- CEVAP ANAHTARI -

Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2018	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 13/06/2019	

SORULAR

1. **(13 puan)** $z = x^2 + y^2$ ve $z = 10 - 2x^2 - 2y^2$ yüzeyleri tarafından çevrelenen D bölgesinin hacmini bulunuz.

2. **(12 puan)** $f(x, y) = ye^{x^2}$ fonksiyonunun $r(t) = 4t\vec{i} - 3t\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 2$ biçiminde verilen C eğrisi üzerinde integralini $\int_C f(x, y)ds$ hesaplayınız.

3. **(15 puan)** $y' + \frac{2}{t}y = \frac{t^2 - t + 1}{t}$, $y(1) = 1/2$, $t > 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

1) Yüzeylerin kesişim eğrisi $x^2+y^2 = 10-2x^2-2y^2 \Leftrightarrow 3(x^2+y^2)=10 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 10/3$

$$V = \iiint_D 1 \cdot dV = \underbrace{\iint}_{R}\int_{z=x^2+y^2}^{10-2x^2-2y^2} 1 \cdot dz\, dA = \iint_{R=\{(x,y):\, x^2+y^2=10/3\}} (10 - 3(x^2+y^2))\, dA$$

Kutupsal koordinatlar
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$x^2+y^2 = r^2$.
R bölgesi $r^2 = 10/3$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{10/3}} (10 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{10/3}} (10r - 3r^3)\, dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{10r^2}{2} - \frac{3r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{10/3}} = 2\pi\left(5 \cdot \frac{10}{3} - \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{10^2}{3^{\cancel{2}}}\right) = 2\pi\left(\frac{50}{3} - \frac{25}{3}\right) = \frac{50}{3}\pi$$

2) $f(x,y) = ye^{x^2}$, $r(t) = 4t\hat{i} - 3t\hat{j}$ $\Rightarrow$ $x(t) = 4t$, $y(t) = -3t$.
$-1 \leq t \leq 2$.

$$ds = |v(t)|\, dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\, dt = 5\, dt$$

$$f(x,y) = f(4t, -3t) = -3t\, e^{16t^2}$$

$$\int_C f(x,y)\, ds = \int_{t=-1}^{2} -3t e^{16t^2} 5\, dt = -15\int_{t=-1}^{2} t \cdot e^{16t^2}\, dt = -\frac{15}{2}\int_{u=1}^{4} e^{16u}\, du = -\frac{15}{2}\frac{1}{16}e^{16u}\Big|_{u=1}^{4}$$

$\left| \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t\, dt \end{array} \right|$

$$= \frac{15}{32}\left(e^{16} - e^{64}\right)$$ //

4. **(15 puan)** $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)\,dy=0$, $x>0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

5. **(25 puan)** Aşağıda verilen diferensiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

   a) **(10 puan)** $y^{(3)}-y''-y'+y=0$,

   b) **(15 puan)** $y''-2y'-3y=3e^{2t}$.

6. **(20 puan)** $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{t^2}$, $t>0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

Sorular	1	2	3	4	5	6
Puan						

4) $\underbrace{\left(\frac{y}{x}+6x\right)}_{M}dx+\underbrace{(\ln x-2)}_{N}dy=0$ dif. denkleminde $M_y=\frac{1}{x}$ ve $N_x=\frac{1}{x}$ olup, $M_y=N_x$ dir.

Böylece tam diferensiyel denklemdir. $\exists\,\psi(x,y)$ fonk mevcuttur ve $\frac{\partial\psi}{\partial x}=M$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}=N$ eşitlikleri sağlar.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=M=\frac{y}{x}+6x \Rightarrow \psi(x,y)=\int\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx=y\underbrace{\ln x}_{x>0}+\frac{6x^2}{2}+h(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=N \Leftrightarrow \cancel{\ln x}+h'(y)=\cancel{\ln x}-2 \Leftrightarrow h'(y)=-2 \Rightarrow \boxed{h(y)=-2y+C_1}$$

Böylece, $\boxed{\psi(x,y)=y\ln x+3x^2-2y+C_1}$ elde edilir.

$$Mdx+Ndy=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\psi(x,y)=0 \Leftrightarrow \psi(x,y)=C_2 \Leftrightarrow y\ln x+3x^2-2y+C_1=C_2$$

$$y(\ln x-2)+3x^2=C_2-C_1 \Leftrightarrow \boxed{y(x)=\frac{C-3x^2}{\ln x-2}},\ (C=C_1-C_2)$$

5)a) $y^{(3)}-y''-y'+y=0$ dif. denklemin karakteristik denklemi $r^3-r^2-r+1=0$

$\Leftrightarrow r^2(r-1)-(r-1)=0 \Leftrightarrow (r^2-1)(r-1)=0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1)(r-1)=0$

$\Leftrightarrow (r-1)^2(r+1)=0 \Leftrightarrow \boxed{r_{1,2}=+1}$ ve $\boxed{r_3=-1}$ elde edilir.

Böylece, genel çözüm $\boxed{y(t)=c_1\underset{r_1 \text{ için}}{e^{t}}+c_2\underset{r_2 \text{ için}}{te^{t}}+c_3\underset{r_3 \text{ için}}{e^{-t}}}$ bulunur

2. katlı kök

3.X(15p) $y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{p(t)} y = \frac{t^2-t+1}{t}$, $y(1) = 1/2$

İntegral çarpanı: $\mu = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$

$t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right) = t^2\left(\frac{t^2-t+1}{t}\right) \Leftrightarrow \underbrace{(y't^2 + 2ty)}_{(yt^2)'} = t(t^2-t+1)$

$\Leftrightarrow \int (yt^2)' dt = \int (t^3 - t^2 + t)\,dt \Leftrightarrow yt^2 = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C\right)}$, $y(1) = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{1}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + C\right) = \cancel{\frac{1}{2}}$

$\boxed{C = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}$

Böylece, $\boxed{y(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1}{12t^2}}$

5)b)(15p) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ denklemine karşılık gelen homojen denklem

$y'' - 2y' - 3y = 0$ ve karakteristik denklem $r^2 - 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-3) = 0$

$\boxed{r_1 = -1,\ r_2 = 3}$

Böylece, $\boxed{y_h(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 e^{3t}}$.

$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ homojen olmayan denklem için özel çözüm $y_p(t) = A \cdot e^{2t}$ biçiminde aranmalıdır.

$y_p' = 2Ae^{2t}$, $y_p'' = 4Ae^{2t} \Rightarrow y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 3e^{2t}$

$\Leftrightarrow \cancel{4Ae^{2t}} - \cancel{4Ae^{2t}} - 3Ae^{2t} = 3e^{2t} \Leftrightarrow -3A = 3$

$\boxed{A = -1}$

Böylece, $y_p(t) = -e^{2t}$ bulunur ve genel çözüm

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - e^{2t}}$$

6) (20p) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{t^2}, \quad t>0$

4

Homojen olmayan kısım $g(t) = \frac{e^{-2t}}{t^2}$ 'de $\frac{1}{t^2}$ 'den dolayı belirsiz katsayılar yöntemi kullanılmaz!

Parametrelerin değişimi yöntemini kullanalım.

Homojen denklem: $y'' + 4y' + 4y = 0$, karakteristik denklemi $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$ $\boxed{r_{1,2} = -2}$

Böylece, $y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$ ve lineer bağımsız çözümler

$\boxed{y_1(t) = e^{-2t}}$ ve $\boxed{y_2(t) = t e^{-2t}}$ dir.

Parametrelerin değişimi yöntemine göre homojen olmayan denklemin genel çözümü

$\boxed{y(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)}$ biçiminde $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ belirlenecek fonksiyonlar olarak oluşturulur.

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix} = e^{-2t}(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 2te^{-4t} = e^{-4t}$$

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{-2t} \\ e^{-2t}/t^2 & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix}}{e^{-4t}} = \frac{-t\cancel{e^{-4t}}}{t^2 \cancel{e^{-4t}}} = -\frac{1}{t}$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)(t)} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & e^{-2t}/t^2 \end{vmatrix}}{e^{-4t}} = \frac{\cancel{e^{-4t}}}{t^2 \cancel{e^{-4t}}} = \frac{1}{t^2}$$

$u_1'(t) = -\frac{1}{t} \Rightarrow u_1(t) = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln t + c_1 \quad (t>0)$

$u_2'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow u_2(t) = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c_2$

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = (-\ln t + c_1)e^{-2t} + \left(-\frac{1}{t} + c_2\right) \cdot te^{-2t}$$

$$= c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - \ln t \cdot e^{-2t} - e^{-2t}$$

$$= (c_1 - 1)e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - \ln t\, e^{-2t}$$

$\boxed{y(t) = c_1^* e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - \ln t\, e^{-2t}}$, $(c_1^* = c_1 - 1)$