Fen-Edebiyat Fakültesi	**FİNAL SINAV KAĞIDI**	
Adı:	**Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT2018**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Son Yükleme Tarihi: 25/06/2020 Saat 15:00**	

Açıklamalar ve Kurallar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sisteme yüklediğiniz PDF dosyasının ismini "**Ad Soyad Okul Numarası**" olarak düzenleyiniz.
3. Sisteme yükleme ile igili sorun yaşayan öğrenciler **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilir.
4. **Bu ödev kişisel başarınızı göstereceğinden ödevin cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.**
5. **Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.**
6. Karalama biçiminde olan yazılar, nereden geldiği belli olmayan tüm ifadeler cevap olarak kabul edilmeyecektir.
7. Cevapları en fazla 4 sayfa olacak biçimde sisteme yükleyiniz.
8. **Cevaplarınızı numara sırasına göre tarama programları ile tarayınız. Eğer resim olarak çekerseniz, resimlerin karanlık olmadığını ve anlaşılır biçimde olduğunu sisteme yüklemeden önce kontrol ediniz.**
9. Sorularda kullanılan a ve b sabitlerini a :**okul numaranızın 6. basamağındaki rakam**, b :**okul numaranızın son iki basamağındaki sayı** olarak seçiniz. Örneğin okul numarası **121517085** ise $a = 7$ ve $b = 85$ olarak alınacaktır.

   Bu ödevi teslim edecek olan her öğrenci bu kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.

SORULAR

1. **(20 puan)** $R = \{(x, y) : x + y \leq \mathbf{b},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ olmak üzere

$$\iint_R \sin^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\ dA$$

   integralini hesaplayınız.

2. **(15 puan)** C eğrisi $x^2 + y^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$ çemberi üzerinde pozitif yönlendirilmiş eğri olmak üzere

$$\int_C y^3 dx - x^3 dy$$

   eğrisel integralini hesaplayınız.

3. **(15 puan)**

$$t^2 y'' + 2ty' - 1 = 0, t > 0$$

   diferansiyel denklemini çözünüz.

4. **(20 puan)**

$$y^{''} + 2\mathbf{b}y^{'} + (\mathbf{b}^2 + 1)y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y^{'}(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin $y(t)$ çözümünü bulunuz.

Bu çözümün $t \to \infty$ durumunda davranışını bulunuz.

5. **(20 puan)**

$$y^{''} - 6y^{'} + 9y = \frac{e^{3t}}{t^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}}$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

6. (**10 puan**)

$$y^{''} + y = t(1 + \sin t)$$

diferansiyel denkleminin özel çözümü $y_p(t)$ nin **formunu** belirleyiniz **(çözmeyiniz)**.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

İleri Analiz II – Final Cevap Anahtarı

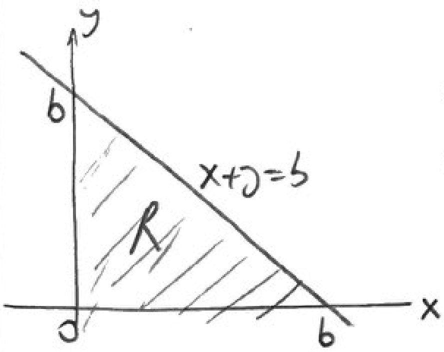
25.06.2020

1) $R=\{(x,y): x+y\leq 6,\ x\geq 0,\ y\geq 0\} \Rightarrow \iint_R \sin^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA = ?$

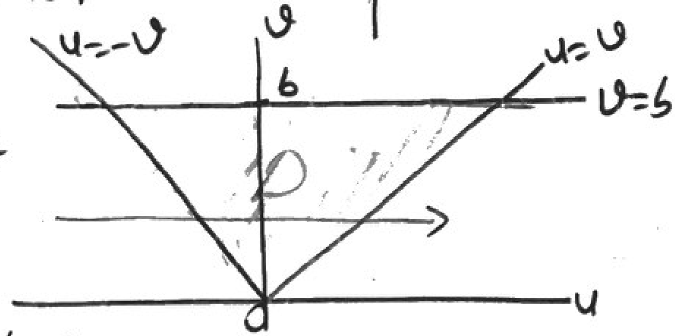
* $u=x-y$, $v=x+y$ koordinat dönüşümü yapalım

$$\begin{aligned} u&=x-\cancel{y}\\ +\ v&=x+\cancel{y}\\ \hline u+v&=2x \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x=\frac{u+v}{2}},\ y=x-u=\frac{u+v}{2}-u,\ \boxed{y=\frac{v-u}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{u+v}{2}\\ y&=\frac{v-u}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$



- $x+y\leq 6 \Rightarrow v\leq 6$
- $x\geq 0 \Rightarrow u\geq -v$
- $y\geq 0 \Rightarrow v\geq u$



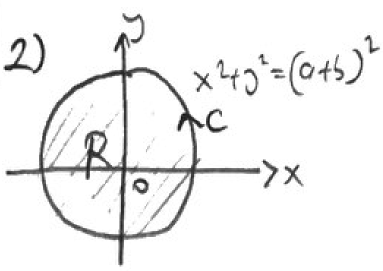
$$\iint_R \sin^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dA=\iint_D \sin^2\left(\frac{u}{v}\right)dA=\int_{v=0}^{6}\int_{u=-v}^{v}\sin^2\left(\frac{u}{v}\right)|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{v=0}^{6}\int_{u=-v}^{v}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2u}{v}\right)\right)du\,dv=\int_{v=0}^{6}\frac{1}{4}\left[(v+v)-\sin\left(\frac{2u}{v}\right)\cdot\frac{v}{2}\Big|_{u=-v}^{v}\right]dv$$

$$=\frac{1}{4}\int_{v=0}^{6}\left[2v-\frac{v}{2}\big(\underbrace{\sin(2)-\sin(-2)}_{2\sin(2)}\big)\right]dv=\frac{1}{4}\left[\cancel{2}\frac{v^2}{\cancel{2}}-2\sin(2)\frac{v^2}{4}\Big|_{v=0}^{6}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[6^2-\frac{\sin(2)}{2}6^2\right]=\frac{6^2}{4}\left(1-\frac{\sin(2)}{2}\right)\ //$$

2)



$$\oint_{C} y^3dx - x^3dy \overset{1^N}{\underset{\text{Green Teoremi}}{=}} \iint_R\left[\frac{\partial(-x^3)}{\partial x}-\frac{\partial(y^3)}{\partial y}\right]dA$$

C ↓ M

$$=\iint_R(-3x^2-3y^2)dA=-3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a+b}r^2\,r\,dr\,d\theta=-3\cdot 2\pi\frac{(a+b)^4}{4}$$

$$=-\frac{3\pi}{2}(a+b)^4\ //$$

3) $t^2y''+2ty'-1=0,\ t>0$

$v=y'$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $v'=y''$ olur

$$t^2y''+2ty'-1=t^2v'+2tv-1=0 \Leftrightarrow v'+\frac{2tv}{t^2}-\frac{1}{t^2}=0$$

Böylece verilen denklem $v=y'$ dönüşümü ile $v'+\frac{2}{t}v=\frac{1}{t^2}$ homojen olmayan 1. mertebeden lineer denkleme indirgenir. İntegral çarpanı yöntemi ile çözülür

$$\mu(t)=e^{\int \frac{2}{t}dt}=e^{2\ln t}=t^2 //$$

$$t^2\left(v'+\frac{2}{t}v=\frac{1}{t^2}\right) \Leftrightarrow (t^2v'+2tv)=1 \Leftrightarrow (v\cdot t^2)'=1$$

$$\Leftrightarrow \int (v\cdot t^2)'dt=\int 1dt \Leftrightarrow v\cdot t^2=t+c_1 \Leftrightarrow \boxed{v(t)=\frac{1}{t}+\frac{c_1}{t^2}}$$

$v=y'$ olduğundan $y(t)=\int v(t)dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{c_1}{t^2}\right)dt=\ln|t|-\frac{c_1}{t}+c_2$

$t>0$ olduğundan $\boxed{y(t)=\ln t-\frac{c_1}{t}+c_2}$ bulunur

4) $y''+2by'+(b^2+1)y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ sabit katsayılı 2. dereceden bir başlangıç değer probleminin karakteristik denklemi: $r^2+2br+(b^2+1)=0$

$$\Delta=4b^2-4\cdot1\cdot(b^2+1)=\cancel{4b^2}-\cancel{4b^2}-4=4i^2<0$$

$$r_{1,2}=\frac{-2b\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{-2b\pm2i}{2}=-b\pm i$$

Böylece, denklemin lineer bağımsız iki çözümü $e^{-bt}\cos t$ ve $e^{-bt}\sin t$ olur ve genel çözüm $\boxed{y(t)=e^{-bt}(c_1\cos t+c_2\sin t)}$ bulunur

$y(0)=1 \Rightarrow y(0)=1\cdot(c_1+0)=1 \Rightarrow \boxed{c_1=1}$

$y'(t)=-be^{-bt}(c_1\cos t+c_2\sin t)+e^{-bt}(-c_1\sin t+c_2\cos t)$

$y'(0)=-b\cdot(c_1+0)+1\cdot(0+c_2)=0 \Rightarrow -b+c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_2=b}$

Böylece, $\boxed{y(t)=e^{-bt}(\cos t+b\sin t)}$ bulunur. $\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-bt}(\cos t+b\sin t)=0$ olur.//

5) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3t}}{t^{a+b}}$ genel çözümünü bulalım

Homojen denklem $y'' - 6y' + 9y = 0 \Rightarrow$ karakteristik denklem $r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)^2 = 0$

$r_{1,2} = 3$

$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$ ve $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = te^{3t}$ olur

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t}+3te^{3t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t}(e^{3t} + 3te^{3t}) - 3e^{3t} t e^{3t}$$

$$= e^{6t} + \cancel{3te^{6t}} - \cancel{3te^{6t}} = e^{6t}$$

$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3t}}{t^{a+b}}$ $g(t)$ homojen olmayan denklemin parametrelerin değişimi yöntemi ile çözelim

Denklemin genel çözümü $y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ olmak üzere $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ aşağıdaki gibi belirlenir

$$u_1(t) = \int \frac{-y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} dt = -\int \frac{t\, \cancel{e^{3t}}\, \cancel{e^{3t}}/t^{a+b}}{\cancel{e^{6t}}} dt = -\int \frac{t}{t^{a+b}} dt = -\int \frac{dt}{t^{a+b-1}}$$

$$= -\frac{t^{-(a+b)+1+1}}{-(a+b)+2} + C_1 = -\frac{t^{2-(a+b)}}{2-(a+b)} + C_1, \quad (\text{soruya göre } a+b \neq 2 \text{ dir})$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} dt = \int \frac{\cancel{e^{3t}} \cdot \cancel{e^{3t}}/t^{a+b}}{\cancel{e^{6t}}} dt = \int \frac{dt}{t^{a+b}} = \frac{t^{-(a+b)+1}}{1-(a+b)} + C_2$$

Böylece genel çözüm

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

$$= c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} - \frac{t^{2-(a+b)}}{2-(a+b)} e^{3t} + \frac{t^{1-(a+b)}}{1-(a+b)} t e^{3t}$$

$$= c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + t^{2-(a+b)} e^{3t} \left(-\frac{1}{2-(a+b)} + \frac{1}{1-(a+b)} \right) //$$

6) $y''+y=t(1+\sin t) \Rightarrow y_p(t)$ nasıl olmalıdır?

$y''+y=0 \Rightarrow r^2+1=0 \Leftrightarrow r_{1,2}=\mp i \Rightarrow y_h(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ olur

Böylece, $y_1(t)=\cos t$, $y_2(t)=\sin t$ bulunur

$y''+y=t+t\sin t$ homojen olmayan denklem için özel çözüm $y_p(t)$ nin

formu t için $\rightarrow At+B$

$t\sin t$ için $\Rightarrow t[(C_1t+D_1)\sin t+(C_2t+D_2)\cos t]$

t ile çarpılır homojen denk çözümleri ile çakışmaması için.

Böylece $y_p(t)=(At+B)+t[(C_1t+D_1)\sin t+(C_2t+D_2)\cos t]$ biçiminde oluşturulur