– CEVAP ANAHTARI –

Fen-Edebiyat Fakültesi

BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI

Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2017	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 28/01/2020	

SORULAR

1. **(10+8+8 puan)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ olmak üzere

a) f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir? Açıklayınız.

b) $\cancel{f_x}$ $f_y(x,y)$ kısmi türevini $(x,y)\neq(0,0)$ ve $(x,y)=(0,0)$ için ayrı ayrı bulunuz.

c) ⟵ $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevini bulunuz

2. **(14 puan)** f, 2. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip herhangi bir fonksiyon olmak üzere $w = f(x,y) = f(e^u+\sin(v),\, e^u+\cos(v))$ olarak tanımlansın. $w_{uv} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)$ kısmi türevini f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} ve f_{yy} kısmi türevlerine bağlı olarak bulunuz.

1) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{r\to 0 \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} \dfrac{r^3\cos^3\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$

$= \lim\limits_{r\to 0}(r.\cos^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta) = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$ → Limit değeri her θ açısı için farklı olduğundan limit mevcut değildir. Dolayısıyla $f(x,y)$ fonk $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

b) $(x,y)\neq(0,0)$ için $f_y(x,y) = \dfrac{2x(x^2+y^2)-2y(x^3+2xy)}{(x^2+y^2)^2}$ ve

$f_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0+2.0.h}{h^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h^3} = 0.$

Böylece $f_y(x,y) = \begin{cases}\dfrac{2x(x^2+y^2)-2y(x^3+2xy)}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\longrightarrow \dfrac{2x^3-2xy^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$

c) $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2.h(h^2)-2.0}{h^4}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^3}{h^5}$ 3p/

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{h^2} = +\infty$

* Limit mevcut değildir
* Türev mevcut değil.

2) $w=f(x,y)=f(e^u+\sin v, e^u+\cos v) \Rightarrow x=e^u+\sin v,\ y=e^u+\cos v$

$\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = f_x\cdot e^u + f_y\cdot e^u = e^u(f_x+f_y)$

$w = f$; x, y; u, v

$w_{uv} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(e^u.[f_x+f_y]\right) = e^u\left[\dfrac{\partial f_x}{\partial v} + \dfrac{\partial f_y}{\partial v}\right]$

$= e^u\left[\left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f_x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\dfrac{\partial f_y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)\right] = e^u\left[f_{xx}\cos v - f_{yy}\sin v + f_{xy}(\cos v - \sin v)\right]$

3. **(10+10+5 puan)** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$ olmak üzere

   a) $D_u f(1,-1)$ yönlü türevinin en büyük olduğu $\vec{u}$ yönünü ve bu türevin en büyük değerini bulunuz.

   b) $D_u f(1,-1) = -3$ olması için $\vec{u}$ ne olmalıdır ?

   c) $(1,-1,4)$ noktasında $z = f(x,y)$ yüzeyine teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

4. **(18 puan)** $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$ fonksiyonunun yerel maksimum, minimum ve eyer noktalarını belirleyiniz ve bu noktalardaki değerlerini bulunuz.

5. **(17 puan)** Eğer $x + y + z^2 = 16$ ise, pozitif x, y ve z sayılarının çarpımlarının en büyük değerini bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

Sorular	1	2	3	4	5
Puan					

BAŞARILAR

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

3) a) $f_x = 2x - y$, $f_x(1,-1) = 2+1 = 3$ ve $f_y = -x + 2y - 1$, $f_y(1,-1) = -1-2-1 = -4$

$\nabla f|_{(1,-1)} = f_x(1,-1)\hat{i} + f_y(1,-1)\hat{j} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ // $f(x,y)$ fonk. $(1,-1)$ noktasındaki yönlü türevinin en büyük değeri $\left|\nabla f|_{(1,-1)}\right| = |3\hat{i} - 4\hat{j}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ dir. Bu değer $\nabla f|_{(1,-1)}$ yönündeki birim vektör yönünde olur. Yani, $\boxed{\vec{u} = \frac{\nabla f|_{(1,-1)}}{5} = \frac{3\hat{i}}{5} - \frac{4\hat{j}}{5}}$ dir

Bu durumda, $D_u f(1,-1) = \nabla f|_{(1,-1)} \cdot \vec{u} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot \left(\frac{3\hat{i}}{5} - \frac{4\hat{j}}{5}\right) = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5 \to$ Alabileceği olası en büyük değer

b) $D_u f(1,-1) = -3$ olacak biçimdeki $\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ birim vektörünü bulalım.

$D_u f(1,-1) = \nabla f|_{(1,-1)} \cdot \vec{u} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot (u_1\hat{i} + u_2\hat{j}) = 3u_1 - 4u_2 = -3 \Rightarrow 3u_1 = 4u_2 - 3$, $\boxed{u_1 = \frac{4}{3}u_2 - 1}$

$u = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ birim vektör olduğundan $\boxed{u_1^2 + u_2^2 = 1}$ dir

$u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{4}{3}u_2 - 1\right)^2 + u_2^2 = 1$

$\Leftrightarrow 25u_2^2 - 24u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2(25u_2 - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{u_2 = 0}$ veya $\boxed{u_2 = \frac{24}{25}}$

* $u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -1 \Rightarrow \boxed{u = -\hat{i}}$
* $u_2 = \frac{24}{25} \Rightarrow u_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25} - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \boxed{u = \frac{7}{25}\hat{i} + \frac{24}{25}\hat{j}}$

c) $z = f(x,y) \Rightarrow F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ seviye yüzeyi $z = f(x,y)$ yüzeyidir

$\nabla F|_{(1,-1,4)} = f_x(1,-1)\hat{i} + f_y(1,-1)\hat{j} - \hat{k} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$(1,-1,4)$ noktasında $z = f(x,y)$ yüzeyine teğet olan düzlem denklemi

$\nabla F|_{(1,-1,4)} \cdot \left((x-1)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + (z-4)\hat{k}\right) = 0$ eşitliğinden

$3(x-1) - 4(y+1) - (z-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x - 4y - z - 3 = 0}$ bulunur

4) $f(x,y)=4xy-x^4-y^4+16 \Rightarrow f_x(x,y)=4y-4x^3$ ve $f_y(x,y)=4x-4y^3$

$f_x(x,y)=0 \Leftrightarrow \boxed{y=x^3}$ ve $f_y(x,y)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=y^3}$ elde edilir

$y=x^3=(y^3)^3=y^9 \Leftrightarrow y^9-y=0 \Leftrightarrow y(y^8-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{y=0}$ veya $y^8=1 \Leftrightarrow \boxed{y=\mp 1}$

Böylece, $y=-1,0,+1$ olabilir $x=y^3$ olduğundan i) $y=-1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,-1)$

ii) $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$ ve iii) $y=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,1)$ 3 kritik nokta bulunur

Ayrıca, $f_{xx}(x,y)=-12x^2$, $f_{yy}(x,y)=-12y^2$ ve $f_{xy}(x,y)=4$

$(-1,-1)$ için $D=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-12)(-12)-4^2=144-16=128>0$ ve

$f_{xx}(1,-1)=-12<0$ olduğundan $(-1,-1)$ yerel maksimum noktasıdır ve $f(-1,-1)=18$.

$(0,0)$ için $D=0.0-4^2=-16<0 \Rightarrow (0,0)$ eyer noktasıdır ve $f(0,0)=16$.

$(1,1)$ için $D=(-12)(-12)-16=128>0$ ve $f_{xx}(1,1)=-12<0$ olduğundan $(1,1)$ yerel maksimum noktasıdır ve $f(1,1)=18$.

5) $f(x,y,z)=xyz$ ve $g(x,y,z)=x+y+z^2-16=0$ kısıtı altında $f(x,y,z)$ nin en büyük değerini Lagrange çarpanları yöntemi ile bulalım

$\nabla f=\lambda \nabla g \Leftrightarrow yz\hat{i}+xz\hat{j}+xy\hat{k}=\lambda(\hat{i}+\hat{j}+2z\hat{k})$

$\Leftrightarrow yz=\lambda \quad , \quad xz=\lambda \quad , \quad xy=2\lambda z$

$\lambda=yz=xz \Leftrightarrow \boxed{x=y}$ $\quad x.x=2\,xz.z \Rightarrow x^2=2xz^2$ $\quad \boxed{x=2z^2}$

Böylece, $\boxed{x=y=2z^2}$ bulunur $g(x,y,z)=0$ eşitliğinden

$2z^2+2z^2+z^2=16 \Rightarrow 5z^2=16 \Rightarrow z^2=\frac{16}{5} \Rightarrow \boxed{z=\mp\frac{4}{\sqrt{5}}}$

$z>0$ olduğundan $\boxed{z=\frac{4}{\sqrt{5}}}$ olur. Bu durumda $\boxed{x=y=2z^2=2.\frac{16}{5}=\frac{32}{5}}$ bulunur

Böylece, $f(x,y,z)=xyz$ nin en büyük değeri $\left(\frac{32}{5},\frac{32}{5},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ noktasında olur ve

$\frac{32}{5}\cdot\frac{32}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{4096}{25\sqrt{5}}}$ dir.