- CEVAP ANAHTARI -

Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ I	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2017	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 15/11/2019	

SORULAR

1. **(12+13 puan)** Aşağıdaki limitleri bulunuz veya limitin olmadığını gösteriniz.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\ \cos^2(x)}{x^4+y^4}$ **b)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$\left(\textbf{Not}: x>0 \text{ için } x-\frac{x^3}{3!}\le \sin(x)\le x\right)$

2. **(15 puan)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir? Açıklayınız.

3. **(15 puan)** $P=(1,0,1)$, $Q=(-2,1,3)$ ve $R=(4,2,5)$ noktalarından geçen düzlemin normalini ve düzlemin denklemini bulunuz.

1) a) $y=tx$, $(t\in\mathbb{R})$ doğrusu ile $(0,0)$ noktasına yaklaşalım $\quad \cos^2(0)=1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5y^4\cos^2(x)}{x^4+y^4} = \lim_{x\to0}\frac{5t^4x^4\cos^2(x)}{x^4+t^4x^4} = \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^4}\,5t^4\cos^2(x)}{\cancel{x^4}(1+t^4)} = \frac{5t^4}{1+t^4}\lim_{x\to0}\cos^2(x) = \frac{5t^4}{1+t^4}$$

Limitin sonucu t reel sayısına bağlı olduğundan, limit mevcut değildir.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \underset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=} \lim_{r\to0}\frac{\sin(r^2)}{r^2} \underset{r^2=t}{=} \lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$ Eğer bu limit mevcut ise 1 olmalıdır.

Limitin mevcutluğunu inceleyelim. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $x^2+y^2\geq0$ olduğundan verilen eşitsizlikten

$(x^2+y^2)-\frac{(x^2+y^2)^3}{3!}\le\sin(x^2+y^2)\le(x^2+y^2)$ elde edilir. Bu eşitsizliği $1/(x^2+y^2)$ ile bölelim

$1-\frac{(x^2+y^2)^2}{3!}\le\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\le1$ elde edilir. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1-\frac{(x^2+y^2)^2}{3!}\right)=1-0=1$

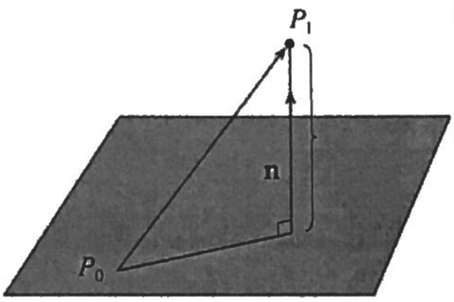
olduğundan Sıkıştırma Teoremine göre $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$ elde edilir.

2) $f(0,0)=1$ olarak tanımlanmıştır. f fonk. $(0,0)$ noktasında sürekli olması için $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$ olmalıdır.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y) \underset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=} \lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\, \cancel{r^4}^{\,2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2}{\cancel{r^2}}=0$$ $\Rightarrow$ Eğer limit mevcut ise 0 olmalıdır.

$$0\le\left|\frac{x(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\,|x^2-y^2|\,|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)} \le \frac{|x|\,(x^2+y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = |x|(x^2+y^2)$$ ve $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|(x^2+y^2)=0$ elde edilir.

(* Üçgen eşitsizliği $|x-y|\le|x|+|y| \Rightarrow |x^2-y^2|\le|x^2|+|y^2|=x^2+y^2$)



4. a) **(10 puan)** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ olmak üzere, P_1 **noktasının** $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz.

b) **(10 puan)** $Ax + By + Cz = D_1$ ve $Ax + By + Cz = D_2$ düzlemleri arasındaki uzaklığın $\dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ olduğunu gösteriniz.

5. **(15 puan)** $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = -5t$ doğrusunun $-4x - 6y + 10z = 9$ düzlemiyle olan ilişkisini (dik veya paralel olma durumları) belirleyiniz.

6. **(10 puan)** $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve tanım kümesinin grafiğini çiziniz.
(**Not:** $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$)

***Sınav süresi 90 dakikadır.Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

BAŞARILAR

Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN

4) a) $\vec{P_0P_1} = (x_1-x_0)\hat{i} + (y_1-y_0)\hat{j} + (z_1-z_0)\hat{k}$, düzlemin normali $n = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$
P_1 noktasının düzleme olan uzaklığı $\vec{P_0P_1}$ vektörünün düzlemin normali n vektörü üzerine skaler izdüşümüdür. Yani, bu uzaklık d ise $d = \left|\vec{P_0P_1} \cdot \dfrac{n}{|n|}\right|$ dir

$$d = \frac{\left|\left((x_1-x_0)\hat{i} + (y_1-y_0)\hat{j} + (z_1-z_0)\hat{k}\right) \cdot \left(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|A(x_1-x_0) + B(y_1-y_0) + C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - \overbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}^{D \text{ düzlem üzerinde}}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ olarak bulunur

b) $Ax + By + Cz = D_1$ düzlemi üzerinden bir $Q = (x_1, y_1, z_1)$ noktası alalım. Açıktır ki, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D_1$ olur. Q noktasının $Ax + By + Cz = D_2$ düzlemine olan uzaklığı a) dan

$$d = \frac{|\overbrace{Ax_1 + By_1 + Cz_1}^{D_1} - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ bulunur

2. sorunun devamı: $0 \le \left| \frac{x.(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} \right| \le |x|(x^2+y^2)$ ve $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|(x^2+y^2) = 0$ olduğundan 3

Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} \right| = 0$ elde edilir!

Dolayısıyla $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} = 0 \neq f(0,0) = 1$ elde edilir

Böylece $f(x,y)$ fonk $(0,0)$ noktasında sürekli değildir

3 (15p) $P=(1,0,1)$, $Q=(-2,1,3)$, $R=(4,2,5) \Rightarrow \vec{PQ} = (-2-1)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (3-1)\hat{k}$

$\boxed{\vec{PQ} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}$

$\vec{PR} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{QR} = 6\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{j}$

Bu vektörler aranan düzlemin üzerindedir. Bu düzlemin normaline paralel olan bir vektör bu üç vektörün herhangi ikisinin vektörel çarpımı ile elde edilen vektördür

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \overset{0}{\cancel{(4-4)}}\hat{i} - (-12-6)\hat{j} + (-6-3)\hat{k} = 18\hat{j} - 9\hat{k}$$

İstenilen düzlemin normali $\boxed{n = 18\hat{j} - 9\hat{k}}$ veya $\boxed{n = 2\hat{j} - \hat{k}}$ veya $n = c(18\hat{j} - 9\hat{k}), c \in \mathbb{R}$ olarak alınabilir

Böylece $n = 18\hat{j} - 9\hat{k}$ ve bir noktası $P=(1,0,1)$ olan düzlemin denklemini bulabiliriz

$\left((x-1)\hat{i} + (y-0)\hat{j} + (z-1)\hat{k}\right) \cdot n = 0$ olmalıdır

$(x-1).0 + (y-0).(18) + (z-1)(-9) = 0 \Rightarrow \boxed{18y - 9z + 9 = 0}$ //

veya $Q=(-2,1,3)$ noktası kullanılırsa

$(x+2).0 + (y-1)(18) + (z-3)(-9) = 0 \Rightarrow 18y - 18 - 9z + 27 = 0$

$\boxed{18y - 9z + 9 = 0}$ //

veya $n = 2\hat{j} - \hat{k}$, $P=(1,0,1)$ için

$(x-1)0 + (y-0)2 + (z-1)(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{2y - z + 1 = 0}$ bulunur

5) (15p) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = -5t \end{cases}$ parametrik olarak verilen doğru $(1,-2,0)$ noktasından geçer ve

$v = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ vektörüne paraleldir

$-4x - 6y + 10z = 0$ düzleminin normali $n = -4\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$ dır

$n \cdot v = -8 - 18 - 50 = -76 \neq 0$ bu vektörler dik değildir

$$n \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -6 & +10 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (30-30)\hat{i} - (20-20)\hat{j} + (-12+12)\hat{k} = 0 \Rightarrow$$ n ile v vektörler paraleldir

Böylece, düzlemin normali ile doğru birbirine paraleldir dolayısıyla doğru verilen düzleme diktir

6) (20p) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2)$ fonksiyonun tanım kümesi

$-1 \leq x^2+y^2-2 \leq 1 \iff 1 \leq x^2+y^2 \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan (x,y) noktalarının kümesidir

$D(f) = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$ ve $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ Orijin merkezli, $r=1$ olan daire

$x^2+y^2=3 \Rightarrow$ " , $r=\sqrt{3}$ " "