— CEVAP ANAHTARI —

1

Fen-Edebiyat Fakültesi

	BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK II	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1034	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 26/06/2019	

SORULAR

1. **(10 puan)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ belirsiz integralini hesaplayınız.

2. **(15 puan)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ belirli integralini hesaplayınız.

3. **(12 puan)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_x^{\pi/4} \frac{\cos^2 y}{y}\, dy\, dx$ iki katlı integralini hesaplayınız.

4. **(13 puan) a) ve b)'den yalnızca 1 (bir) tanesini hesaplayınız.**

   a) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\ (2x)\ dx$

   b) $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $r = 2\sin(\theta)$ çemberi ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \int \frac{2du}{u^2} = 2\frac{u^{-2+1}}{-1} + C = -\frac{2}{u} + C = \frac{-2}{1+\sqrt{x}} + C$ //

$u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

2) $\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \Rightarrow 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$
$= Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$
$= x^2(A+B) + x(B+C) + A + C \iff \boxed{A+B=0,\ B+C=0,\ A+C=1}$

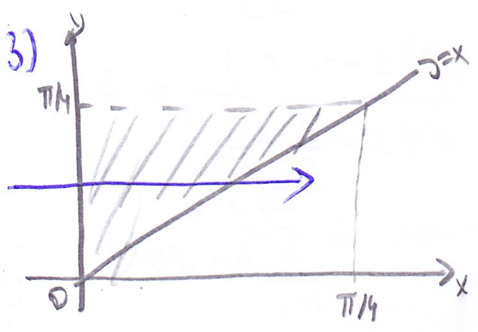
$\Rightarrow (A+B)+(B+C) = 0 \iff 1+2B=0 \iff \boxed{B=-1/2} \Rightarrow \boxed{A=-B=1/2} \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$
1

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx\right]$

$u = x^2+1$
$du = 2x\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\Big|_{x=0}^{1} + \arctan x\Big|_{x=0}^{1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{x=0}^{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\ln 2 - \underbrace{\ln(1)}_{0}\right) + \left(\arctan(1) - \underbrace{\arctan(0)}_{0}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{0}\right)\right]$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{2\ln 2 + \pi}{8}$ //

3)


$\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_x^{\pi/4} \frac{\cos^2 y}{y}\, dy\, dx = \int_{y=0}^{\pi/4}\int_{x=0}^{y} \frac{\cos^2 y}{y}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{\pi/4} \frac{\cancel{y}\cdot\cos^2 y}{\cancel{y}}\, dy$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2y)}{2}\, dy = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin(2y)\right)\Big|_{y=0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ //

5. **(10 puan)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ serisinin toplamını bulunuz.

6. **(8+7 puan)** Aşağıda verilen serilerin karakterlerini belirleyiniz.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\, n!}{(2n)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-n^2+3}$.

7. **(15 puan)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ve aralığını bulunuz. Hangi x değerleri için seri mutlak ve şartlı yakınsaktır belirleyiniz.

8. **(10 puan)** $f(x)=\dfrac{x^2}{1-2x}$ fonksiyonunun $x=0$'daki Taylor serisi açılımını ve geçerli olduğu aralığı bulunuz. (**İpucu:** $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $-1<x<1$.)

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4	5	6	7	8
Puan								

5) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)=5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=5\left(1+\frac12+\frac1{2^2}+\cdots\right)-\left(\frac13+\frac1{3^2}+\frac1{3^3}+\cdots\right)$$
$$=5\cdot\frac{1}{1-1/2}-\frac13\cdot\frac{1}{1-1/3}=5\cdot 2-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}$$
$$=10-1/2=19/2\ //$$

6) a) Oran testini uygulayalım. $a_n=e^n n!/(2n)!$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{e^n\, n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}\,e}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{n!}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\,e}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}=\frac e2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac e2\cdot 0=0<1$$ olduğundan Oran Testine göre verilen seri yakınsaktır.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{n-2}{n^3-n^2+3}}_{\to a_n}$ serisini $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ olmak üzere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak serisi ile karşılaştıralım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-2}{n^3-n^2+3}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n-2)}{n^3-n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}(1-\overbrace{2/n}^{\to 0})}{\cancel{n^3}(1-\underbrace{\frac1n+\frac{3}{n^3}}_{\to 0})}=1$$

Karşılaştırma testinin limit formuna göre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}<\infty$ ise $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi ile $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ serisi aynı karakterlidir. Böylece verilen seri yakınsaktır.

4) (13p) (a) veya b) çözülecek)

a) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\arctan(x)}_{u}\, \underbrace{2x\,dx}_{dv} = \arctan x \cdot x^2 \Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = (\underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} - 0) - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

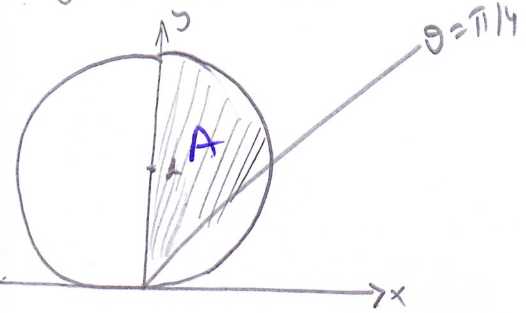
$\left| du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x^2 \right|$ $\displaystyle = \frac{\pi}{4} - \left[x - \arctan(x)\Big|_{x=0}^{1}\right] = \frac{\pi}{4} - \left[1 - (\underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} - \underbrace{\arctan(0)}_{0})\right]$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$ //

b) Kutupsal koordinatlar $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2$ $\Rightarrow$ $r = 2\sin\theta \iff r^2 = 2\underbrace{r\sin\theta}_{y} \iff x^2+y^2 = 2y$

$\iff x^2+y^2-2y=0 \iff \boxed{x^2+(y-1)^2=1}$

$r=2\sin\theta$ kutupsal denklemi $x^2+(y-1)^2=1$ kartezyen denklemine eşittir ve merkezi $(0,1)$ ve yarıçapı 1 olan çemberdir.



$\displaystyle A = \frac{1}{2}\int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} (2\sin\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2\theta\,d\theta = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$

$\displaystyle = \left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]\Big|_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right)$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ //

7) (15p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ olmak üzere $R = \dfrac{1}{L}$ dir.

$\displaystyle L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \sqrt{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\cancel{n^2}(1+\overbrace{3/n^2}^{\to 0})}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{2/n+4/n^2}_{\to 0})}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1} = 1$ // Böylece $R=1$'dir ve yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ olur.

\# $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ kuvvet serisi $-1<x<1$ için mutlak yakınsaktır.

\# $x=-1$ için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ alterne seridir. Leibnitz Testine göre $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ azalan ve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan yakınsaktır. Fakat, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ (harmonik seri ile karşılaştırın) ($x=1$ durumu) ıraksak olduğundan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ şartlı yakınsaktır.

→

4

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisini $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ile karşılaştıralım.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n^2+3}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = 1 < \infty$ olduğundan karşılaştırma testinin limit formuna göre iki seri aynı karakterlidir.

Böylece, $x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ seriler ıraksaktır

8) (10p) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1<x<1$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{1-2x} = x^2\left(\frac{1}{1-2x}\right) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$, $|2x|<1$

Böylece $|2x|<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ için $\frac{x^2}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+2}$ elde edilir