MAT 1034 – MATEMATİK II 02.06.2017

FİNAL SINAVI CEVAPLARI (2016-2017 BAHAR DÖNEMİ)

1) (10 puan) f sürekli fonk. için

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$ eşitliğini sağlıyorsa $f(x)=?$

Eşitliğin her iki tarafını da x'e göre türetelim

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt\right)$$

$$f(x) = \left(e^{2x} + x2e^{2x}\right) + e^{-x} f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left[1-e^{-x}\right] = e^{2x}(1+2x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{1-e^{-x}}}$$

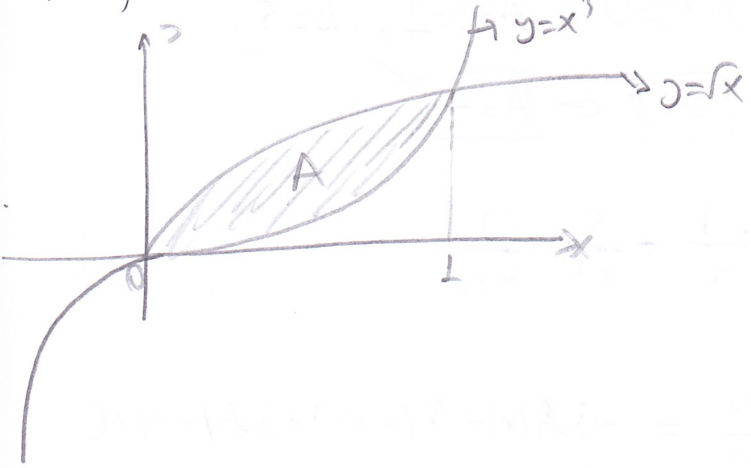
2) $y=x^3$ ile $y=\sqrt{x}$ eğrileri için

Kesiştikleri noktaları bulalım $x^3=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^6 = x \Leftrightarrow x(x^5-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0,\ x^5 = 1 \Leftrightarrow x=1$

Ayrıca, $0<x<1$ de $x^{1/2}=\sqrt{x} > x^3$ olduğundan $\boxed{x=0}$ ve $\boxed{x=1}$ bulunur

$\sqrt{x}$ eğrisi üstte olur. Yani,



a) (8 puan)

$$\text{Alan} = \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^3\right)dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

b) (7 puan) Bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım

$$\text{Hacim} = \pi \int_a^b \left(r_2^2(x) - r_1^2(x)\right)dx \Rightarrow V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2\right]dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(x - x^6\right)dx = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{5\pi}{14}$$

3) $a>0$, $r=2a\sin(\theta)$ kutupsal denklemli

a) (5 puan) $r=2a\sin\theta \iff r^2 = 2a\underbrace{r\sin\theta}_{y} \iff x^2+y^2=2ay$

$$\iff x^2+y^2-2ay=0 \iff \boxed{x^2+(y-a)^2=a^2}$$

Bu ise merkezi $(0,a)$ noktası ve yarıçapı a olan çemberdir.

b) (7 puan) Kutupsal bir $r=f(\theta)$ eğrisinin uzunluğu, $\alpha\leq\theta\leq\beta$ için

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{f^2(\theta)+[f'(\theta)]^2}\,d\theta \text{ dır}$$

$$r=2a\sin\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=2a\cdot\cos\theta \Rightarrow r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2 = 4a^2\sin^2\theta+4a^2\cos^2\theta$$
$$=4a^2$$

$$L=\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{4a^2}\,d\theta=\int_{\pi}^{2\pi}2a\,d\theta=2a(\pi)=2\pi a$$

4) a) (8 puan) $$\frac{2x+5}{x^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{D}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+Dx^2}{x^2(x+1)}$$

$$\iff 2x+5 = Ax^2+Ax+Bx+B+Dx^2$$
$$2x+5=(A+D)x^2+(A+B)x+B \Rightarrow A+D=0,\ A+B=2,\ \boxed{B=5}$$
$$\boxed{D=3} \leftarrow \boxed{A=-3}$$

Böylece, $$\frac{2x+5}{x^2(x+1)}=\frac{-3x+5}{x^2}+\frac{3}{x+1}=-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x+1}$$

$$\int\frac{2x+5}{x^2(x+1)}\,dx=-3\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x+1}=-3\ln|x|+5(-x^{-1})+3\ln|x+1|+C$$
$$=-3\ln|x|-\frac{5}{x}+3\ln|x+1|+C$$

4) b) (8 puan) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^6}} = ?$ $\quad u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$

$4 - x^6 = 4 - u^2$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}} = \int \frac{du}{3\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{2\cos\theta} = \frac{1}{3}\theta + C$$

$u = 2\sin\theta \Rightarrow 4-u^2 = 4-4\sin^2\theta$

$du = 2\cos\theta\, d\theta$ $\quad = 4(1-\sin^2\theta)$

$\quad = 4\cos^2\theta$

$\frac{u}{2} = \sin\theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right)$ ve $u = x^3$ olduğundan

$$\boxed{\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}} = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{2}\right) + C}$$

c) (8 puan)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x\, dx$$

$\cos x = u \Rightarrow du = -\sin x\, dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 1, \; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$= \int_1^0 (1-u^2)u^2(-du) = \int_0^1 u^2(1-u^2)\,du$$

$$= \int_0^1 (u^2 - u^4)\,du = \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$ //

5) a) (10 puan)

$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ I. tip genelleştirilmiş integraldir. Sınırda ∞ vardır.

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{u^{-2+1}}{-1}\Bigg|_1^R$$

$u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$x = e \Rightarrow u = 1$

$x = \infty \Rightarrow u = \infty$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{u}\Bigg|_{u=R}^{1}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1 < \infty$$

Yakınsaktır.

b) (10 puan) $\int_0^5 \frac{dx}{5-x}$ integralinde $x=5$ de fonk ∞ olduğundan II. tip genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^5 \frac{dx}{5-x} = \lim_{c\to 5^-} \int_0^c \frac{dx}{5-x} = \lim_{c\to 5^-} \left(-\ln|5-x|\right)\Big|_{x=0}^{c}$$

$$= -\lim_{c\to 5^-}\left[\ln|5-c| - \ln(5)\right] = \ln(5) - \underbrace{\lim_{c\to 5^-}\left(\ln\underbrace{(5-c)}_{\substack{>0\\ \to 0^+}}\right)}_{-\infty} = +\infty$$

Sonuç $+\infty$ olduğundan verilen integral ıraksaktır.

6) a) (6 puan)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+4}}{3^{n+2}} = \frac{2^4}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

genel terim $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$2/3 < 1$ olduğundan Geometrik seri

$$\frac{2^4}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^4}{3^2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right] = \frac{2^4}{3^2}\cdot\frac{2}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\cdots\right] = \frac{2^5}{3^3}\cdot\frac{1}{1-2/3}$$

$$= \frac{2^5}{3^3}\,\frac{1}{1/3} = \frac{2^5}{3^2} < \infty$$ olduğundan seri yakınsaktır

b) (6 puan) $a_n = \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \to 0,\ n\to\infty$ ve

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\ln(k+2)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right] = \left(\cancel{\frac{1}{\ln(3)}} - \frac{1}{\ln 2}\right) + \left(\frac{1}{\ln 4} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{\ln(n+1)}} - \cancel{\frac{1}{\ln n}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \cancel{\frac{1}{\ln(n+1)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln 2}$$ bulunur

ve $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln 2}\right) = 0 - \frac{1}{\ln 2} < \infty$ olduğundan limit mevcut ve yakınsaktır. Seri yakınsaktır

7) (7 puan) $a_n = n.\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ diziisi $n=2k+1$ tek için $a_n = 0$ ve (Seride ıraksaktır.)

$n=2k$ çift için $a_n = a_{2k} = (2k.)\cos(k\pi) = 2k(-1)^k,\ k=1,2,\ldots$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n$ mevcut değilken ıraksaktır