Fen-Edebiyat Fakültesi	BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI	
Adı:	**Dersin Adı: İLERİ ANALİZ I**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT2017**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Sınav Tarihi: 18/02/2021 Saat 10:30-12:15**	

Açıklamalar

1. **Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.**
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Farklı el yazıları, Türkçe haricinde açıklamalar, karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
   Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.
4. **Cevaplarınızı anlaşılır ve okunabilecek bir biçimde sisteme yükleyiniz.**
5. **Sorulardaki** a, b **ve c sayıları aşağıdaki gibi kullanılmalıdır.** Okul numaranızın

   6. basamağındaki rakam a,

   8. basamağındaki rakam b,

   9. basamağındaki rakam c

   Örneğin, okul numaranız 121507085 ise

   $$12151\underbrace{7}_{a}0\underbrace{8}_{b}\underbrace{5}_{c}$$

   $a = 7, b = 8, c = 5$ alınacaktır.
6. **Bu sınava katılan her öğrenci bu kuralları ve önceden ilan edilmiş tüm kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

$$f(x,y) = \frac{x^{b+3}\ y^{c+3}}{x^6 + y^6}\sin(x^6 + y^6)$$

fonksiyonu için

1. **(15 puan)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti mevcut ise değeri nedir ? Limitin bulduğunuz değeri aldığını **Sıkıştırma Teoremi** veya **Limitin tanımını** kullanarak gösteriniz. Eğer limit mevcut değil ise neden olmadığını açıklayınız.

2. **(5 puan)** $f(x,y)$ fonksiyonu nerede süreklidir? $(0,0)$ noktasında sürekli olacak biçimde tanımlanabilir mi? **Açıklayınız.** Cevabınız EVET ise bu sürekli fonksiyonu **tanımlayınız**.

3. **(20 puan)** $w = e^{-\theta t} \sin\left((b+2)x\right) \cos\left((c+2)\,y\right)$ olmak üzere w fonksiyonunun tüm (x, y, t) noktalarında

$$w_t = w_{xx} + w_{yy}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlaması için θ'nın alabilecek olduğu değerleri belirleyiniz.

4. **(15 puan)** f 2. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$w = f(u, v) = f\left(\sin(x^2 + y^2), \cos(x^2 + y^2)\right)$$

olarak tanımlansın. w_{yx} ve w_{yy} kısmi türevlerini f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv} ve f_{vv} kısmi türevlerine bağlı olarak bulunuz.

5. **(20 puan)**

$$g(x, y) = \frac{x^{b+2} \; + \; y^{c+2}}{(x-y)^2}$$

fonksiyonunun $(1, 0)$ noktasında hangi $\overrightarrow{u}$ vektörü yönünde türevi 0 dır?

6. **(25 puan)** $z = \sqrt{a(x^2 + y^2)}$ konisinden $(b+2, c+2, 0)$ noktasına olan minimum uzaklığı bulunuz.
Not: Lagrange çarpanları yöntemi sınava dahil değildir.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

MAT 2017 İLERİ ANALİZ I BÜTÜNLEME SINAVI 18.02.2021

KISA CEVAP ANAHTARI

1) $f(x,y) = \dfrac{x^{b+3}y^{c+3}}{x^6+y^6}\sin(x^6+y^6)$ ve $b \geq 0, c \geq 0, b+c \neq 0$ olmak üzere

$y = tx$ veya $\begin{array}{l} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{array}$ dönüşümler ile $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ olduğu

bulunur. Şimdi bunu ispatlayalım

$\forall x,y \in \mathbb{R}$ için $|\sin(x^6+y^6)| \leq 1$ dir.

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^{b+3}y^{c+3}}{x^6+y^6} \underbrace{\sin(x^6+y^6)}_{\leq 1} \right| \leq \frac{|x^{b+3}||y^{c+3}|}{x^6+y^6} = \frac{|x^by^c||x^3||y^3|}{x^6+y^6}$$

$* \; |x^3| = \sqrt{x^6} \leq \sqrt{x^6+y^6}$

$* \; |y^3| = \sqrt{y^6} \leq \sqrt{x^6+y^6}$

$$\leq \frac{|x^by^c| \cancel{\sqrt{x^6+y^6}}\,\cancel{\sqrt{x^6+y^6}}}{\cancel{x^6+y^6}} = |x^by^c|$$

Böylece $b \geq 0, c \geq 0, b+c \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x^by^c| = 0$ ve, $0 \leq |f(x,y)| \leq |x^by^c|$

olduğundan sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$ bulunur ve dolayısıyla

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ dır.

2) $f(x,y)$ fonk $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 'da tanımlıdır. Tanım kümesinin tamamında süreklidir.

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{b+3}y^{c+3}}{x^6+y^6}\sin(x^6+y^6), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $F(x,y)$ fonk tüm $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

3) $w = e^{-\theta t}\sin((b+2)x)\cos((c+2)y)$ fonksiyonu için $w_t = \dfrac{\partial w}{\partial t}$, $w_{xx} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

ve $w_{yy} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ kısmi türevleri hesaplanarak "$w_t = w_{xx} + w_{yy}$"

denkleminde yerine yazılırsa θ'nın değeri basit bir biçimde bulunur.

4) (5p) $w = f(u,v) = f(\sin(x^2+y^2), \cos(x^2+y^2)) \Rightarrow w_{yx}, w_{yy} = ?$

$w = f(u,v)$; u, v; x, y

$u = \sin(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$

$v = \cos(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -2x\sin(x^2+y^2), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y\sin(x^2+y^2)$

$w_y = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = f_u \cdot 2y\cos(x^2+y^2) - f_v\, 2y \cdot \sin(x^2+y^2)$

$w_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(w_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2f_u \cdot y\cos(x^2+y^2) - 2f_v \cdot y\sin(x^2+y^2)\right)$

$$= 2y\left[\frac{\partial f_u}{\partial x}\cdot\cos(x^2+y^2) - f_u\, 2x\sin(x^2+y^2) - \frac{\partial f_v}{\partial x}\cdot\sin(x^2+y^2) - f_v \cdot 2x\cos(x^2+y^2)\right]$$

$$= 2y\cos(x^2+y^2)\left[\frac{\partial f_u}{\partial x} - 2x f_v\right] - 2y\sin(x^2+y^2)\left[2x f_u + \frac{\partial f_v}{\partial x}\right]$$

$\to \frac{\partial f_u}{\partial x} = \frac{\partial f_u}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_{uu}\cdot 2x\cos(x^2+y^2) - f_{uv}\, 2x\sin(x^2+y^2)$

$\to \frac{\partial f_v}{\partial x} = \frac{\partial f_v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_{vu}\cdot 2x\cos(x^2+y^2) + f_{vv}\cdot 2x\sin(x^2+y^2)$

$w_{yx} = 2y\cos(x^2+y^2)\left(\left[f_{uu}\, 2x\cos(x^2+y^2) - \underline{f_{uv}\, 2x\sin(x^2+y^2)}\right] + 2x f_v\right)$

$\quad -2y\sin(x^2+y^2)\left(\left[\underline{f_{vu}\, 2x\cos(x^2+y^2)} - f_{vv}\, 2x\sin(x^2+y^2)\right] + 2x f_u\right)$

$\Rightarrow w_{yx} = 4xy\cos^2(x^2+y^2) f_{uu} + 4xy\sin^2(x^2+y^2) f_{vv} - 4xy\sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) f_{uv}$

$\quad - 4xy\cos(x^2+y^2) f_v - 4xy\sin(x^2+y^2) f_u.$

Benzer olarak

$w_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2f_u\, y\cos(x^2+y^2) - 2f_v\, y\sin(x^2+y^2)\right)$

$= \left[2\frac{\partial f_u}{\partial y}\, y\cos(x^2+y^2) + 2f_u\cos(x^2+y^2) - 4f_u\, y^2\sin(x^2+y^2)\right] -$

$-\left[2\frac{\partial f_v}{\partial y}\, y\sin(x^2+y^2) + 2f_v\sin(x^2+y^2) - 4f_v\, y^2\cos(x^2+y^2)\right]$

olmak üzere $\frac{\partial f_u}{\partial y}$ ve $\frac{\partial f_v}{\partial y}$ türevleri ayrıca yazılarak bulunur

5) $f(x,y) = \dfrac{x^{b+2} + y^{c+2}}{(x-y)^2}$ fonk.nun $(1,0)$ noktasında gradyent vektörü bulunur

$(\nabla f)_{(1,0)} = f_x(1,0)\,\hat{i} + f_y(1,0)\,\hat{j}$

$\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ birim vektör olmak üzere $(\nabla f)_{(1,0)} \cdot \vec{u} = 0$ olacak biçimde

$\vec{u}$ vektörü belirlenmelidir:

i) $(\nabla f)_{(1,0)} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \boxed{f_x(1,0)\,u_1 + f_y(1,0)\,u_2 = 0}$

ii) $\boxed{u_1^2 + u_2^2 = 1}$

bu iki denklemden u_1 ve u_2 bulunur

6) $z = \sqrt{a(x^2+y^2)}$ koni yüzeyindeki bir (x,y,z) noktasının $(b+2, c+2, 0)$ noktasına olan uzaklığı $d(x,y) = \sqrt{(x-(b+2))^2 + (y-(c+2))^2 + \left(\sqrt{a(x^2+y^2)} - 0\right)^2}$

$d(x,y)$ fonk minimum yapan (x_0, y_0, z_0) noktası bulunmalıdır. Bunun için

$f(x,y) = d^2(x,y) = (x-(b+2))^2 + (y-(c+2))^2 + a(x^2+y^2)$ fonk minimum

yapan noktası belirlemek yeterlidir.

$f_x = 0$, $f_y = 0$ denklemlerinin çözümünden kritik nokta(lar) bulunur

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ ve f_{xx} değerlerine bakarak kritik noktanın minimum veya maksimum noktası olup olmadığı belirlenir

Bulunan minimum noktası $d(x,y)$ değeri bulunur