Fen-Edebiyat Fakültesi	**BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI**	
Adı:	**Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT2018**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Son Yükleme Tarihi: 07/07/2020 Saat 15:00**	

Açıklamalar ve Kurallar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sınav ile ilgili problemleriniz için sınav süresince **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilirsiniz.
3. Karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
4. Cevaplarınızı anlaşılır ve **en fazla** 5 A4 sayfayı dolduracak biçimde sisteme yükleyiniz.
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. **Bu ödev kişisel başarınızı göstereceğinden ödevin cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
7. **Bu ödevi teslim edecek olan her öğrenci bu kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.**

SORULAR

1. **(15 puan)** $R = \{(x,y) : 1 \leq x+y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ olmak üzere

$$\iint_R x \, dA$$

integralini hesaplayınız.

2. **(20 puan)** C eğrisi grafikte verilen R bölgesini sınırlandıran pozitif yönlendirilmiş eğri olmak üzere

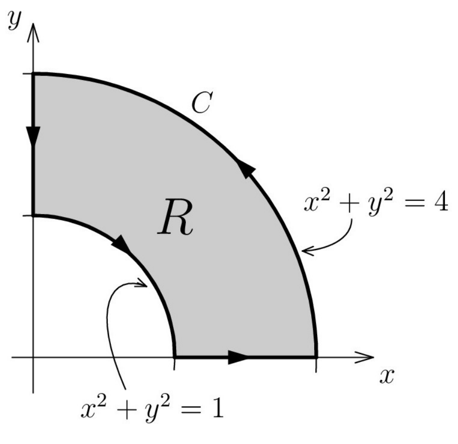
$$\oint_C (6xy + x)dx + (5x^2 + y)dy$$

integralini

a) Green Teoremini kullanarak,

b) (normal biçimde) eğrisel integral hesaplama yolu ile

hesaplayınız



3. **(20 puan)**

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \; y(0) = -\frac{16}{3}$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz. Bu çözümün $t \to \infty$ için davranışını bulunuz.

4. **(15 puan)**

$$6y''' + 5y'' + y' = 0, \; y(0) = -2, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

5. **(15 puan)**

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \; x > 0$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(x) = x^2$ ise lineer bağımsız diğer çözümü $y_2(x)$ bulunuz.

6. **(15 puan)**

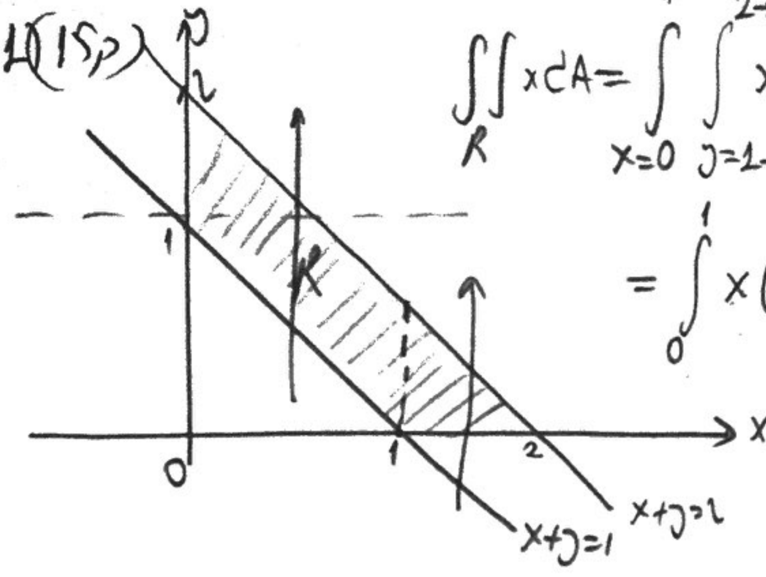
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \; x > 0$$

diferansiyel denkleminin çözümünü **4. soruda belirlenen homojen denklemin çözümleri olan** $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ kullanarak bulunuz.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

— İleri Analiz II - Bütünleme Cevap Anahtarı — 07.07.2020

1) (15p)



$$\iint_R x\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=1-x}^{2-x} x\,dy\,dx + \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{2-x} x\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\overbrace{2-x-(1-x)}^{1}\right)dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2x-x^2)\,dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left((4-1)-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{7}{2}-\frac{7}{3} = \frac{7}{6}$$

II. yol:

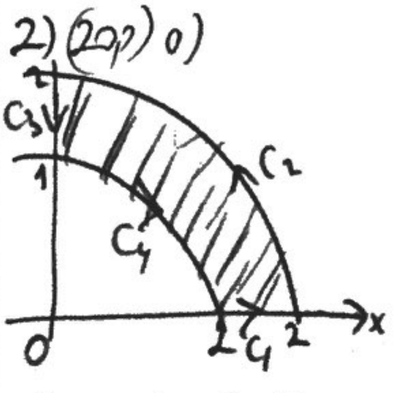
$$\iint_R x\,dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=1-y}^{2-y} x\,dx\,dy + \int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{2-y} x\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (2-y)^2-(1-y)^2\,dy + \int_1^2 (2-y)^2\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2-y)^3}{3}-\frac{(1-y)^3}{3}\Big|_1^0 + \frac{(2-y)^3}{3}\Big|_2^1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{3}-0\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

2) (20p) a)



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$$\oint_C \underbrace{(6xy+x)}_{M}\,dx + \underbrace{(5x^2+y)}_{N}\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

$$= \iint_R (10x-6x)\,dA = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=1}^{2} 4\cdot r\cdot\cos\theta \; r\,dr\,d\theta$$

Kutupsal koordinat dönüşümü

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} 4\cos\theta \,\frac{r^3}{3}\Big|_{r=1}^{2}\,d\theta = 4\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\underbrace{\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/2}}_{1} = \frac{28}{3}$$

b) $C_1: \ x=t, \ y=0, \ 1 \le t \le 2$ $\qquad$ $C_3: \ x=0, \ y=t, \ 1 \le t \le 2$ Ters yönde

$C_2: \ x=2\cos t, \ y=2\sin t, \ 0 \le t \le \pi/2$ $\qquad$ $C_4: \ x=\cos t, \ y=\sin t, \ 0 \le t \le \pi/2$ Ters yönde

$$\# I_1 = \int_{C_1} (6xy+x)dx + (5x^2+y)dy = \int_{t=1}^{2} \left((6.t.0+t)\,dt + 0 \right) = \int_1^2 t\,dt = \frac{4-1}{2} = 3/2$$

$$\# I_2 = \int_{C_2} (6xy+x)dx + (5x^2+y)dy = \int_{t=0}^{\pi/2} (6.2\cos t.2\sin t + 2\cos t)(-2\sin t\,dt) + (5.2^2\cos^2 t + 2\sin t)\,2\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-48\cos t\sin^2 t - \cancel{4\cos t\sin t} + 40\cos^3 t + \cancel{4\sin t\cos t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} -48\underbrace{\sin^2 t}_{u^2}\underbrace{\cos t\,dt}_{du} + \int_0^{\pi/2} 40\underbrace{(1-\sin^2 t)}_{1-u^2}\underbrace{\cos t\,dt}_{du}$$

$$= -48\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} + 40\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{-48}{3} + 40\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{-48+80}{3}$$

$$= 32/3$$

$$\# I_3 = \int_{C_3} (6xy+x)\underbrace{dx}_{0} + (\underbrace{5x^2}_{0}+\underbrace{y}_{t})dy = \int_{t=2}^{1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=2}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\# I_4 = \int_{C_4} (6xy+x)dx + (5x^2+y)dy = \int_{t=\pi/2}^{0} (6\cos t\sin t + \cos t)(-\sin t)dt + (5\cos^2 t + \sin t)\cos t\,dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} \left(-6\cos t\sin^2 t - \cancel{\cos t\sin t} + 5\cos^3 t + \cancel{\sin t\cos t}\right)dt$$

$$= -6\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_{\pi/2}^{0} + 5\cdot\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_{\pi/2}^{0} = -2(0-1) + 5\left(-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 2 - \frac{10}{3} = -4/3$$

Böylece, $\oint_C (6xy+x)dx + (5x^2+y)dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \cancel{\frac{3}{2}} + \frac{32}{3} - \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$

3) (20) $y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t$, $y(0) = -16/3$

$\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{2}dt} = e^{-3t/2}$ integral çarpanı

$e^{-3t/2}\left(y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t\right) \Leftrightarrow \left(y \cdot e^{-3t/2}\right)' = 3te^{-3t/2} + 2e^{-t/2}$

$\Rightarrow y(t)\, e^{-3t/2} = \int \underset{u}{3t}\, \underbrace{e^{-3t/2}dt}_{dv} + \int 2e^{-t/2}dt$

$= \cancel{3}\left[t\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-3t/2} + \frac{2}{\cancel{3}}\int e^{-3t/2}dt\right] + 2\cdot(-2)\,e^{-t/2}$

$= -2t\, e^{-3t/2} + 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-3t/2} - 4e^{-t/2} + C$

$= e^{-3t/2}\left[-2t - \frac{4}{3}\right] - 4e^{-t/2} + C$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = -2t - \frac{4}{3} - 4e^{t} + Ce^{+3t/2}}$

$y(0) = -\frac{16}{3} \Rightarrow y(0) = -0 - \frac{4}{3} - 4 + C = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{C = 4 - \frac{12}{3} = 4 - 4 = 0}$

BDP'nın çözümü $\boxed{y(t) = -\left(4e^t + 2t + \frac{4}{3}\right)}$ ve

ve $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} -\left(4e^t + 2t + \frac{4}{3}\right) = -\infty$ bulunur

4) (15p) $6y''' + 5y'' + y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$

Karakteristik denklem: $6r^3 + 5r^2 + r = 0 \Leftrightarrow r(6r^2 + 5r + 1) = 0$

$\Leftrightarrow r(3r+1)(2r+1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -1/3,\ r_3 = -1/2$

$y(t) = c_1 \cdot e^{0t} + c_2 e^{-t/3} + c_3 e^{-t/2} = \boxed{c_1 + c_2 e^{-t/3} + c_3 e^{-t/2}}$

$y'(t) = -\frac{1}{3}c_2 e^{-t/3} - \frac{1}{2}c_3 e^{-t/2}$, $y''(t) = \frac{1}{9}c_2 e^{-t/3} + \frac{1}{4}c_3 e^{-t/2}$

$\left.\begin{array}{l} y''(0) = 0 \Rightarrow \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{4} = 0 \\ y'(0) = 2 \Rightarrow -\frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{2} = 2 \end{array}\right] \Rightarrow c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1/4 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/9 & 1/4 \\ -1/3 & -1/2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2/4}{-\frac{1}{18} + \frac{1}{12}} = \dfrac{-1/2}{\frac{-2+3}{36}} = -\frac{1}{2}(36) = -18$

$$\# \; C_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2 \end{vmatrix}}{1/36} = \frac{2}{9} 36 = 8$$

$$y(0) = -2 \iff c_1 + c_2 + c_3 = -2 \Rightarrow \boxed{c_1 = -2 + 18 - 8 = 8}$$

$$\boxed{y(t) = 8 - 18e^{-t/3} + 8e^{-t/2}}$$

5)(15p) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, $x > 0$ $\Rightarrow y_1(x) = x^2 \Rightarrow y_2(x) = ?$

Homojen denklemin çözümünü $y(x) = y_1(x)\,u(x) = x^2u(x)$ biçiminde oluşturalım ve $u(x)$ fonk belirleyelim

$y(x) = x^2u(x) \Rightarrow y' = 2xu + x^2u'$, $y'' = 2u + 2xu' + 2xu' + x^2u''$

Verilen denklemde yerine yazalım: $x^2(2u + 4xu' + x^2u'') - 3x(2xu + x^2u') + 4x^2u = 0$

$$\iff \cancel{2x^2u} + 4x^3u' + x^4u'' - \cancel{6x^2u} - 3x^3u' + \cancel{4x^2u} = 0$$

$$\iff x^4u'' + x^3u' = 0 \iff x^3(xu'' + u') = 0 \iff \boxed{xu'' + u' = 0}$$

$u' = v$ dönüşümü ile $u'' = v'$ olur ve $xu'' + u' = 0 \iff xv' + v = 0 \iff \boxed{v' + \frac{v}{x} = 0}$

$v' + \frac{v}{x} = 0$ I. dereceden lineer denklemi çözelim $\mu = e^{\ln x} = x$ olacaktır

$x\left(v' + \frac{v}{x} = 0\right) \iff (xv' + v) = 0 \iff xv(x) = c_1 \iff \boxed{v(x) = \frac{c_1}{x}}$ bulunur

$u' = v$ olduğundan $u(x) = \int v(x)\,dx = \int \frac{c_1}{x}\,dx = c_1 \cdot \ln|x| + c_2$ ve $x > 0$ olduğundan

$\boxed{u(x) = c_1 \cdot \ln x + c_2}$ bulunur. $y(x) = x^2u(x) = x^2(c_1\ln x + c_2) = c_1\underbrace{x^2\ln x}_{y_2} + c_2\underbrace{x^2}_{y_1}$

Böylece, $\boxed{y_2(x) = x^2\ln x}$ bulunur. ve $y_1(x) = x^2$ 'den lineer bağımsızdır

Çünkü, $W(x^2, x^2\ln x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix} = 2x^3\ln x + x^3 - 2x^3\ln x = x^3 \neq 0$

6) (5p) $x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$, $x>0$ denkleminde karşılık gelen homojen denklemin lineer bağımsız çözümleri $y_1(x)=x^2$ ve $y_2(x)=x^2\ln x$ dir. Bu çözümleri ve parametrelerin değişimi yöntemini kullanarak verilen denklemin çözümünü bulunuz.

$$x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x \iff y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=\underbrace{\ln x}_{f(x)}$$

$y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^2\ln x$, $f(x)=\ln x$, $W(x^2, x^2\ln x)=x^3$ olmak üzere parametrelerin değişimi yöntemi ile $y(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ biçiminde çözüm oluşturulur. Burada $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları

$$u_1(x)=-\int\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=-\int\frac{\ln x\cdot x^2\ln x}{x^3}\,dx=-\int\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$
$$=-\frac{(\ln x)^3}{3}+c_1 \quad //$$

$$u_2(x)=\int\frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=\int\frac{\ln x\cdot x^2}{x^3}\,dx=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{(\ln x)^2}{2}+c_2$$

biçiminde elde edilir.

Böylece, $y(x)=\left(-\frac{(\ln x)^3}{3}+c_1\right)x^2+\left(\frac{(\ln x)^2}{2}+c_2\right)x^2\ln x$

$$=c_2x^2+c_2x^2\ln x-\frac{x^2}{3}(\ln x)^3+\frac{x^2}{2}(\ln x)^3$$

$$=\underbrace{c_1x^2+c_2x^2\ln x}_{y_h(x)}+\underbrace{\frac{x^2(\ln x)^3}{6}}_{y_p(x)} \quad //$$ bulunur