-CEVAP ANAHTARI-

1

Fen-Edebiyat Fakültesi	BÜTÜNLEME SINAV KAĞIDI

Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2018	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 27/06/2019	

SORULAR

1. **(14 puan)** $z = 4 - x^2 - y^2$ ve $z = 3$ yüzeyleri tarafından sınırlanan D bölgesinde $\displaystyle\iiint_D x^2 dV$ integralini

   a) **(4 puan)** Kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

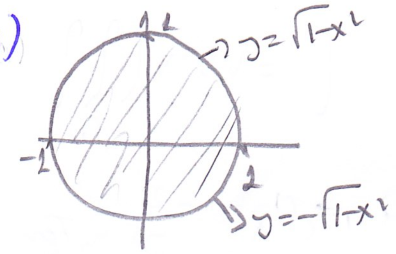
   b) **(10 puan)** Silindirik koordinatlarda ifade ederek hesaplayınız.

2. **(12 puan)** C_1 eğrisi $(0,0)$ noktasından $(2,0)$ noktasına giden bir doğru parçası ve C_2 eğrisi ise $(2,0)$ noktasını $(0,2)$ noktasına taşıyan yarıçapı 2 olan çemberin bir parçası ve $C = C_1 \cup C_2$ olmak üzere $\displaystyle\int_C (y-x)dx + 2xdy$ eğrisel integrali hesaplayınız.

3. **(14 puan)** $y' = -\frac{2}{t}y + e^{-t^3}$, $y(1) = \frac{1}{e}$, başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

1) Yüzeylerin kesişim eğrisi $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 3 \Rightarrow 3 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$ dairesidir

a)



$$\iiint_D x^2 dV = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=3}^{4-x^2-y^2} x^2 \, dz\, dy\, dx$$

b) $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\iiint_D x^2 dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=3}^{4-r^2} (r\cos\theta)^2 \, dz \, r \, dr \, d\theta$

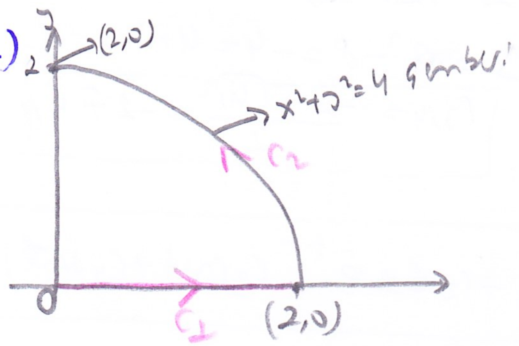
$\boxed{\Rightarrow x^2+y^2=r^2 \text{ ve } x^2+y^2=1 \text{ dairesi için } 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le r \le 1}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^3 \cos^2\theta \,(4 - r^2 - 3)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} d\theta \int_0^1 (r^3 - r^5) dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta) d\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_{\theta=0}^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{24}\right) = \frac{\pi}{12} \,//$$

2)



\# Eğrilerin parametrik denklemleri

C_1: $x = t$, $y = 0$, $0 \le t \le 2$

C_2: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$

\# $\displaystyle\underbrace{\int_C \underbrace{(y-x)}_{M}dx + \underbrace{2x}_{N}dy}_{} = \int_{C_1} (y-x)dx + 2x\,dy + \int_{C_2} (y-x)dx + 2x\,dy$ dir

$F = M\vec{i} + N\vec{j}$ olmak üzere $\displaystyle\int_C F \cdot dr = \int_C M dx + N dy$

→

4. **(15 puan)** $ydx - (2x + y^3e^y)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini $\mu(y)$ formunda bir integral çarpanı bularak çözünüz.

5. **a)(10 puan)** $y^{(4)} + 2y^{(3)} + \underline{\underline{2y''}} = 0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

   b) (15 puan) $y'' + 4y = t^2 + 10e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

6. **(20 puan)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

4) $\underbrace{y}_{M}dx\,\underbrace{-(2x+y^3e^y)}_{N}dy=0 \Rightarrow M=y,\ N=-(2x+y^3e^y)$

$M_y=1 \neq N_x=-2 \Rightarrow$ verilen denklem tam değildir

Ancak, $\dfrac{N_x-M_y}{M}=\dfrac{-2-1}{y}=-\dfrac{3}{y}$ olduğundan $\mu(y)=\exp\left(\int \dfrac{N_x-M_y}{M}\,dy\right)$ biçiminde bir integral çarpanı ile tam hale getirilebilir

$\mu(y)=\exp\left(\int -\dfrac{3}{y}\,dy\right)=\exp(-3\ln y)=e^{\ln y^{-3}}=y^{-3}=\dfrac{1}{y^3}$

$\# \dfrac{1}{y^3}\left(y\,dx-(2x+y^3e^y)\,dy\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{1}{y^2}}_{M}dx-\underbrace{\left(\dfrac{2x}{y^3}+e^y\right)}_{N}dy=0 \Rightarrow M_y=-\dfrac{2}{y^3}$
$\Rightarrow N_x=-\dfrac{2}{y^3}$ Tam Dif. Denklem

$\exists\, \Psi(x,y)$ fonk. mevcuttur ki $\Psi_x(x,y)=M(x,y)$ ve $\Psi_y(x,y)=N(x,y)$ sağlanır

$\Psi_x(x,y)=\dfrac{1}{y^2} \Rightarrow \boxed{\Psi(x,y)=\int\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{x}{y^2}+h(y)}$ ve $\Psi_y(x,y)=\cancel{-\dfrac{2x}{y^3}}+h'(y)=\underbrace{-\left(\cancel{\dfrac{2x}{y^3}}+e^y\right)}_{N}$

$\Rightarrow h'(y)=-e^y \Rightarrow \boxed{h(y)=-e^y+C_1} \Rightarrow \Psi(x,y)=$

$\Rightarrow \boxed{\Psi(x,y)=\dfrac{x}{y^2}-e^y+C_1}$ bulunur ve $\Psi(x,y)=C_2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y^2}-e^y+C_1=C_2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x}{y^2}-e^y=C}$

$\Leftrightarrow \boxed{x-y^2e^y=Cy^2,\ C\in\mathbb{R}}$ elde edilir

5) a) $y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''=0 \Rightarrow$ Karakteristik denklem $r^4+2r^3+2r^2=0$

$\Rightarrow r^2(r^2+2r+2)=0 \Rightarrow \boxed{r_{1,2}=0}$ ve $r^2+2r+2=0 \Rightarrow \Delta=2^2-8=-4=4i^2$

$\boxed{r_{3,4}=\dfrac{-2\mp\sqrt{4i^2}}{2}=-1\mp i}$

Böylece, $r_1=0 \Rightarrow y_1(t)=e^0=1$

$r_2=0 \Rightarrow y_2(t)=te^0=t$

$r_{3,4}=-1\mp i \Rightarrow y_3(t)=e^{-t}\cos t$

$y_4(t)=e^{-t}\sin t$

$\Rightarrow \boxed{y(t)=C_1+C_2t+e^{-t}(C_3\cos t+C_4\sin t)}$

2. Devamı: C_1 eğrisi için $r_1(t) = t\hat{i} + 0\hat{j}$, $0 \le t \le 2 \Rightarrow \frac{dr_1}{dt} = \hat{i} + 0\hat{j}$

$$F(r_1(t)) = (0-t)\hat{i} + 2\cdot t\hat{j} \Rightarrow \int_{C_1} F\cdot dr = \int_{C_1} Mdx + Ndy = \int_{t=0}^{2} (-t\hat{i} + 2t\hat{j})\cdot(\hat{i}+0\hat{j})\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{2} -t\,dt = \left.\frac{-t^2}{2}\right|_{t=0}^{2} = -2$$

C_2 eğrisi için: $r_2(t) = \underbrace{2\cos t}_{x}\,\hat{i} + \underbrace{2\sin t}_{y}\,\hat{j}$, $0 \le t \le \pi/2$

$F(r_2(t)) = (2\sin t - 2\cos t)\hat{i} + 4\cos t\,\hat{j}$, $\frac{dr_2}{dt} = -2\sin t\,\hat{i} + 2\cos t\,\hat{j}$.

$$\int_{C_2} Mdx + Ndy = \int_{t=0}^{\pi/2} [(2\sin t - 2\cos t)\hat{i} + 4\cos t\,\hat{j}]\cdot(-2\sin t\,\hat{i} + 2\cos t\,\hat{j})\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{\pi/2} (-4\sin^2 t + 4\underbrace{\sin t}_{u}\cos t + 8\cos^2 t)\,dt = \left.4\frac{\sin^2 t}{2}\right|_{t=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\left[8\cdot\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) - 4\cdot\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\right]dt = 2+\pi$$

3) (24p) $y' = -\frac{2}{t}y + e^{-t^3}$, $y(1) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{p(t)}y = e^{-t^3}$

İntegral çarpanı $\mu = \exp\left(\int p(t)dt\right) = \exp\left(\int \frac{2dt}{t}\right) = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$

$$t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right) = t^2 e^{-t^3} \Leftrightarrow (t^2y' + 2ty) = t^2e^{-t^3} \Leftrightarrow (y\cdot t^2)' = t^2e^{-t^3}$$

İntegrallersek $\int (yt^2)'dt = \int t^2 e^{-t^3}dt \Rightarrow y\cdot t^2 = \frac{1}{3}\int e^{-u}du = \frac{-1}{3}e^{-t^3} + c$

$u = t^3$
$du = 3t^2dt$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{e^{-t^3}}{3t^2} + \frac{c}{t^2}}$$

$\# \; y(1) = -\frac{e^{-1}}{3} + c = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{e} + \frac{1}{3e} = \frac{4}{3e}}$

$$\# \; \boxed{y(t) = -\frac{e^{-t^3}}{3t^2} + \frac{4}{3et^2} = \frac{1}{3t^2}\left(\frac{4}{e} - e^{-t^3}\right)}$$

5) b) (15p) verilen denkleme karşılık gelen homojen denklem $y'' + 4y = 0$ dır.

Karakteristik denklem $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 4i^2 \Leftrightarrow \boxed{r = \mp 2i}$

Böylece $\boxed{y_h(t) = c_1\cdot\cos(2t) + c_2\sin(2t)}$ olarak bulunur

$\# \; y'' + 4y = t^2 + 20e^t$ için özel çözüm $y_p(t) = (At^2 + Bt + C) + De^t$ biçimindedir

$y_p'(t) = 2At + B + De^t$, $y_p''(t) = 2A + De^t$ denklemde yerine yazarsak

$$y_p'' + 4y_p = t^2 + 10e^t \Rightarrow (2A + De^t) + 4(At^2 + Bt + C) + 4De^t = t^2 + 10e^t$$

$$2A + \underline{4A}t^2 + 4Bt + 4C + \underline{5D}e^t = \underline{t}^2 + \underline{10}e^t$$

$$\Leftrightarrow 2A + 4C = 0,\ 4A = 1,\ 4B = 0,\ 5D = 10$$

$$A + 2C = 0 \quad \boxed{A = 1/4} \quad \boxed{B = 0} \quad \boxed{D = 2}$$

$$\boxed{C = -1/8}$$

Böylece, $y_p(t) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}\right) + 2e^t$ ve $\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + 2e^t \end{aligned}}$ bulunur

$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + 0 - \frac{1}{8} + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{8} - 2 = -\frac{15}{8}}$

$y'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos(2t) + \frac{t}{2} + 2e^t \Rightarrow y'(0) = 2c_2 + 0 + 2 = 1 \Rightarrow 2c_2 = -1$ $\boxed{c_2 = -1/2}$

$\boxed{y(t) = -\frac{15}{8}\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + 2e^t}$

6) (20p) Homojen denklem $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r_{1,2} = 1}$

$\boxed{y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \quad \text{ve } y_1(t) = e^t,\ y_2(t) = te^t}$ (temel çözüm kümesi)

Homojen olmayan denklemde $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2} \Rightarrow g(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$ olup, parametrelerin değişimi yöntemi kullanılır.

Bu durumda genel çözüm $y(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)$ biçimindedir.

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + \cancel{te^{2t}} - \cancel{te^{2t}} = e^{2t} \neq 0$$

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{-t\cancel{e^t} \cdot \cancel{e^t}}{(1+t^2)\cancel{e^{2t}}} = \frac{-t}{1+t^2} \Rightarrow u_1(t) = \int \frac{-t\,dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c_1}$$

$u = 1 + t^2$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{\cancel{e^t} \cdot \cancel{e^t}}{(1+t^2)\cancel{e^{2t}}} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow u_2(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \boxed{\arctan t + c_2}$$

$y(t) = \left(-\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c_1\right)e^t + (\arctan t + c_2)\, te^t$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t - \frac{e^t}{2}\ln(1+t^2) + te^t \arctan t}$$