Fen-Edebiyat Fakültesi

	BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: MATEMATİK II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT1034**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Son Yükleme Tarihi: 10/07/2020 Saat 13:00**	

Açıklamalar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı anlaşılır ve **en fazla 3 A4** sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz.
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu ödev kişisel başarınızı göstereceğinden ödevin cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
7. **Bu ödevi teslim edecek olan her öğrenci bu kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

1. **(20 puan)** $\int_0^{\pi} \sin x \cos x \sin(\pi \cos x)\, dx$ belirli integralini hesaplaynız.

2. **(20 puan)** $x = -y$ doğrusu ve $x = 2 - y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgeyi çiziniz ve alanını hesaplayınız.

3. **(10 puan)** Her x için $\int_1^x f(t)dt = x + \ln(f(x))$ eşitliği sağlanıyor ise $f'(1)$ bulunuz.

4. **(10 puan)** $\int_1^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^6 + x^2 + 2020} dx$ integralinin karakterini belirleyiniz.

5. **(10 puan)** Genel terimi $a_n = \frac{\sin^2(n)}{4^n}$ olan dizinin karakterini bulunuz.

6. **(15 puan)**
$$\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + ... = \frac{1}{3\ 5} + \frac{1}{5\ 7} + \frac{1}{7\ 9} + \frac{1}{9\ 11} + ...$$
biçiminde verilen serinin karakterini bulunuz. Eğer yakınsak ise toplamını bulunuz. (**Not:** Kesirlerin paydasında bulunan "3 5" 3 ile 5'in çarpımıdır.)

7. **(15 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ serisinin toplamını bulunuz. **İpucu:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ dır.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MAT1034 MATEMATİK II BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI 10.07.2020

1) (20p) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x \,\sin(\pi \cos x)\, dx = \int_1^{-1} t \sin(t\pi)(-dt) = \int_{-1}^{1} t \underbrace{\sin(\pi t)dt}_{dv}$

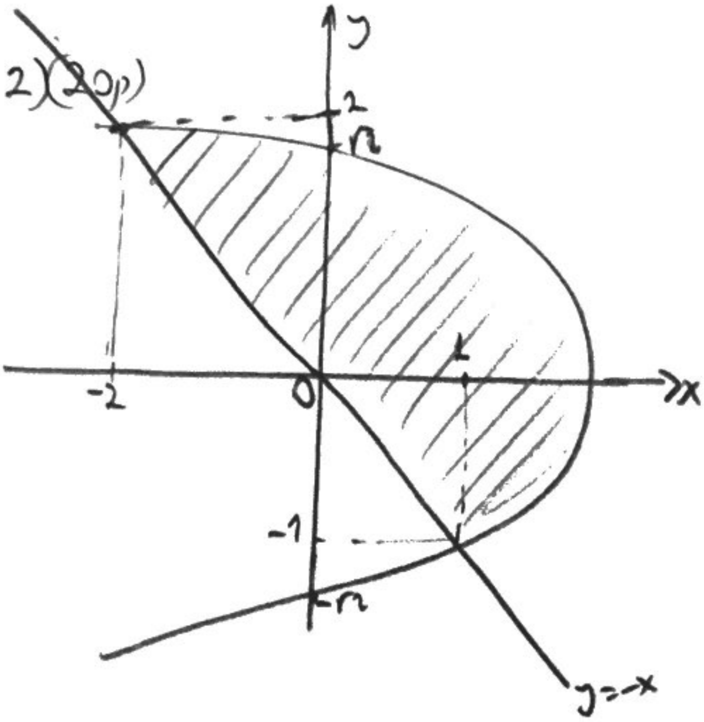
$t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$ | $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=\pi \Rightarrow t=-1$

$u = t$, $du = dt$; $dv = \sin(\pi t)dt$, $v = -\dfrac{\cos(\pi t)}{\pi}$

$$= t\cdot\left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\Bigg|_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos(\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\Big[+1\cdot\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + 1\cdot\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}\Big] + \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Bigg|_{t=-1}^{1} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\big(\sin(\pi)-\sin(0)\big)}_{0} = \frac{2}{\pi}$$

2) (20p)



$x=-y$ ve $x = 2-y^2$ için kesişim noktalarını belirleyelim.

$-y = 2-y^2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$y_1 = -1 \Rightarrow x = -y = 1$

$y_2 = 2 \Rightarrow x = -y = -2$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{2}\left[(2-y^2) - (-y)\right]dy = \int_{-1}^{2}(2-y^2+y)\,dy$$

$$= 2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=-1}^{2} = 6 - \frac{9}{3} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

3) (10p) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x + \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_1^x f(t)\,dt\right) = 1 + \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \frac{f'(x)}{f(x)}$

Böylece, $\boxed{f^2(x) = f(x) + f'(x)}$ bulunur.

$x=1$ için $f^2(1) = f(1) + f'(1) \Rightarrow f'(1) = f^2(1) - f(1)$ dir.

$f(1)$ bulmalıyız. $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x + \ln(f(x))$ eşitliğinde $x=1$ için

$$\underbrace{\int_1^1 f(t)\,dt}_{0} = 1 + \ln(f(1)) \Rightarrow \ln(f(1)) = -1 \Rightarrow \boxed{f(1) = e^{-1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} = \frac{1-e}{e^2}$$

4) (10p) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$ olduğundan $0 \leq 1+\sin x \leq 2$ olur

$x \geq 1$ için $x^6+x^2+2020 > x^6 \Rightarrow \dfrac{1}{x^6+x^2+2020} < \dfrac{1}{x^6}$ olur

Böylece, $x \geq 1$ için $\dfrac{1+\sin x}{x^6+x^2+2020} < \dfrac{2}{x^6+x^2+2020} < \dfrac{2}{x^6}$ elde edilir

$\int_1^\infty \frac{2}{x^6}dx \Rightarrow$ I. tip p integrali olup, $p = 6 > 1$ olduğundan bu integral yakınsaktır

Dolayısıyla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\sin x}{x^6+x^2+2020} < \int_1^\infty \frac{2}{x^6}dx < \infty$ elde edilir, integralimiz yakınsaktır.

5) (10p) $a_n = \dfrac{\sin^2(n)}{4^n} \Rightarrow \sin^2(n) \geq 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\sin x \leq 1$ olduğundan

her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \dfrac{\sin^2(n)}{4^n} \leq \dfrac{1}{4^n}$ elde ederiz

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ olduğundan Sıkıştırılma Teo. göre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2(n)}{4^n} = 0$ elde edilir

6) (15p) $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\dfrac{1}{7.9}+\cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ olur

$$S_n = \sum_{t=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t+1}-\frac{1}{2t+3}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right) \text{ olur}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right) = 1/6$ olduğundan $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{6}$ olup,

yakınsaktır.

7) (15p) $$\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) = 1 \,//$$

Not: $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}-1$