- CEVAP ANAHTARI -

Fen-Edebiyat Fakültesi

	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2017	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 16/01/2020	

SORULAR

1. **(35 puan)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun

   a) **(7 puan)** $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

   b) **(6 puan)** $(x,y) \neq (0,0)$ için $f_x(x,y)$ ve $f_x(0,0)$ bulunuz.

   c) **(6 puan)** $(x,y) \neq (0,0)$ için $f_y(x,y)$ ve $f_y(0,0)$ bulunuz.

   d) **(6 puan)** $f_x(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasındaki sürekli midir ?

   e) **(10 puan)** $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ karışık türevleri bulunuz. Bu türevler birbirine eşit midir? Değil ise neden eşit olmadığını açıklayınız.

2. **(8+7 puan)** f, 2. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip herhangi bir fonksiyon olmak üzere $w = f(u,v) = f(y\sin(x),\, e^{xy})$ olarak tanımlansın.

   a) $w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ ve $w_y = \dfrac{\partial w}{\partial y}$ kısmi türevlerini f_u ve f_v kısmi türevlerine bağlı olarak bulunuz.

   b) $w_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$ kısmi türevini f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv} ve f_{vv} kısmi türevlerine bağlı olarak bulunuz.

1) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r\cdot\cos^3\theta = 0$ Limit mevcut ise 0 olmalıdır.

$\left(\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right)$

$0 \leq \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{x^2|x|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|x| = |x|$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$ olduğundan sıkıştırma Teo. göre

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| = 0$ olur. Dolayısıyla $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$ olur. Böylece,

$f(x,y)$ fonk $(0,0)$ da süreklidir

b) $(x,y) \neq (0,0)$ için $f_x(x,y) = \dfrac{3x^2(x^2+y^2) - 2x x^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{3x^4+3x^2y^2-2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3/h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3}{h^3} = 1.$

$$\boxed{f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

c) $(x,y) \neq (0,0)$ için

$f_y(x,y) = \dfrac{0 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ ve

$f_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}}$

3. **(7+6+5 puan)** $f(x,y,z) = x^2y + x\sqrt{z+1}$ fonksiyonunun

   a) $(1,2,3)$ noktasında $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

   b) f fonksiyonu $(1,2,3)$ noktasında en hızlı hangi yönde artar? Bu noktadaki maksimum artış oranı nedir ?

   c) $f(x,y,z)$ yüzeyinin $(1,2,3)$ noktasındaki teğet düzlemini bulunuz.

4. **(16 puan)** $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$ fonksiyonunun yerel maksimum, minimum ve eyer noktalarını belirleyinz. Bu noktalardaki değerlerini bulunuz.

5. **(16 puan)** $x + 2y + 3z = 13$ düzlemi üzerinde $(1,1,1)$ noktasına en yakın noktayı bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır.Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

Sorular	1	2	3	4	5
Puan					

BAŞARILAR

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

3) a) $f_x = 2xy + \sqrt{z+1}$, $f_y = x^2$, $f_z = \dfrac{x}{2\sqrt{z+1}}$

$f_x(1,2,3) = 2.1.2 + \sqrt{4} = 6$, $f_y(1,2,3) = 1$, $f_z(1,2,3) = \dfrac{1}{2.2} = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow \boxed{\nabla f\Big|_{(1,2,3)} = 6\hat{i} + \hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k}}$

$|v| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ // $\Rightarrow \dfrac{v}{|v|} = \dfrac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ → birim vektör

$(D_v f)\Big|_{(1,2,3)} = (\nabla f)\Big|_{(1,2,3)} \cdot \dfrac{v}{|v|} = \left(6\hat{i} + \hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k}\right) \cdot \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = 6.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{25}{6}}$ //

b) f fonk $(1,2,3)$ noktasında en hızlı $(\nabla f)\Big|_{(1,2,3)} = 6\hat{i} + \hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k}$ yönünde artar //

Bu noktadaki maksimum artış oranı $\left|(\nabla f)\Big|_{(1,2,3)}\right| = \left|6\hat{i} + \hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k}\right| = \sqrt{6^2 + 1^2 + \frac{1}{4^2}} = \sqrt{37 + \frac{1}{16}}$ //

c) $(\nabla f)\Big|_{(1,2,3)} \cdot \left[(x-1)\hat{i} + (y-2)\hat{j} + (z-3)\hat{k}\right] = 0$

$6(x-1) + 1.(y-2) + \frac{1}{4}(z-3) = 0 \Rightarrow 6x + y + \frac{z}{4} - 6 - 2 - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 6x + y + \frac{z}{4} = 8 + \frac{3}{4}$

$\boxed{24x + 4y + z = 35}$

4) $f_x(x,y) = 3x^2 + 6x$, $f_y(x,y) = 3y^2 - 6y$ $\Rightarrow f_x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ veya $x = -2$

$f_{xx}(x,y) = 6x + 6$, $f_{yy}(x,y) = 6y - 6$ $\quad f_y = 0 \Leftrightarrow 3y(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ veya $y = 2$

$f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y) = 0$ $\quad$ Kritik noktalar: $(0,0), (0,2), (-2,0), (-2,2)$

\# $(0,0)$ için: $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 6.(-6) - 0 = -36 < 0 \Rightarrow (0,0)$ eyer noktadır ve $f(0,0) = 0$

\# $(0,2)$ için: $D = 6.6 - 0 = 36 > 0$ ve $f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow (0,2)$ yerel min. noktasıdır ve $f(0,2) = -$

\# $(-2,0)$ için: $D = -6.(-6) - 0 = 36 > 0$ ve $f_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow (-2,0)$ yerel max noktasıdır ve $f(-2,0) = 4$

\# $(-2,2)$ için: $D = -6.(6) - 0 = -36 < 0 \Rightarrow (-2,2)$ eyer noktasıdır ve $f(-2,2) = 0$

2)

b) $f_x(x,y)$'nin $(0,0)$'da sürekli olması için $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 1$ olmalıdır

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{r^4}(\cos^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta)}{\cancel{r^4}}$$

$$= (\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta) \equiv \cos^2\theta(3-2\cos^2\theta)$$

* Sonuç θ açısına bağlı olduğundan limit mevcut değildir

Böylece, $f_x(x,y)$ $(0,0)$ da sürekli değildir.

c)

$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{0^4+3.0^2.h^2}{(0^2+h^2)^2} - 1}{h}$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\frac{0}{h^4} - 1}{h} = \lim_{h\to0} -\frac{1}{h} = \begin{cases} -\infty, & h\to0^+ \\ +\infty, & h\to0^- \end{cases}$$ limit mevcut değildir

$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{-2h^3.0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} =$

$$= \lim_{h\to0} \frac{0}{h^5} = 0$$

Böylece $f_{yx}(0,0) = 0$ ve $f_{xy}(0,0)$ mevcut değildir dolayısıyla $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ olur.

* Karışık türevler f_{xy} ve f_{yx} 'in birbirine eşit olması için $f(x,y)$ ve kısmi türevleri f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} fonksiyonlarının $(0,0)$'da sürekli olması gerekir. b şıkkında f_x 'in $(0,0)$'da sürekli olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu nedenle $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevleri birbirine eşit olmayacaktır.

5) $g(x,y,z) = x+2y+3z-13=0$ kısıtı altında $f(x,y,z) = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

fonk. için Lagrange çarpanları yöntemini uygulayalım.

$\nabla f = 2(x-1)\hat{i} + 2(y-1)\hat{j} + 2(z-1)\hat{k}$, $\nabla g = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ olmak üzere

$\nabla f = \lambda \nabla g$ ve $g(x,y,z)=0$ eşitliklerini sağlayan x,y,z ve λ belirleyelim

\# $\nabla f = \lambda \nabla g \iff 2(x-1)\hat{i} + 2(y-1)\hat{j} + 2(z-1)\hat{k} = \lambda(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$\iff 2(x-1)=\lambda$, $2(y-1)=2\lambda$, $2(z-1)=3\lambda$

$\boxed{x=\frac{\lambda}{2}+1}$ $\boxed{y=\lambda+1}$ $\boxed{z=\frac{3\lambda}{2}+1}$

\# $g(x,y,z) = g\left(\frac{\lambda}{2}+1, \lambda+1, \frac{3\lambda}{2}+1\right)=0 \iff \frac{\lambda}{2}+1+2\lambda+2+\frac{9\lambda}{2}+3=13$

$\iff 7\lambda = 7 \iff \boxed{\lambda=1}$

$\boxed{\lambda=1 \Rightarrow x=3/2,\ y=2,\ z=5/2}$ Böylece $(3/2, 2, 5/2)$ noktası verilen düzlem üzerinde $(1,1,1)$ noktasına en yakın olan noktadır.

2) $w=f(u,v) = f(y\sin(x), e^{xy}) \rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ u & & v \\ x,y & & x,y \end{array}$$

$u = y\sin(x)$
$v = e^{xy}$
$u_x = y\cos x$
$u_y = \sin x$
$v_x = y e^{xy}$
$v_y = x e^{xy}$

a) $w_x = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_u\cdot y\cdot\cos x + f_v\cdot y\cdot e^{xy}$ //

$w_y = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = f_u\cdot\sin x + f_v\cdot x e^{xy}$ //

b) $w_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_u\cdot y\cdot\cos(x) + f_v\cdot y\cdot e^{xy}\right)$

$= \left[\underbrace{\frac{\partial f_u}{\partial y}}_{f_{uu}\cdot u_y + f_{uv} v_y} y\cdot\cos(x) + f_u\cdot 1\cdot\cos(x)\right] + \left[\underbrace{\frac{\partial f_v}{\partial y}}_{f_{vu} u_y + f_{vv} v_y}\cdot y\cdot e^{xy} + f_v\cdot 1\cdot e^{xy} + f_v\cdot y\cdot e^{xy}\cdot x\right]$

$= (f_{uu}\cdot\sin x + f_{uv} x e^{xy})\, y\cdot\cos(x) + f_u\cos(x) + \left[f_{vu}\cdot\sin(x) + f_{vv} x e^{xy}\right] y\cdot e^{xy} +$
$+ f_v\cdot e^{xy} + f_v\, y\cdot e^{xy}\cdot x$

$= f_{uu}\cdot y\cdot\sin x\cdot\cos x + f_{vv}\, xy\, e^{2xy} + f_{uv}\left[xy\, e^{xy}\cos x + y e^{xy}\sin x\right] + f_u\cdot\cos x + f_v(e^{xy} + xy e^{xy}$