Fen-Edebiyat Fakültesi	YAZ OKULU ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: MATEMATİK II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT1034**	
Numarası:	**Bölümü: İstatistik/ İktisat/ M.Ü. Yaşamboyu Öğrenme P.**	
İmzası:	**Sına Tarihi: 21/08/2020 Saat 09:00-12:00**	

Açıklamalar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı **en fazla 4 A4** sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz.
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu sınav kişisel başarınızı göstereceğinden sınavın cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**

SORULAR

1. **(15 puan)** $\int \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x\ln(x)}dx$ belirsiz integralini hesaplayınız.

2. **(15 puan)** f fonksiyonu $[-a,a]$ aralığında çift fonksiyon olmak üzere
$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx$$
olduğunu gösteriniz.

3. **(15 puan)** Eğer
$$f(x) = x^2 \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{t^2+1}\right)dt$$
ve $f(1) = C$ ise $f'(1)$'i C'ye bağlı olarak bulunuz.

4. **(15 puan)** $y = \ln x$ eğrisi, x-ekseni ve $x = e$ doğrusu arasında kalan bölgenin **a)** Alanını bulunuz. **b)** Bu bölgenin **x-ekseni etrafında** döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini bulunuz. **c)** Bu bölgenin **y-ekseni etrafında** döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini bulunuz.

5. **(20 puan)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9x^2+6x+10}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

6. **(20 puan)** $r = 8\sin(\theta)$ çemberinin içi ve $r = 6\text{cosec}(\theta)$ doğrusunun altında kalan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını hesaplayınız.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

2019-2020 YAZ OKULU MAT1034 MATEMATİK II ARA SINAV
CEVAP ANAHTARI (21.08.2020)

---

1) (15p) $$\int \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x\ln x}\,dx \underset{\substack{u=\ln x\\ du=dx/x}}{=} \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,du \underset{\substack{u=\sin t\\ du=\cos t\,dt}}{=} \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{\cos t\cos t}{\sin t}\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t\,dt$$

[Not: $$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt \underset{\substack{u=\cos t\\ du=-\sin t\,dt}}{=} \int \frac{-du}{1-u^2} = \int \frac{du}{u^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}\Big[\ln|u-1| - \ln|u+1|\Big] + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2 t-1}{(\cos t+1)^2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\sin^2 t}{(\cos t+1)^2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\left[\left(\frac{\sin t}{\cos t+1}\right)^2\right]^{1/2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin t}{\cos t+1}\right| + C = \ln\left[\left(\frac{\cos t+1}{\sin t}\right)^{-1}\right] + C$$

$$= -\ln\left|\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{1}{\sin t}\right| + C = -\ln|\cot(t) + \operatorname{cosec}(t)| + C$$]

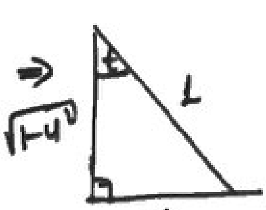
Böylece, $$\int \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x\ln x}\,dx = \int \frac{dt}{\sin t} - \int \sin t\,dt$$

$$= -\ln|\cot t + \operatorname{cosec} t| + \cos t + C$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{1}{u}\right| + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$= \boxed{-\ln\left|\frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}+1}{\ln x}\right| + \sqrt{1-(\ln x)^2} + C}$$

* $u=\sin t \Rightarrow$



$\Downarrow$

$\cos t = \sqrt{1-u^2}$

$\cot t = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$, $\operatorname{cosec} t = \frac{1}{u}$

ve $u = \ln x$.

---

* NOT: $$-\ln\left|\frac{\sqrt{1-\ln^2 x}+1}{\ln x}\right| = \ln\left|\frac{\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}+1}\right|$$ Aynıdır

ve $$\frac{1}{2}\Big[\ln\left|\sqrt{1-\ln^2 x}-1\right| - \ln\left|\sqrt{1-\ln^2 x}+1\right|\Big] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\ln^2 x}-1}{\sqrt{1-\ln^2 x}+1}\right| = \ln\left|\sqrt{\frac{\ln^2 x}{(\sqrt{1-\ln^2 x}+1)^2}}\right.$$

2)(15p) f fonk. $[-a,a]$ aralığında çift fonk olmak üzere $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$ olduğunu gösterelim

f fonk $[-a,a]$'da çift fonk $\Rightarrow \forall x\in[-a,a]$ için $f(x)=f(-x)$ olur

$$\#\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(-x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx$$

$f(x)=f(-x)$

$t=-x$ dönüşümü yapalım.
$dt=-dx$, $x=-a\Rightarrow t=a$
$x=0\Rightarrow t=0$

$$=\int_{t=a}^{0}\frac{f(t)}{1+e^{-t}}(-dt)+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx$$

$$=\underbrace{\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{-t}}dt}_{t\text{ 'yerine } x\text{' kullanabiliriz}}+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{0}^{a}\underbrace{\frac{f(x)}{1+e^{-x}}}_{\text{pay ve paydayı } e^x \text{ ile çarpalım}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{e^x f(x)}{e^x+1}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_{0}^{a}\frac{f(x)\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{1+e^x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$ elde edilir

3)(15p)

$$f(x)=x^2\int_{0}^{x}\sin\left(\frac{\pi}{t^2+1}\right)dt \text{ ve } f(1)=C\Rightarrow f'(1) \text{ bulalım}$$

Her iki tarafın türevini alalım

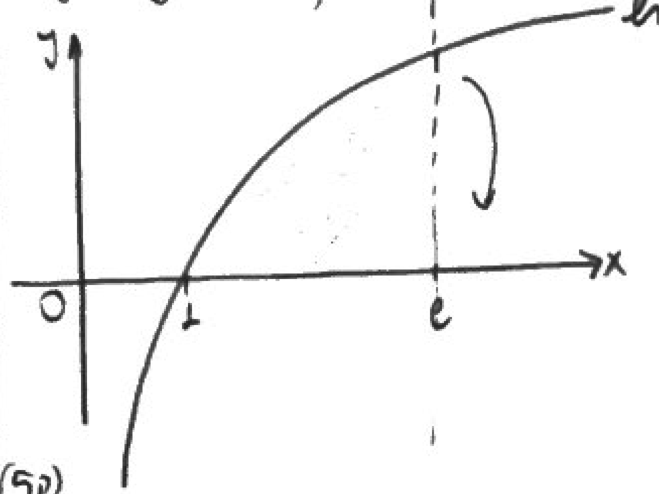
$$f'(x)=2x\int_{0}^{x}\sin\left(\frac{\pi}{t^2+1}\right)dt+x^2\sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$$ bulunur

$$x=1\Rightarrow f'(1)=2\cdot\int_{0}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{t^2+1}\right)dt+1\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}$$

ve verilen eşitlikten $f(1)=1^2\cdot\int_{0}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{t^2+1}\right)dt=C$ olduğundan $\boxed{f'(1)=2C+1}$

elde edilir

4)(15p) $y=\ln x$ eğrisi, x-ekseni ve $x=e$ doğrusu arasında kalan bölgeyi gösterelim



a)(5p) Taralı Alan $= \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \quad \Rightarrow \left| \begin{matrix} du = dx/x \\ v = x \end{matrix} \right|$

$$= \ln x . x \Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e x \frac{dx}{x}$$

$$= e-(e-1) = 1 \;//$$

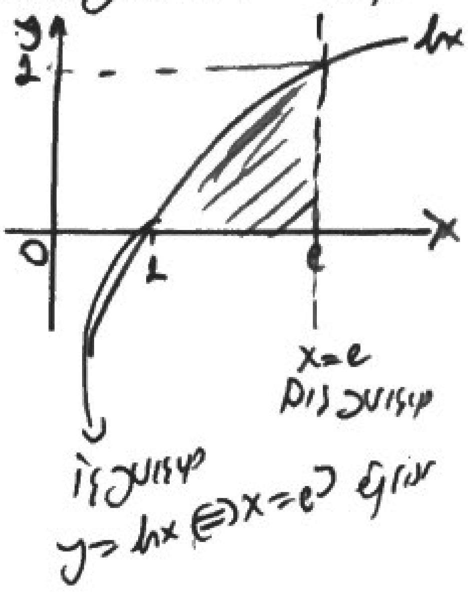
b)(5p) Taralı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmini disk yöntemi ile bulunuz

$$V_x = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \int_1^e \underbrace{\ln^2 x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \pi \Big[\ln^2 x . x \Big|_{x=1}^{e} -$$

$$- \int_1^e \cancel{x} . 2 \frac{\ln x}{\cancel{x}} dx \Big] = \pi \Big[e - 2 \underbrace{\int_1^e \ln x \, dx}_{1} \Big] \qquad \left| \begin{matrix} du = 2 \frac{\ln x}{x} dx \\ v = x \end{matrix} \right|$$

$$= \pi (e-2) \;//$$

c)(5p) Taralı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cismin hacmi disk yöntemi ile aşağıdaki gibi bulunur



$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ eğrisidir

$$V_y = \pi \int_0^1 \Big[(\text{Dış yarıçap})^2 - (\text{İç yarıçap})^2 \Big] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \Big[e^2 - (e^y)^2 \Big] dy = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2y}) dy$$

$$= \pi \Big(e^2 - \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_{y=0}^{1} \Big) = \pi \Big(e^2 - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \Big)$$

$$= \pi \Big(e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \Big) = \pi \Big(\frac{e^2+1}{2} \Big) \;//$$

5)(20p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9x^2+6x+10}$ integralinin karakterini belirleyelim (I. tip genelleştirilmiş integraldir)

İlk olarak belirsiz integrali hesaplayalım

$$\int\frac{dx}{9x^2+6x+10}=\int\frac{dx}{(3x+1)^2+9}=\int\frac{dt/3}{t^2+9}=\int\frac{dt/3}{9\left[\left(\frac{t}{3}\right)^2+1\right]}$$

$\left| \begin{array}{l} t=3x+1 \\ dt=3\,dx \end{array} \right|$ $\qquad u=t/3 \Rightarrow du=\frac{dt}{3}$

$$=\int\frac{du}{9(u^2+1)}=\frac{1}{9}\arctan u+C=\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{3x+1}{3}\right)+C \quad //$$

$$\#\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+6x+10}=\lim_{R_1\to-\infty}\int_{R_1}^{0}\frac{dx}{9x^2+6x+10}+\lim_{R_2\to+\infty}\int_{0}^{R_2}\frac{dx}{9x^2+6x+10}$$

$$=\lim_{R_1\to-\infty}\frac{1}{9}\arctan\left(x+\frac{1}{3}\right)\Big|_{x=R_1}^{0}+\lim_{R_2\to+\infty}\frac{1}{9}\arctan\left(x+\frac{1}{3}\right)\Big|_{x=0}^{R_2}$$

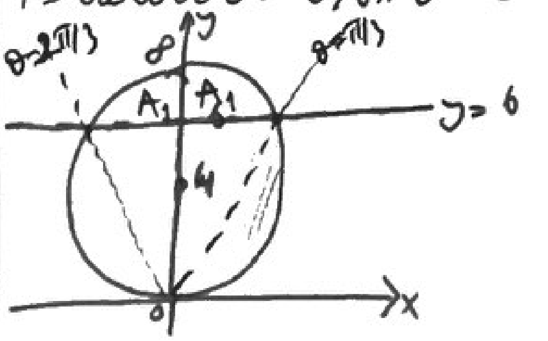
$$=\frac{1}{9}\left(\cancel{\arctan\left(\frac{1}{3}\right)}-\lim_{R_1\to-\infty}\arctan(R_1+1/3)\right)+\frac{1}{9}\left(\lim_{R_2\to+\infty}\arctan\left(R_2+\frac{1}{3}\right)-\cancel{\arctan(1/3)}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(-\arctan(-\infty)+\arctan(+\infty)\right)=\frac{1}{9}\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\frac{\pi}{9}}<\infty$$

integralin değeri bir reel sayı (veya sonlu) olduğundan verilen integral yakınsaktır

6)(20p) $r=8\sin\theta$ çemberi $\Leftrightarrow r^2=8r\sin\theta \Leftrightarrow x^2+y^2=8y \Leftrightarrow \boxed{x^2+(y-4)^2=4^2}$ merkezi (0,4) ve yarıçapı 4 olan çember

$r=6\operatorname{cosec}\theta=6/\sin\theta \Leftrightarrow r\sin\theta=6 \Leftrightarrow \boxed{y=6}$ doğrusu



Taralı Alan = Çemberin alanı − $2A_1$.

$$=\pi 4^2-2\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[(8\sin\theta)^2-\left(\frac{6}{\sin\theta}\right)^2\right]d\theta$$

$$=16\pi-\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(64\sin^2\theta-\frac{36}{\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$=16\pi-\int_{\pi/3}^{\pi/2}64\cdot\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)d\theta-36\cot\theta\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$=\boxed{\frac{32\pi}{3}+4\sqrt{3}}$$

$r=8\sin\theta$ ile $r=6/\sin\theta$

kesişim noktaları:

$8\sin\theta=\frac{6}{\sin\theta}\Leftrightarrow\sin^2\theta=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\sin\theta=+\sqrt{3}/2\Leftrightarrow\boxed{\theta=\pi/3 \text{ ve } 2\pi/3}$