# FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ, İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

# MAT1034 - MATEMATİK II, FİNAL SINAVI

## CEVAP ANAHTARI 4.06.2018

---

**1) (12 puan)** $\int_0^\infty x e^x \, dx$ I. tip genelleştirilmiş integraldir (sınırında $\infty$ olduğundan)

$$\int_0^\infty x e^x dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \underset{\downarrow\, u}{x} \, \underbrace{e^x dx}_{dv} = \lim_{R\to\infty} \left[ x \cdot e^x \Big|_0^R - \int_0^R e^x dx \right]$$

$du = dx$, $v = e^x$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[ (Re^R - 0) - e^x \Big|_{x=0}^R \right] = \lim_{R\to\infty} \left[ Re^R - (e^R - e^0) \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left( Re^R - e^R + 1 \right) = 1 + \lim_{R\to\infty} \underset{\downarrow\,\infty}{e^R} \underbrace{(R-1)}_{\infty} = \boxed{\infty}$$ olduğundan

integral ıraksaktır

**2) (10 puan)**

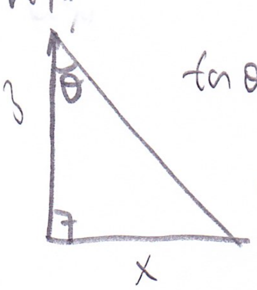
$$\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} = \int \frac{3\sec^2\theta \, d\theta}{(9\sec^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{\cancel{3\sec^2\theta}}{3^3\sec^3\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{3^2\sec\theta}$$

$x = 3\tan\theta \Rightarrow dx = 3\sec^2\theta \, d\theta$

$9 + x^2 = 9(1+\tan^2\theta) = 9\sec^2\theta$

$\frac{x}{3} = \tan\theta \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

veya



$\tan\theta = \frac{x}{3}$

$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{9}\int \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\sin\theta + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C}$$

-8

3) (8 puan) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3x \sin^2x \, dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2x}_{1-u^2} \cdot \overbrace{\sin^2x}^{u^2} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \int_0^1 (1-u^2)\, u^2 \, du$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$x = 0 \Rightarrow u = \sin 0 = 0$

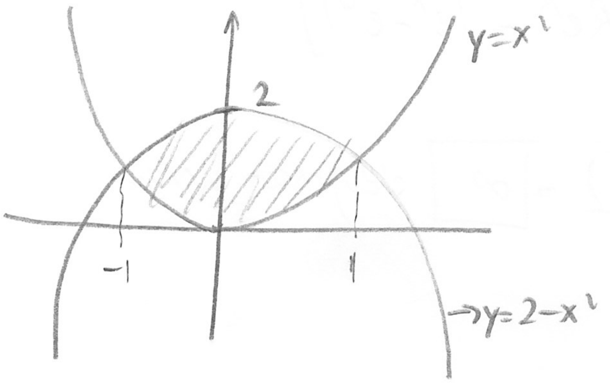
$x = \pi/2 \Rightarrow u = \sin \pi/2 = 1$

$$= \int_0^1 (u^2 - u^4)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \Big|_{u=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{2}{15}}$$

4) (15 puan) $y = x^2$ ile $y = 2 - x^2$ eğrilerinin sınırladığı bölge

$y = 2 - x^2 \Leftrightarrow y - 2 = -x^2$




İki eğrinin kesişim noktaları

$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$

a) (7 puan) Bu bölgenin alanı

$$A = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\, dx$$

$$= \left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = 2(1+1) - \frac{2}{3}(1-(-1))$$

$$= 2.2 - \frac{2}{3}.2 = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{8/3}$$

b) Bu bölgenin x-ekseni etrafında dönd. oluşan cismin hacmi?

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2-x^2)^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (4 + \cancel{x^4} - 4x^2 - \cancel{x^4})\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = \pi \left(4x - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \pi\left(4.2 - \frac{4}{3}.2\right)$$

$$= \pi\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$

5) (10 puan) $x = \cos t + t \sin t$
$y = \sin t - t \cos t$ , $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow$ Eğri uzunluğu $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{-\sin t} + \cancel{\sin t} + t\cos t = t\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} + t\sin t = t\sin t$$

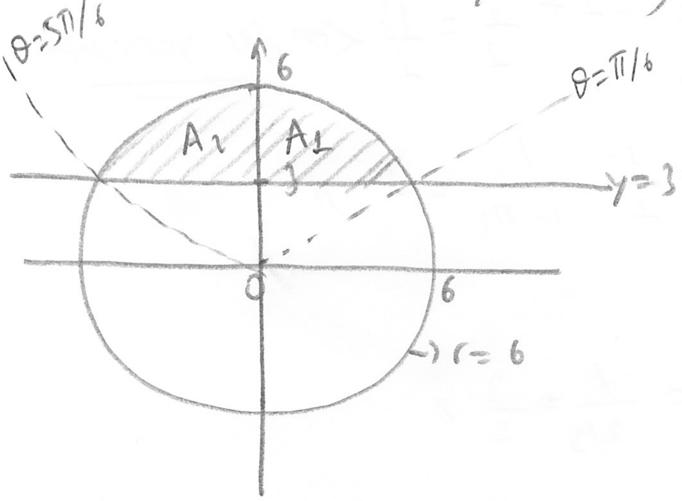
$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2 //$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2}\, dt = \int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^2}{2} = \boxed{2\pi^2}$$

6) (10 puan) $r = 6$ çemberinin içinde $r = 3\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{3}{\sin\theta} \Leftrightarrow \underbrace{r \cdot \sin\theta}_{y} = 3$

(Kutupsal koordinatlarda $x = r \cdot \cos\theta$
$y = r \sin\theta$)

$\Leftrightarrow y = 3$ doğrusunun üst tarafında kalan bölgenin alanını ifade ediniz




Bu iki eğrinin I. ve II. bölgede kesişim noktalarını bulmalıyız

$6 = 3\operatorname{cosec}(\theta) \Leftrightarrow 6 = \frac{3}{\sin\theta}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ve $\frac{5\pi}{6}$

\# İstenilen Alan $= A_1 + A_2$ ve $A_1 = A_2$ dir

$$\text{İstenilen Alan} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[6^2 - (3\operatorname{cosec}\theta)^2\right] d\theta$$

veya

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[6^2 - (3\operatorname{cosec}\theta)^2\right] d\theta \Rightarrow \underline{\text{İstenilen Alan} = 2A_1}\text{. dir}$$

7) (3x8=24 puan) Serilerin karakterlerini belirleyiniz. Eğer yakınsaksa toplamlarını bulunuz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$ → Teleskopik seri

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{2n-3}} - \cancel{\frac{1}{2n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır.

Bu nedenle verilen seri de yakınsaktır ve toplamı $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}}$ dir

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 5 \cdot 1 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2} < \infty$ seri yakınsaktır

# $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\right)}_{r=1/2 \text{ olan Geo seri}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$ //

# $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots}_{r=1/3 \text{ olan geo seri}} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$ //

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, $f(n) = \frac{1}{n\ln(n)}$ olmak üzere verilen seri ile $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x.\ln x}$ integralinin karakterleri aynıdır.

$(n+1)\ln(n+1) > n\ln n \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n\ln n} \Rightarrow f(x)$ azalan fonk dur

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x.\ln x} \underset{u=\ln x}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{\ln 2}^{R} \frac{du}{u} = \lim_{R\to\infty} \ln|u| \Big|_{u=\ln 2}^{R} = \lim_{R\to\infty}\left(\ln R - \ln(\ln 2)\right) = +\infty$$

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = +\infty$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ serisi de ıraksaktır

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+\sqrt{n}+5}$ $\quad a_n = \frac{n+1}{n^2+\sqrt{n}+5}$ olmak üzere $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ seçelim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+\sqrt{n}+5} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+\sqrt{n}+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+1/n)}{\cancel{n^2}(1+1/n^{3/2}+5/n^2)} = 1$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 < \infty$ olduğundan $\sum a_n$ serisi ile $\sum b_n$ serisi aynı karakterlidir

Yani, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+\sqrt{n}+5}$ serisi de ıraksaktır

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(n!)^3\, 2^{5n}}{(3n)!}}_{a_n}$ Oran testini kullandım

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^3\, 2^{5n+5}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3\, \cancel{2^{5n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(n+1)!}{n!\; n!\; n!} \cdot \frac{2^5 \cdot \cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}}$$

$$= 2^5 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 2^5 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{32}{27} > 1 \text{ olduğundan}$$

Oran testine göre verilen <u>seri ıraksaktır</u>.

8) (11 puan) $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin $n$. kısmi toplamı $S_n = \frac{n^2}{1+2n^2}$ olsun.

a) (3 puan) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+2n^2} = \frac{1}{2} < \infty$ olduğundan kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla, $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır ve toplamı $\frac{1}{2}$ dir.

b) (3 puan) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan genel terimin limiti 0 dır.

Yani, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur.

c) (5 puan) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi ile karşılaştıralım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a_n}}{1+a_n} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = 1 < \infty$$ olduğundan

Karşılaştırma testinin limit haline göre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ ile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi aynı karakterlidir. Yani, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ serisi yakınsaktır.