^{x_2}$ olduğundan $\dfrac{e^{x_1}}{1+2e^{x_1}} \neq \dfrac{e^{x_2}}{1+2e^{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olur. Böylece f fonk (1-1) dir. Tersi mevcuttur.

$y = f(x) = \dfrac{e^x}{1+2e^x} \Leftrightarrow y(1+2e^x) = e^x \Leftrightarrow y = e^x - 2ye^x = e^x(1-2y) \Leftrightarrow \dfrac{y}{1-2y} = e^x$

Böylece, $x = \ln\left(\dfrac{y}{1-2y}\right)$ bulunur. Yani, $\boxed{f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y}{1-2y}\right)}$ dir.

5) c) (7p) $f(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}$ fonk.nun tanım ve değer kümelerini bulalım

$e^x: \mathbb{R}=(-\infty,+\infty)\to(0,\infty)$ olduğundan $\forall x\in\mathbb{R}$ için $(1+2e^x)>0$ dır.

Dolayısıyla $f(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}$ fonk.nun paydası 0 olmaz, her x reel sayısı için tanımlıdır

$\boxed{D(f)=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$ olur

f fonk.nun tersi $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x}{1-2x}\right)$ ve $f: D(f)\to R(f) \Rightarrow f^{-1}: R(f)\to D(f)$

olduğundan $D(f^{-1})=R(f)$ dir.

f^{-1} fonk.nun tanım kümesi, doğal logaritma fonk.nundan dolayı $\frac{x}{1-2x}>0$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesidir

$\frac{x}{1-2x}>0 \iff$ i) $x>0$ ve $1-2x>0$ olmalıdır $\iff x>0$ ve $1>2x \iff x>0$ ve $1/2>x$

$\iff \boxed{0<x<1/2}$ //

veya

ii) $x<0$ ve $1-2x<0$ olmalıdır $\iff x<0$ ve $1<2x \iff x<0$ ve $1/2<x$

$\{x: x<0\}\cap\{x: 1/2<x\}=\emptyset$

Böylece, $\frac{x}{1-2x}>0 \iff 0<x<1/2$ elde edilir. Dolayısıyla $\boxed{D(f^{-1})=R(f)=(0,1/2)}$ dir //

(10p)

6) $f(x)=\ln(x^2+1)$, $g(x)=x+e^x-1 \Rightarrow h(x)=g(f(x))=?$ ve $h^{-1}(0)=?$

$h(x)=g(\ln(x^2+1))=\ln(x^2+1)+e^{\ln(x^2+1)}-1=\ln(x^2+1)+x^2+\cancel{1}-\cancel{1}=\ln(x^2+1)+x$ //

$h(x)=\ln(x^2+1)+x$ için $h(0)=\ln(1)+0=0$

h fonk. tüm $\mathbb{R}$ de tersi mevcuttur.. Bu nedenle $h(0)=0 \iff \underline{h^{-1}(0)=0}$ dır //

2) (12p) $\lim_{x\to0} x^4\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$ olduğunu gösterelim

I. yol $\forall x\in\mathbb{R}$ için $-1\le\cos(x)\le1$ olduğundan $\cos\left(\frac{2}{x}\right)$ için de $-1\le\cos\left(\frac{2}{x}\right)\le1$ olur

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $x^4>0$ olduğundan $-x^4\le x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)\le x^4$ elde edilir. $\lim_{x\to0}x^4=\lim_{x\to0}(-x^4)=0$

olduğundan Sıkıştırma Teo. den $\lim_{x\to0}x^4\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$ elde edilir

II. yol: $\lim_{x\to0}x^4\cdot\cos\left(\frac{1}{x^4}\right)=0$ olduğundan $\lim_{x\to0}x^4\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\cos(2/x)}{(2/x)^4}}_{0}\cdot2^4=0\cdot2^4=0$ //