Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV ÖDEV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: MATEMATİK II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT1034**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Son Yükleme Tarihi: 05/06/2020 Saat 17:00**	

Açıklamalar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sisteme yüklediğiniz PDF dosyasının ismini "**Ad Soyad Okul Numarası**" olarak düzenleyiniz.
3. Sisteme yükleme ile igili sorun yaşayan öğrenciler **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilir.
4. Bu ödev kişisel başarınızı göstereceğinden ödevin cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.

Bu ödevi teslim edecek olan her öğrenci bu kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.
Not: Sorularda kullanılan a ve b sabitlerini
a :**okul numaranızın 6. basamağındaki rakam**, b :**okul numaranızın son iki basamağındaki sayı** olarak seçiniz. Örneğin okul numarası **121517085** ise $a = 7$ ve $b = 85$ olarak alınacaktır.

SORULAR

1. **(13 puan)** $\int (\sin(bx))^4\,dx$ belirsiz integralini hesaplayınız.
2. **(15 puan)** $\int \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2}dx$ belirsiz integralini hesaplayınız.
3. **(15 puan)** $y = ax^2$ parabolü ile $y = ax + b$ doğrusu arasında kalan bölgeyi çizerek alanını hesaplayınız. (Rasyonal sayıların değerini virgülden sonra 2 hane olacak biçimde alabilirsiniz. Örneğin, $b/a = 85/7 = 12.14$ gibi)
4. **(12 puan)** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ integralini hesaplayınız.
5. **(10 puan)** f sürekli fonksiyon ve $\int_0^{2b} f(x)dx = 10$ olarak verilsin.
$$\int_0^2 f(bx)\,dx$$
integralini hesaplayınız.
6. **(15 puan)**
$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{ak+b}}{x}dx$$
integralini yakınsak yapan k'nın tüm değerlerini belirleyiniz.
7. **a) (10 puan)** f, $[0, \pi]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz. (**İpucu:** $u = \pi - x$ dönüşümü yapınız.)
$$\int_0^{\pi} x\ f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx$$
b) (10 puan) a şıkkında verilen eşitliği kullanarak
$$\int_0^{\pi} \frac{x\ \sin(x)}{1+(\cos(x))^2}\ dx$$
integralini hesaplayınız.

Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MATH103Y MATEMATİK II ARASINAV ÇÖZÜMLERİ 05.06.2020

NOT: Çözümlerde okul numarası 121517085 olarak alınmıştır $a=7,\ b=85$

1) (13 puan)

$$\int (\sin(bx))^4\,dx = \int (\sin(85x))^4\,dx = ?$$

$*\ \sin^2(85x) = \dfrac{1-\cos(170x)}{2}$, $\sin^4(85x) = (\sin(85x))^4 = \left(\dfrac{1-\cos(170x)}{2}\right)^2$

$$= \frac{1-2\cos(170x)+\cos^2(170x)}{4}$$

$*\ \cos^2(170x) = \dfrac{1+\cos(340x)}{2}$ $\longrightarrow$

$$= \frac{1-2\cos(170x)}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos(340x)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8} - \frac{\cos(170x)}{4} + \frac{\cos(340x)}{8}$$

$$\Rightarrow \int (\sin(85x))^4\,dx = \int \left[\frac{3}{8} - \frac{\cos(170x)}{4} + \frac{\cos(340x)}{8}\right]dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4\cdot 170}\sin(170x) + \frac{1}{8\cdot 340}\sin(340x) + C$$

2) (15 puan) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2}\,dx = ?$

$$\frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x(x^2-4)+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1+1)(x-2)(x+2)+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-1+1)(x+2)}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)}$$

$$= (x+2) + \frac{x+2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = (x+2) + \frac{(x-1+3)}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$= x+3+\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = x+3+\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(x+3+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx = 3x + \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$$

4) (12 puan) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\sqrt{R}} \frac{2du}{1+u^2}$

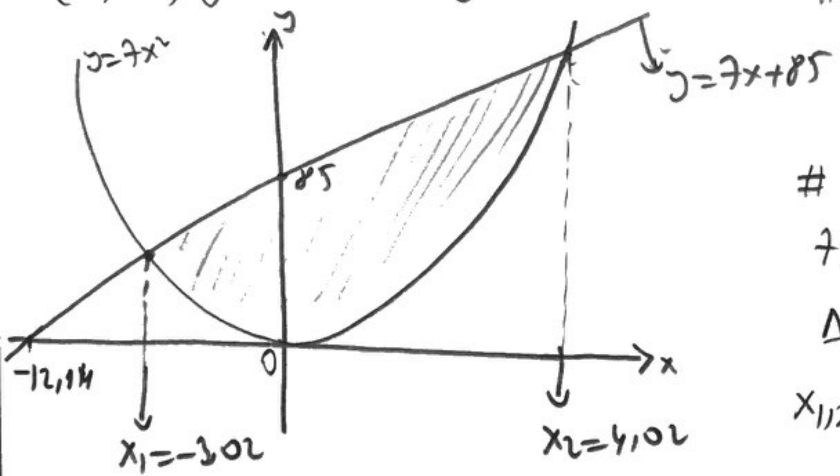
(*I. tip genelleştirilmiş integraldir.)

$u=\sqrt{x} \Rightarrow du = dx/2\sqrt{x}$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

$$= \lim_{R\to\infty} 2\arctan(u)\Big|_{u=0}^{\sqrt{R}} = 2\left[\lim_{R\to\infty}\arctan(\sqrt{R}) - \arctan(0)\right] = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

3)(15 puan) $y=ax^2=7x^2$, $y=ax+b=7x+85$



$y=7x+85$ için $x=0 \Rightarrow y=85$

$y=0 \Rightarrow x=-85/7=-12,14$

Kesişim noktaları belirleyelim

$7x^2=7x+85 \iff 7x^2-7x-85=0$

$\Delta=(-7)^2-4.(7)(-85)=2429$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{2429}}{2.7}=\dfrac{7\pm 49,28}{14}$

$x_1=\dfrac{7-49,28}{14}=-3,02$, $x_2=\dfrac{7+49,28}{14}=4,02$

Alan $=\displaystyle\int_{x_1=-3,02}^{4,02}(7x+85-7x^2)\,dx=\frac{7x^2}{2}+85x-\frac{7x^3}{3}\Big|_{x=-3,02}^{4,02}$

$=\frac{7}{2}(4,02^2-3,02^2)+85(7,04)-\frac{7}{3}(4,02^3+3,02^3)$

$=\frac{7}{2}(7,04)+85(7,04)-\frac{7}{3}(92,51)=407,18$

5)(20 puan) f sürekli fonk. ve $\displaystyle\int_0^{2b} f(x)\,dx=10 \Rightarrow \int_0^2 f(bx)\,dx=?$

f sürekli ve $\displaystyle\int_0^{2.85} f(x)\,dx=10$ olduğundan $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde $F(x)$ ters türevi mevcuttur

$\displaystyle\int_0^{2.85} f(x)\,dx=10=F(2.85)-F(0)=F(170)-F(0)$ olur

$\displaystyle\int_0^2 f(bx)\,dx=\int_0^2 f(85x)\,dx \underset{\substack{u=85x\\du=85dx}}{=} \int_0^{2.85} f(u)\,\frac{du}{85}=\frac{1}{85}\int_0^{170} f(u)\,du=\frac{1}{85}\big(\underbrace{F(170)-F(0)}_{10}\big)=\frac{10}{85}$

6) (15 puan) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{ak+b}}{x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{7k+85}}{x}\,dx$ integralinin yakınsak olduğu k değerlerini belirleyelim.

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{7k+85}}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{(\ln x)^{7k+85}}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} u^{7k+85}\,du$$

$$\left| \begin{array}{ll} u=\ln x & x=1 \Rightarrow u=\ln(1)=0 \\ du=\frac{dx}{x} & x=R \Rightarrow u=\ln(R) \end{array} \right|$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left. \frac{u^{7k+85+1}}{7k+86} \right|_{u=0}^{\ln R} = \frac{1}{7k+86}\left[\lim_{R\to\infty} (\ln R)^{7k+86} - 0\right] \overset{?}{<} \infty$$ hangi k değerleri için sonuç sonludur?

- Eğer $7k+86>0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} (\ln R)^{7k+86} = +\infty \Rightarrow$ Iraksak
- Eğer $7k+86<0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} (\ln R)^{7k+86} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(\ln R)^{-(7k+86)}} = 0 < \infty \Rightarrow$ Yakınsak
- Eğer $7k+86=0 \Leftrightarrow 7k+85=-1$ integrali inceleyelim

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{7k+85}}{x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{u} = \lim_{R\to\infty} \ln|u|\Big|_{u=0}^{\ln R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \Big[\underbrace{\ln(\ln R)}_{+\infty} - \underbrace{\ln(0)}_{-\infty}\Big] = +\infty \quad \Rightarrow \text{Iraksak}$$

Böylece, $7k+86<0 \Leftrightarrow k<-86/7$ için verilen integral yakınsaktır.

7) a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ olduğunu gösterelim

$$\left.\begin{aligned} u=\pi-x &\Rightarrow du=-dx \\ &\Rightarrow x=\pi-u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin(x)=\sin(\pi-u)=\cancel{\sin\pi}^{\,0}.\cos u-\overbrace{\cos\pi}^{-1}.\sin u=\sin u \,//$$

$$I=\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \int_{u=\pi}^{0}(\pi-u)\, f(\sin(\pi-u))\,(-du) = \int_0^{\pi}(\pi-u)\, f(\sin u)\,du$$

$u=\pi-x \Rightarrow du=-dx$
$x=0 \rightarrow u=\pi$
$x=\pi \Rightarrow u=0$

$$= \pi.\int_0^{\pi} f(\sin u)\,du - \underbrace{\int_0^{\pi} u\, f(\sin u)\,du}_{I}$$

I (bağımsız değişken olarak u veya x kullanmanın bir farkı yoktur. !!!)

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\,du - I$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = ?$

$$\# \int_0^{\pi} x\,\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x}{1+(1-\sin^2 x)}\,dx = \int_0^{\pi} x.\underbrace{\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}}_{f(\sin x)}\,dx$$

$f(\sin x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$

$$\overset{(a)}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}}_{f(\sin x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$u=\cos x$
$du=-\sin x\,dx$
$x=0 \Rightarrow u=1$
$x=\pi \Rightarrow u=-1$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\arctan u\Big|_{u=-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\arctan(1)-\arctan(-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 //$$