Fen-Edebiyat Fakültesi	**ARA SINAV ÖDEV KAĞIDI**	
Adı:	**Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II**	**Not**
Soyadı:	**Dersin Kodu: MAT2018**	
Numarası:	**Bölümü: İSTATİSTİK**	
İmzası:	**Son Yükleme Tarihi: 30/05/2020 Saat 15:00**	

Açıklamalar

1. Cevap kağıdınızın her birine ad, soyad, okul numarası yazınız ve imza atınız.
2. Sisteme yüklediğiniz PDF dosyasının ismini "**Ad Soyad Okul Numarası**" olarak düzenleyiniz.
3. Sisteme yükleme ile igili sorun yaşayan öğrenciler **fatih.kizilaslan@marmara.edu.tr** e-posta adresinden iletişime geçebilir.
4. Bu ödev kişisel başarınızı göstereceğinden ödevin cevaplarını bu ders ile ilgili kendi bilgilerinizi kullanarak yardım almadan yapmalısınız.

Bu ödevi teslim edecek olan her öğrenci bu kuralları kabul etmiş olarak değerlendirilecektir.
Not: Sorularda kullanılan a ve b sabitlerini

a :**okul numaranızın 6. basamağındaki rakam**, b :**okul numaranızın son iki basamağındaki sayı** olarak seçiniz. Örneğin okul numarası **121517085** ise $a = 7$ ve $b = 85$ olarak alınacaktır. a/b veya b/a tamsayı değil ise kesirli sayı olarak bırakınız.

SORULAR

1. **(20 puan)** $R = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ olmak üzere
$$\iint_R \left(a^2 - x^2 - y^2\right)^b \, dA$$
integralini hesaplayınız.

2. **(20 puan)** $D = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \; z \leq 0\right\}$ biçiminde verilen **alt yarım küre** bölgesinde
$$\iiint_D \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dV$$
integralini hesaplayınız.

3. **(20 puan)** $\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\left\{x^2, y^2\right\}} \, dx \, dy$ iki katlı integralini hesaplayınız.

   Not: $\max\{\alpha, \beta\} = \begin{cases} \alpha, & \text{Eğer } \alpha > \beta \\ \beta, & \text{Eğer } \beta > \alpha \end{cases}$

4. **(20 puan)** C_1 eğrisi $(a, 0)$ noktasını $(0, a)$ noktasına birleştiren **çember (eğrisi) yayı** ve C_2 eğrisi $(0, a)$ noktasını $(9, 9)$ noktasına birleştiren **doğru parçası** olmak üzere C eğrisi bu iki eğrinin birleşimi olarak tanımlansın ($C = C_1 \cup C_2$).
$$\int_C x^2 dx + x dy$$
eğrisel integralini hesaplayınız.

5. **a) (5 puan)** $F = (Ax \ln(z)) \overrightarrow{i} + (B \; y^2 \; z) \overrightarrow{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right) \overrightarrow{k}$ vektör alanının korunumlu olması için A ve B ne olmalıdır, bulunuz.

   b) (**10 puan**) Bulduğunuz A ve B değerleri için potansiyel fonksiyonu bulunuz.

   c) (**5 puan**) C, $(0, 0, 1)$ noktasını $(a, b, a + b)$ noktasına birleştiren herhangi bir eğri ise $\int_C F.dr$ eğrisel integralini hesaplayınız.

Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir.

BAŞARILAR **Doç. Dr. Fatih KIZILASLAN**

İleri Analiz II – Ara Sınav Cevap Anahtarı :

Cevap anahtarı okul numarası 121517085 olmak üzere $a=7$, $b=85$ için düzenlenmiştir.

1) $R=\{(x,y): x^2+y^2 \leq a^2\} = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 7^2\}$ için

$$\iint_R (a^2-x^2-y^2)^b \, dA = \iint_R (7^2-x^2-y^2)^{85} \, dA$$ integralini kutupsal koordinatlar ile hesaplayalım.

R bölgesinde $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ kutupsal dönüşümü ile $\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \leq 7^2 \Leftrightarrow r^2 \leq 7^2 \Rightarrow \underline{r \leq 7}$ dur.

$$\iint_R (7^2-x^2-y^2)^{85} dA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{7} (7^2-r^2)^{85} \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA}$$

$u=7^2-r^2$ dönüşümü ile
$du=-2r\,dr$
$r=0 \Rightarrow u=7^2$ ve
$r=7 \Rightarrow u=0$ olur

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{u=7^2}^{0} u^{85}\left(-\frac{du}{2}\right) d\theta = \frac{2\pi}{2}\int_{u=0}^{7^2} u^{85}\,du = \pi \frac{u^{86}}{86}\Big|_{u=0}^{7^2} = \frac{\pi}{86}(7^2)^{86} = \frac{\pi}{86}7^{172} \; //$$

$$\frac{\pi a^{2(b+1)}}{b+1}$$

2) $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \leq 0\} = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq 7^2,\ z\leq 0\}$

Alt yarım küre olduğundan küresel koordinatları kullanalım.

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cdot\ x^2+y^2+z^2=\rho^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 7^2 \Leftrightarrow \boxed{\rho \leq 7} \\ \cdot\ z=\rho\cos\phi \Rightarrow z \leq 0 \Leftrightarrow \underset{\geq 0 \text{ her zaman}}{\rho}\cos\phi \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos\phi \leq 0} \end{array}$$

* $0 \leq \phi \leq \pi$ olmak üzere $\cos\phi \leq 0$ olması için $\boxed{\pi/2 \leq \phi \leq \pi}$ olarak alınmalıdır.

* $$\iiint_D (a^2-x^2-y^2)\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=\pi/2}^{\pi}\int_{\rho=0}^{7} (7^2-\rho^2\sin^2\phi)\underbrace{\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}_{dV}$$

$$= 2\pi\int_{\phi=\pi/2}^{\pi}\left(7^2\frac{\rho^3}{3}\sin\phi - \frac{\rho^5}{5}\sin^3\phi\right)\Big|_{\rho=0}^{7} d\phi = 2\pi\int_{\phi=\pi/2}^{\pi}\left(\frac{7^5}{3}\sin\phi - \frac{7^5}{5}\sin^3\phi\right)d\phi$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^5}{3} (-\cos\phi) \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{r^5}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} \underbrace{\sin\phi\,(1-\cos^2\phi)}_{\sin\phi - \sin\phi\cos^2\phi}\, d\phi \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^5}{3} \big(\underbrace{-\cos(\pi)}_{1}\big) - \frac{r^5}{5} \big(\underbrace{-\cos(\pi)}_{1}\big) + \frac{r^5}{5}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\phi\cos^2\phi\, d\phi \right] \quad u = \cos\phi,\ du = -\sin\phi\, d\phi$$

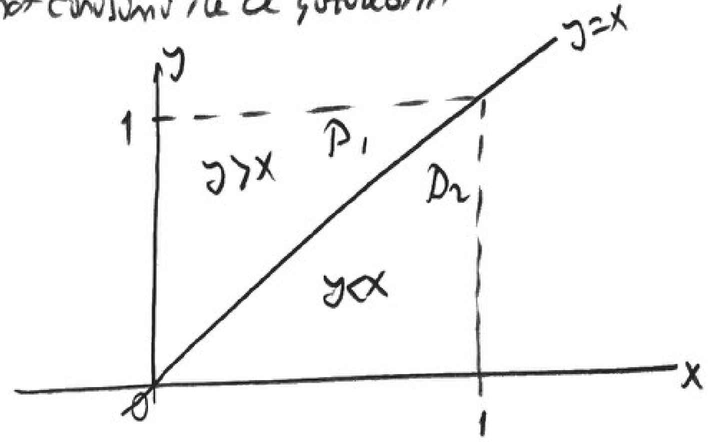
$$= 2\pi \left[\frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5} + \frac{r^5}{5}\int_0^{-1} u^2(-du) \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5} + \frac{r^5}{5}\, \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{0} \right] = 2\pi\, r^5 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\left(+\frac{1}{3}\right) \right] = 2\pi \cdot r^5 \cdot \frac{3}{15}$$

$$= \frac{2\pi}{5} r^5 \ //$$

Ayrıca silindirik koordinat dönüşümü ile de çözülebilir

3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{\max(x^2,y^2)}\,dx\,dy = ?$



$$e^{\max(x^2,y^2)} = \begin{cases} e^{x^2}, & x>y \\ e^{y^2}, & y>x \end{cases}$$

ve integralin tanımlandığı bölge kare olup $y=x$ doğrusu bu bölgeyi iki eşit parçaya böler. Bu parçalar $D_1 = \{(x,y) : y>x\}$ ve $D_2 = \{(x,y) \mid y<x\}$ bölgeleridir. Verilen bölge $= D_1 \cup D_2$ olduğundan

$$\int_0^1\int_0^1 e^{\max(x^2,y^2)}\, dA = \iint_{D_1} e^{y^2}\, dA + \iint_{D_2} e^{x^2}\, dA$$

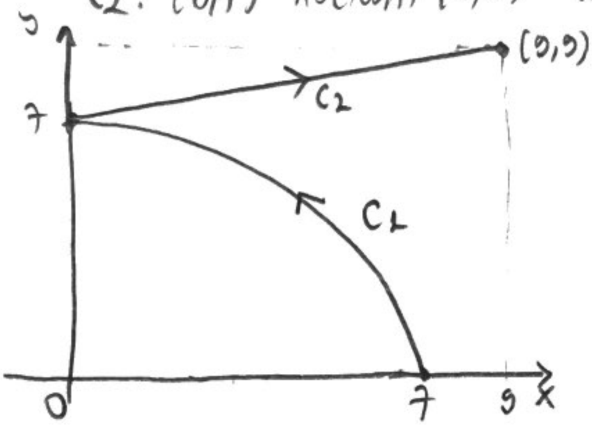
$$= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} e^{y^2}\, dx\, dy + \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{y^2} y\, dy + \int_0^1 e^{x^2} x\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^u}{2}\, du + \int_0^1 \frac{e^u}{2}\, du = e^u\Big|_0^1 = e-1 \ //$$

4) C_1: $(7,0)$ noktasını $(0,7)$ noktasına birleştiren çember yayı

C_2: $(0,7)$ noktasını $(9,9)$'ı " " doğru parçası



C_1 ve C_2 eğrilerinin parametrik ifadelerini bulalım

$\underline{C_1}$: Yarıçapı 7 olan, I bölgedeki çember yayı olduğundan

$$\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \quad \text{olur}$$

$\underline{C_2}$: $(0,7)$'den $(9,9)$ doğru parçası olduğundan

$$\begin{aligned} x &= 0 + 9t \\ y &= 7 + 2t \end{aligned}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Bigg| \begin{aligned} t=0 &\Rightarrow (x,y) = (0,7) \\ t=1 &\Rightarrow (x,y) = (9,9) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur

\# $\underline{C_1 \text{ eğrisi için}}$ $x = 7\cos t \Rightarrow dx = 7(-\sin t)dt$

$y = 7\sin t \Rightarrow dy = 7\cos t\, dt$

$$\int_{C_1} x^2 dx + x dy = \int_{t=0}^{\pi/2} \left[7^2\cos^2 t\,(-7\sin t\, dt) + 7\cos t\,(7\cos t\, dt)\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} 7^3 \cos^2 t\,(-\sin t)dt + 7^2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1+\cos(2t)}{2}}\, dt = 7^3 \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_{t=0}^{\pi/2} + \frac{7^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\overset{0}{\cancel{\sin(2t)}}\Bigg|_{t=0}^{\pi/2}\right)$$

$u = \cos t$
$du = -\sin t\, dt$

$$= -\frac{7^3}{3} + \frac{7^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) //$$

$-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2\pi}{4}$ $\quad 7^3 = 343$

\# $\underline{C_2 \text{ eğrisi için}}$: $x = 9t \Rightarrow dx = 9dt$ ve $y = 7 + 2t \Rightarrow dy = 2dt$

$$\int_{C_2} x^2 dx + x dy = \int_{t=0}^{1} \left((9t)^2\, 9dt + 9t\, 2\, dt\right) = \int_0^1 (9^3 t^2 + 18t)\, dt = \frac{9^3}{3} + \frac{18}{2} //$$

$\frac{729}{3} = 243$

Böylece,

$$\int_C x^2 dx + x dy = \int_{C_1} x^2 dx + x dy + \int_{C_2} x^2 dx + x dy$$

$$= -\frac{7^3}{3} + \frac{7^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9^3}{4} + 9 \quad //$$

5) $F = \underbrace{(Ax\ln z)}_{M}\hat{i} + \underbrace{(By^2z)}_{N}\hat{j} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{z}+y^3\right)}_{P}\hat{k}$ olmak üzere

a) F vektör alanının korunumlu olması için gerek $M_y = N_x$, $M_z = P_x$, $P_y = N_z$ olmalıdır

$$\left.\begin{aligned} M = Ax\ln z &\Rightarrow M_y = 0, \quad M_z = \frac{Ax}{z} \\ N = By^2z &\Rightarrow N_x = 0, \quad N_z = By^2 \\ P = \frac{x^2}{z}+y^3 &\Rightarrow P_x = \frac{2x}{z}, \quad P_y = 3y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &M_y = N_x = 0 \ \checkmark \\ &M_z = A\frac{x}{z} = 2\frac{x}{z} = P_x \Leftrightarrow \underline{\underline{A=2}} \\ &P_y = 3y^2 = By^2 = N_z \Leftrightarrow \underline{\underline{B=3}} \end{aligned}$$

Böylece, $A=2$ ve $B=3$ olmalıdır

b) $F = (2x\ln z)\hat{i} + (3y^2z)\hat{j} + \left(\frac{x^2}{z}+y^3\right)\hat{k}$ korunumlu vektör alanı için $\nabla\phi = F$ eşitliğini sağlayan ϕ potansiyel fonksiyonu belirleyelim

$$F = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k} = \phi_x\hat{i} + \phi_y\hat{j} + \phi_z\hat{k}$$ olduğundan

$\underline{M = 2x\ln z = \phi_x}$ olur. Öyleyse $\phi(x,y,z) = \int \phi_x\,dx = \int 2x\ln z\,dx = x^2\ln z + g(y,z)$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z) = x^2\ln z + g(y,z)}$$

$N = 3y^2z = \phi_y = \frac{\partial g}{\partial y}$ olduğundan $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2z$ dir.

Öyleyse, $g(y,z) = \int \frac{\partial g}{\partial y}\,dy = \int 3y^2z\,dy = y^3z + h(z)$ olur

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z) = x^2\ln z + y^3z + h(z)}$$

$P = \cancel{\frac{x^2}{z}+y^3} = \phi_z = \cancel{\frac{x^2}{z}+y^3} + h'(z) \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow \boxed{h(z) = C,\ C\in\mathbb{R}}$

Böylece, $\boxed{\phi(x,y,z) = x^2\ln z + y^3z + C,\ C\in\mathbb{R}}$ elde edilir

c) $C: (0,0,1) \to (a,b,a+b) = (7,85,93)$ eğri olmak üzere F korunumlu olduğundan

$$\int_C F\cdot dr = \int_{(0,0,1)}^{(7,85,68)} \nabla\phi\cdot dr = \phi(7,85,93) - \phi(0,0,1) = 7^2\ln(93) + 85^3\cdot 93 \ //$$