– CEVAP ANAHTARI –

Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: MATEMATİK II	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT1034	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 11/06/2019	

SORULAR

1. **(10 puan)** $\int \frac{dx}{x^2+2x}$ belirsiz integralini hesaplayınız.
2. **(15 puan)** $\int_0^1 \frac{e^{3t}+2e^{2t}-e^t}{e^t+1}dt$ belirli integralini hesaplayınız.
3. **(12 puan)** $x = e^t\sin(t)$, $y = e^t\cos(t)$, $0 \le t \le \pi$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz.
4. **(13 puan)** $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin^2 y}{y}\, dy\, dx$ iki katlı integralini hesaplayınız.

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+2}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln|x| - \ln|x+2|\right] + C$

$= \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}} + C$ //

2) $\int_0^1 \frac{e^{3t}+2e^{2t}-e^t}{e^t+1}dt = \int_0^1 \frac{e^t(e^{2t}+2e^t-1)}{e^t+1}dt = \int_1^e \frac{u^2+2u-1}{u+1}du = \int_1^e \frac{u(u+1)+u-1}{u+1}du$

$u = e^t \Rightarrow du = e^t dt$
$t=0 \Rightarrow u = e^0 = 1,\ t = 1 \Rightarrow u = e$

$= \int_1^e \left(u + \frac{u-1}{u+1}\right)du = \frac{u^2}{2}\Big|_{u=1}^{e} + \int_1^e \left(1 - \frac{2}{u+1}\right)du$

$= \frac{1}{2}(e^2-1) + \left[u - 2\ln|u+1|\right]\Big|_{u=1}^{e} = \frac{1}{2}(e^2-1) + (e - 2\ln(e+1)) - (1 - 2\ln 2)$

$= \frac{1}{2}(e^2-3) + e + 2(\ln 2 - \ln(e+1))$ //

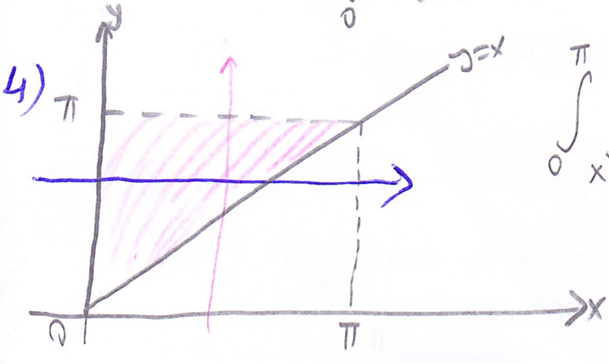
3) $x = e^t\sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$

$y = e^t\cos t \Rightarrow dy/dt = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}(\sin t+\cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 = e^{2t}[\sin^2 t + \cos^2 t].2 = 2e^{2t}$.

Eğri uzunluğu $L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi e^t dt = \sqrt{2}\, e^t\Big|_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$ //

4)



$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin^2 y}{y}\,dy\,dx = \int_{y=0}^{\pi} \int_{x=0}^{y} \frac{\sin^2 y}{y}\,dx\,dy = \int_0^\pi \cancel{y}\cdot\frac{\sin^2 y}{\cancel{y}}\,dy$

$= \int_0^\pi \frac{1-\cos(2y)}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left(y - \cancel{\frac{1}{2}\sin(2y)}\right)\Big|_{y=0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ //

5. **(10 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, 4^{n-1}}{9^{n+1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

6. **(8 puan)** $n \geq 1$ için $a_n > 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

7. **(16 puan)** Aşağıda verilen serilerin karakterini belirleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

8. **(16 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty}$ [redacted] kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ve aralığını bulunuz. Hangi x değerleri için seri mutlak ve şartlı yakınsaktır belirleyiniz.

" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+2}$ "

9. **(Bonus 10 puan)** $f(x) = \frac{1}{4+3x}$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımını ve geçerli olduğu aralığı bulunuz.

(**İpucu:** $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$.)

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~
Puan										

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . 4^{n-1}}{9^{n+1}} = \frac{4^{-1}}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . 4^n}{9^n} = \frac{1}{4.9} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n}_{\text{Geo. seri}} = \frac{1}{4.9} . \frac{8}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{4.9} . \frac{8}{9} . \frac{1}{1-8/9}$

$= \frac{8}{4.9^2} . \frac{1}{1/9} = \frac{2}{9}$ //

6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ serisinin genel terimi e^{a_n} ve

$\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n} = e^0 = 1 \neq 0$ olduğundan genel terimin limiti <u>0 değildir</u>.

Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ serisi ıraksaktır.

7) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^2 e^n}}_{a_n}$ için Oran testini kullandım. $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 e^{n+1}} \cdot \frac{n^2 e^n}{n!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{e} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e(n+1)} = +\infty$

$\rho > 1$ olduğundan Oran testine göre seri <u>ıraksaktır</u>.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Alterne seri için Leibnitz testini uygulayalım.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olmak üzere i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ azalandır

Böylece Leibnitz testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ <u>yakınsaktır</u>.

— MATEMATİK II – FİNAL CEVAP ANAHTARI —

11.06.2019

8) (20p) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n+2}}_{a_n} x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ olmak üzere $R=\frac{1}{L}$ dir.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}\cdot\frac{n+2}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(n+2)}{n+3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} = 1 \ //$$

Böylece, $R = 1/1 = 1$ yakınsaklık yarıçapı, yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ dir.

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+2}$ kuvvet serisi $\underline{-1<x<1}$ için mutlak yakınsaktır.

* $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ harmonik seri olup ıraksaktır.

* $x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ Alterne seridir.

Leibnitz testine göre $a_n = 1/n+2$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$ ve $n+3>n+2, \forall n\in\mathbb{N}$
$\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+2} \Leftrightarrow a_{n+1}<a_n$
olduğundan $\{a_n\}$ azalan dizidir. Böylece, Leibnitz testine göre seri yakınsaktır.

Fakat, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ ıraksak olduğundan seri mutlak yakınsak değildir.

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ serisi şartlı yakınsaktır.

9) (20p) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ -1<x<1$ ve $f(x) = \frac{1}{4+3x} = \frac{1}{4(1+\frac{3}{4}x)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-(-\frac{3}{4}x)}$

$$f(x)=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-(-\frac{3}{4}x)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}x\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n x^n, \ -1<-\frac{3}{4}x<1$$

Böylece, $\boxed{\frac{1}{4+3x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{4^{n+1}}, \quad -\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}}$ $x=0$ civarındaki Taylor açılımı elde edilir.

→

II-yol: $f(x)=\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{1-(-3-3x)}=\frac{1}{1-(-3(x+1))}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3(x+1))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n (x+1)^n$

ve $-1<-3(x+1)<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$

Böylece, $\boxed{\frac{1}{4+3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n (x+1)^n, \quad -\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}}$ $x=-1$ civarındaki Taylor açılımı elde edilir